**1 – дәріс**

**Интегралдық тендеулерді кластарға бөлу**

**Жоспар**

*1.Интегралдық тендеулерді кластарға бөлу*

*2. Практикалық және теориялық маңызы бар сызықтық емес интегралдық теңдеулер*

*1. Интегралдық тендеулерді кластарға бөлу.*

Белгісіз функциялар интегралдың астында кездесетін теңдеулер интегралдық тендеулер деп аталады. Егер белгісіз функция интегралдық тендеуге сызыктық түрде қатынасса, онда бұл тендеу сызықтық теңдеу деп аталады.

түріндегі тендеу Фредгольмнің ІІ-текті сызықтық интегралдық теңдеуі деп аталады. Мұндағы -нақты айнымалы аргументіне тәуелді белгісіз функция, функциясы кесіндісінде, функциясы жиынында анықталған белгілі функциялар: пен сәйкес интегралдық теңдеудің бос мүшесі мен ядросы деп аталады, ал - параметр. Интегралдық жоғарғы және төменгі шектері жалпы жағдайда тұрақты шамалар: олар шектелген де шектелмеген де болуы мүмкін. Егер болса, онда жоғарыдағы (1.1) интегралдық теңдеу - біртекті, ал болған жағдайда - біртекті емес деп аталады.

Фредгольмнің І-текті интегралдық теңдеуінде белгісіз функция интегралдық мүшеде ғана қатынасады, дәлірек айтқанда, ол теңдеу

түрінде жазылады.

Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуі деп

түріндегі, ал І-текті интегралдык теңдеуі деп

түріндегі теңдеуі айтады.

Егер функциясын интегралдық теңдеуге қойғанда теңдеу тепе-тендікке айналса, ондафункциясы интегралдық теңдеудін шешімі деп аталады. Интегралдық теңдеудің шешімі бар және оның жалғыз болуы параметріне байланысты екенің келешекте көрсетеміз.

Мәселен, Фредгольмніңбіртектіинтегралдық

теңдеуініңпараметрініңкезкелгенмәндеріндешешімібарболады, алнольденерекшешешімдерәрқашанбарболабермейді.

Фредгольмніңбіртектіинтегралдықтеңдеуініңнольгетеңемесшешімдерібарболатынпараметрініңмәндеріменшіктімәндердеп,алоларғасәйкеснольденөзгешешешімдерменшіктіфункциялардепаталады.

Ескерту.Вольтерратеңдеуінің Фредгольм теңдеуініңдербестүрідепқарастыруғаболады. Себебі (1.3) теңдеуініңядросы, облысында анықталған, ал жағдайдадепалсақ, ондабіз (1.1) теңдеуініңядросын

түріндеанықтаймыз.

Бұл еcкертубойынша Фредгольм теңдеуіүшіндәлелденгенқасиеттерВольтерратеңдеуіүшін де орындалады. БірақВольтерратеңдеуінің тек өзінетеңерекшеқасиеттері бар, сондықтан Фредгольм теңдеуіменқатарВольтерратеңдеуін де қарастырамыз.

Келешекте (1.1) және (1.3) интегралдықтеңдеулердегіберілген бос мүше пен ядро үзіліссіз немесеквадраттарыменинтегралданатынфункциялар:

яғни,депұйғарамыз. Осы шартты қанағаттандырушы функциясын Фредгольм ядросы деп атайды. Фредгольм ядроларынамысалдаркелтірейік.

1-мысал.ядросындағыайнымалыларболғандафредгольмдік ядро болады, алболса, ондаолфредгольмдік ядро болмайды.

Расында

2-мысал. Егер интегралдық теңдеудің ядросы

мұндағы - үзіліссіз функция және болса, онда ядро фредгольмдік болады, алболса, ол ядро фредгольмдік болмайды.

Егер (1.5) ядросында болса, онда ол ядро ерекшелігі әлсіз немесе полярлық ерекшелікті ядро деп, ал теңдеу ерекшелігі әлсіз интегралдық теңдеу деп аталады. Егер болса, онда интегралданбайтын функция болады. Бұл функциядан алынған интеграл тек Кошидің бас мәні мағнасында ғана бар болуы мүмкін. Ядросы түріндегі интегралдық теңдеуді сингулярлық интегралдық теңдеу, ал басқаларын регулярлық интегралдық теңдеулер деп атайды. Бір аргументті сингулярлық интегралдық теңдеудің жалпы түрі:

мұнда Г-комплекс жазықтықтағы тұйық немесе тұйық емес қарапайым доғалар жиыны; жәнефункциялар Г доғасында анықталған, ал

Біз тек сызықты регулярлық интегралдық теңдеулерді ғана қарастырамыз. Интегралдық теңдеулерді бір аргументті функция үшін ғана емес, көп аргументті функциялар үшін де қарастыруға болады. Мәселен, Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеуінде ядро, бос мүше, ал Фредгольмнің 2-текті сызықтық интегралдық теңдеулері системасы

түрінде өрнектеледі. Егер-векторлар, ал ядро элементтері болатын матрица деп қарасақ, онда системаны (1.1) теңдеуі түрінде жазуға болады.

Дәл осылай аргуметті функция үшін Вольтерра теңдеуі

түрінде, ал системасын

түрінде өрнектеуге болады.

*2. Практикалық және теориялық маңызы бар сызықтық емес интегралдық теңдеулер*

Математикалық, физикалық кейбір қолданбалы есептерді шешу сызықтық емес интегралдық теңдеулерді шешуге алып келеді. Сондықтан кейбір практикалық және теориялық маңызы бар бірнеше сызықтық емес интегралдық теңдеулерді зерттеусіз келтірейік.

1) Гаммерштейн теңдеуі

Мұндағы - фредгольмдік ядро.

2) Урысон теңдеуі

Мұндағы - үзіліссіз функция;, ал М – шенелген оң шама.

3) Вольтерранын сызықтық емес теңдеуі

Мұндағы - үзіліссіз функция,, облысында анықталған.

4). Ляпунов-Лихтенштейн теңдеуі

Мұндағы мен үзіліссіз функциялар.

Егер теңдеулерде белгісіз функцияның интегралымен қоса туындылары да бар болса, ондай теңдеулерді интегро-дифференциалдық теңдеулер дейміз. Мысал үшін мына ең қарапайым интегро-дифференциалдық теңдеулерді келтірейік:

мұнда белгісіз функциялардың бірінші ретті туындылары бар болғандықтан, бұл теңдеулердің шешімі жалғыз болуы үшін қосымша шарттары берілуі қажет.

Қолданбалы математикада интегро-дифференцилдық сызықтық, сызықтық емес теңдеулер немесе теңдеулер жүйесі және жоғарғы ретті туындылы (кәдуілгі және дербес туындылы) интегро-дифференциалдық теңдеулер көп кездеседі. Мысалы

Теңдеуінің бастапқы шарттары шешімін табу есебін қарастыруға болады. Егер белгісіз функция көп аргументті болса, онда интегро-дифференциалдық теңдеулерде белгісіз функциялардың дербес туындылары мен интегралдары көп өлшемді болады. Интеграл астындағы өрнекте белгісіз функциялардың туындылары болатын интегро-дифференциалдық теңдеулер де жиі кездеседі. Eгер интеграл сыртындағы өрнекте белгісіз функциялардың туындылары жоғарғы ретті болса, көп жағдайда мұндай интегро-дифференциалдық теңдеулерді жүйелерге дифференциалдық және интегралдық теңдеулердің жүйелердің жалпы теориясын пайдаланып шешуге болады.

3-мысал ретінде (2.1) мен (2.2) теңдеулердің сызықтық интегралдық теңдеулерге келтірейік. Ол үшін

деп белгілесек, онда (2.1) теңдеуінен І-ретті сызықтық дифференциалдық теңдеуін аламыз. Оның шешімі

Бұл өрнекке -тің мәнін қойсақ,

Мұнда

белгілеулер енгізсек, онда біз Вольтерраның 2-текті сызықтық

теңдеуін аламыз. Осы әдіспен (2.1) теңдеуін Фредгольмнің 2-текті сызықтық интегралдық теңдеуіне келтіруге болады.

**Ұсынылатын әдебиеттер**

1. Орынбасаров, Ш. Сақаев Интегралдық теңдеулер. Алматы «Білім» 1994.

2. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения М.

3. КрасновМ.Л., МакаренкоГ.И. Операционное исчисление. Устойчивость движения. Наука. 1964.

4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М. 1975.

5. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. М.1981.

6. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М. 1959.

7. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Гостехиздат. 1947

**2 – дәріс**

**Дифференциалдық теңдеулер мен интегралдық теңдеулер арасындағы байланыстар**

**Жоспар**

*1.Дифференциалдық теңдеулер мен интегралдық теңдеулер арасындағы байланыс.*

*2. Қысып бейнелеу әдісі*

*1. Дифференциалдық теңдеулер мен интегралдық теңдеулер арасындағы байланыс.*

Жай дифференциалдық теңдеу үшін қойылған Коши есебінің шешілуі Вольтерраның интегралдық теңдеуіне келтіріледі. І-ретті кәдімгі дифференциалдық теңдеуүшін бастапқы шарт берілсін.функциясы осы Коши есебінің шешімі делік. Оны теңдеуге қойып, алынған тепе-тендікті ден дейін интегралдап,

интегралдық теңдеуін аламыз. Мұның шешімі функциясы берілген есептің де шешімі екенін тексеру қиын емес.

Коэффициенттеріүзіліссізфункцияларболатынn-реттісызықтықдифференциалдықтеңдеуүшін Коши есебіншешу де ІІ-тектіВольтерраныңинтегралдықтеңдеуіншешугекелтіріледі. Бұлжағдайдамына ІІ-реттітеңдеуүшінқарастырамыз :

Теңдеуүшін, бастапқышарттарыберілсін. Бұлесептедепбелгілеп, оданкейінтендіктібастапқышарттардыпайдаланыпинтегралдау

нәтижесіндетеңдеуіналамыз. Ал соңғыөрнектердіпайдаланыпберілгентеңдеуден

Вольтерраның ІІ-тектіинтегралдықтеңдеуіналамыз, мұндағы

2. теңдеуіншекаралықшарттарыменқосақарастырайық. Жайдифференциалдықтеңдеулеркурсындабұлесеп Грин функциясыарқылышешіледі. Егертеңдеудіңоңжағытүріндебелгісізфункциясынатәуелдікүрделі функция болса, ондасоңғыөрнектен

интегралдықтеңдеуішығады.

1. Кейбіржағдайдаинтегралдықтеңдеудідифференциалдықтеңдеугекелтіріпшешугеболады. Берілген

теңдеуінекіретдифференциалдасақ,

Өрнектеріналамыз. Бұлардан ІІ-реттідифференциалдықтеңдеуішығады. Жоғарыдағыөрнектерден бастапқы шарттары алынады. Демек, интегралдық теңдеуді шешу мәселесі ІІ-ретті дифференциалдық теңдеудішешудің Коши есебінекелтірілді.

Параметр–ғатәуелді

Дифференциалдықтеңдеуішарттарынқанағаттандыратыншекаралықесептіинтегралдықтеңдеугекелтірейік. Олүшінтеңдеуініңберілгеншекаралықшарттардықанағаттандыратын Грин функциясынқұрайық. Бұлтеңдеудіңсызықтықтәуелсізшешімдері.Сондықтан Грин функциясынкелесітүрдеіздейміз:

Мұндағы белгісізфункциялар. Грин функциясыныңшарттарынпайдалансақ, ондабұлфункциялардытөмендегітеңдеулержүйесіменанықтаймыз:

Осы жүйенішешіпекенінанықтаймыз. Демек,

енді осы өрнекпенанықталған Грин функциясынпайдаланып, берілгендифференциалдықтеңдеудіңберілгеншекаралықшарттардықанағаттандыратыншешімін табу үшін

интегралдықтеңдеуіналамыз.

*2. Қысыпбейнелеуәдісі*

Алгебралық, дифференциалдық, интегралдықжәнефункционалдықтеңдеулердіңшешімдері бар жәнеоларжалғызболуындәлелдеугебіртіндепжуықтауәдісі, яғниқысыпбейнелеуәдісіқолданылады. Қысыпбейнелеуәдісініңмазмұнынтөмендегітұжырымнанбілугеболады.

**І-теорема** (Банах). Толықметрикалық кеңістігінің кез келген элементін сол кеңістіктің өзіне бейнелейтін операторы берілсін: яғни. Оныңүстінеэлементтері

теңсіздігінқанағаттандырсын (мұндағы саны пен элементтеріне тәуелсізжәне). Сондакеңістігіндежалғызғанаэлементітабылып, ол

теңдеуінқанағаттандырады.

(2.1) теңсіздігінқанағаттандыратыноператорынқысуоператорыдеп, ал (2.2) теңдеуінқанағаттандыратыннүктесіноператорыныңқозғалмайтыннүктесідепатайды.

**Дәлелдеуі**.элементалып, мынадайтізбекқұрайық:

Осытізбегініңфундаментальдықөзінежинақтыекенінкөрсетейік. Алдымен

екенінбайқаймыз. Егерүшбұрыштартеңсіздігінпайдалансақ,

Осыдан болғандықтан

Соңғытеңсіздіктенүшін.Демек,тізбегіфундаментальдықтізбек.кеңістігініңтолықтығынантізбегініңшегіболады:

Енді екенін көрсетейік. Расында

Элементіболғандықтан,санынаномерітабылып,

болады.Демек,.Мұндағыкезкелген сан болғандықтан

яғнитеңдігіорынды.

Қысуоператорыныңқозғалмайтыннүктесініңжалғызекеніндәлелдейік. Ондайнүктелерекеу(және), яғнитеңдіктеріорындаладыдепұйғарайық. Олжағдайда.Егерболса, онда болады. Бұл теорема шартына қайшы, демек,,яғни.

Ескерту. (2.3) теңсіздіктенжағдайдажуықшешімдегіқателік

шартыменанықталады. Бұлтеңсіздікекіншіжағынантізбектініжинақтылықжылдамдығынкөрсетеді.

**Ұсынылатын әдебиеттер**

1. Орынбасаров, Ш. СақаевИнтегралдықтеңдеулер. Алматы «Білім» 1994.

2. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения М.

3. КрасновМ.Л., МакаренкоГ.И. Операционное исчисление. Устойчивость движения. Наука. 1964.

4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М. 1975.

5. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. М.1981.

6. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М. 1959.

7. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Гостехиздат. 1947

**3-дәріс**

**Тақырыбы:Қысып бейнелеу әдісін Фредгольмнің интегралдық теңдеуіне қолдану**

**Жоспар**

*1. Фредгольмнің біртекті емес теңдеуінің шешімі бар және шешімнің жалғыз екенін дәлелдеу.*

*2. Қайталанған ядролар және резольвента.*

*3. Интегралдық теңдеулер жүйесі.*

*1. Фредгольмнің біртекті емес теңдеуінің шешімі бар және шешімнің жалғыз екенін дәлелдеу.*

Интегралдық теңдеудің ядросы үзіліссіз функция болсын. Фредгольмнің біртекті емес

теңдеуінің шешімі бар және шешімнің жалғыз екенін дәлелдеуге қысып бейнелеу әдісін қолданайық. ядросы облысында үзіліссіз болғандықтан, шенелген, яғни,. Ал бос мүше - (1.1) интегралдық теңдеу шешімін класынан іздейміз. Операторды

деп белгілейік.

**1-лемма**. интегралдық операторы толық және кеңістігін сол кеңістіктің өзіне бейнелейді.

**Дәлелдеуі**. және деп белгілейік, болсын. Олкезде

жәнеболғандықтанүшінсанытабылып, болғандатеңсіздіктері орындалады.Егеросытеңсіздіктердіалдыңғыөрнектіңоңжағынапайдалансақ,

екенінкөреміз, яғнифункциясыкесіндісініңкезкелгеннүктесіндеүзіліссіз. Демекоператорыкезкелгенфункциясынтағыдасолкеңістіктегіүзіліссізфункцияғабейнелейдіекен.

Ендіқысуоператорыболатыншарттыанықтайық.

Мінебұдан

шартыорындалғанда қысу операторы болғанын көреміз.Жоғарыдадәлелденгенқысыпбейнелеуәдісінен,егер саны осы теңсіздіктіқанағаттандырса, онда (1.1) теңдеуініңбірғанаүзіліссізшешіміболады. Олшешімгежуықтайтынфункциялартізбегі

рекурренттітеңдіктерменанықталады, мұндағы функциясы кесіндісінде анықталған кез келген үзіліссіз функция.

Мысал. Біртіндепжуықтауәдісімен

интегралдықтеңдеуіншешукерек.

Шешуі. Нольдікжуықтауретінде бос мүшені, яғни

депалсақ, онда

Бұлтабылғанжуықшешімдертізбегін параметрі шартын қанағттандырса,ақырлышеккеиеболады. Олшек

берілгенинтегралдықтеңдеудіңшешіміболады.

*2. Қайталанғанядроларжәне резольвента.*Әдеттежуықтауформуласындабастапқыжуықтауретінде бос мүше функциясын қабылдайды, яғни   
. Сонда рекуррентті формуладан жуықтау тізбегінің мүшелері мынадай теңдіктермен анықталады:

мұндабірлік оператор,

, ал операторы - -ның дәрежесі.

операторы дәрежелерін ядросы арқылы өрнектеп көрейік. Анықтама бойынша

Егер

депбелгілесек, онда

солсияқты

Егер

депбелгілесек, онда

Жалпыжағдайда, математикалық индукция заңымен

операторымен теңдігін анықтауға болады. Мұнда

(2.1) формуласыменанықталған функциясы қайталанған ядро немесеядроныңинтеграциясыдепаталады. Келешекте деп қабылдаймыз. Оператор үшін белгілі теңдігінен қайталанған ядролар үшін орындалатын

теңдігіналуғаболады. Ескертекетейік, егер облысында ядросы үзіліссіз функция болса, онда барлық қайталанған ядролар да облысындаүзіліссізфункцияларболатыныкөрініптұр.

Қарастырыпотырған Фредгольм теңдеуініңшешімі

Болғандықтан

формуласыналамыз. (2.2) теңдеуініңоңжағындатұрғанқатардың  
шарты орындалғанда бірқалыпты жинақты болатынына көз жеткізу қиын емес. Әдетте оны Нейман қатары деп атайды. Жоғарыдаалынғантұжырымдардыңқорытындысыкелесітұжырымболады.

**2-теорема**. Егер

болса, ондакезкелген ІІ-тектіФредгольмніңтеңдеуінің кеңістігінде жататын жалғыз шешімі бар болады және ол шешім (2.2) формуласымен өрнектеледі. Яғни дөңгелегінің ішінде операторына шенелген кері оператор формуласыменанықталады.

Шынында,

Енді

функционалдыққатарынқарастырайық. Егерде болса, онда бұл қатар облысындабірқалыптыжинақты. Осы қатардыңқосындысын

ядроныңрезольвентасынемесешешетінядросыдеп аталады. Резольвента бірқалыптыжинақталатынфункциялыққатардыңқосындысыболғандықтан, аргументтерібойыншаүзіліссіз де, ал аргументібойынша­­ облысында аналитикалық функция екені айқын. Егер (2.3) теңдігінің екі жағын да функциясына көбейтіп, бойынша мен аралығында интеграл алсақ, онда

теңдігіналамыз. Енді (2.2) мен (2.4) теңдіктерінсалыстырсақ,

формуласышығады. Егер бос мүшеболса, онда (2.5) формуласыменанықталатын.

**3-теорема**.Егералдыңғытеореманыңшарттарыорындалса, онда (2.1) теңдеуініңшешімі (2.5) формуласыменанықталады.

**І-ескерту**. (2.5) формуласыпараметірініңөтекішкенемәндеріндеғанаорындалатынындәлелдедік, келешекте (2.5) формуласы параметірінің үлкен мәндерінде орындалатыны көрсетіледі. (2.5) формуласы -ның кез келген мәндерінде орындалатындай ядролар да бар. Мысалы, егер ядро өзіне-өзіортогональ, яғни

болса, онда жалпы Бұл жағдайда

-ға тәуелді емес.

**2-ескерту**. интегралдық теңдеулері

қанағаттандырады. Бұныңдұрыстығы (2.1) мен (2.3) формулаларынпайдаланыпдәлелдеугеболады.

**Мысалдар**. І.Фредгольмнің ІІ-тектіинтегралдықтеңдеуіүшін

ядросының қайталанған ядроларын табу керек.

Шешуі.

2. Резольвентаны пайдаланып интегралдық теңдеуді шешу керек:

Шешуі. Алдыменядросырезольвентасын табайық:

Олайболса,

немесе болса, онда

Демек, берілгенинтегралдықтеңдеудіңшешімі

3. Енді (1.1) теңдеуді кеңістігінде қарастырайық.

Біз кеңістігінің метрикасын

формуласыменанықталатынынбілеміз. кеңістігінде -ғақарағанда параметр-ның үлкен мәндерінде шешімінің бар екенін көрсетуге болады.

**2-лемма**.Егер ядро болса, онда операторы

Дәлелдеуі.нүктесіберілсін. ядросы үзіліссіз функция болғандықтан кез келген саны үшін сәйкес саны табылып: . Сондықтан, Коши-Буняковский теңсіздігін

яғни функциясы нүктесінде үзіліссіз, кез келген нүкте болғандықтан функциясы -да үзіліссіз. Осыдан, егержәнеболса, (1.1) теңдеуініңоңжағыкезкелген үшін, үзіліссіз функция екендігі шығады. Яғни сол жағында тұрған . Демек кеңістігінде жататын функциялар ішінен тек үзіліссіз функциялар ғана шешім болады деген қорытынды шығады. Дәлелдеген лемма бойынша

**3-лемма.** Егер

депбелгілесек, онда операторы параметрдің мәндерінде қысу операторы болады. Шынында да,

болғандықтан, Коши-Буняковскийтеңсіздігінпайдаланып,

теңсіздігіналамыз. Ендіекіжағында бойынша мен аралығын интегралдасақ

немесе

теңсіздігішығады. Осыдан

(2.6) теңсіздігінен оператор болғандағанақысу операторы болады.

Қысыпбейнелеупринципінен (1.1) теңдеуініңжалғызғанашешіміболуыүшін теңсіздігі орындалуы керек. Расындаболғандықтан облысының облысынан кең екені шығады. Бірақоблысындажуықтайтынтізбекинтегралдықтеңдеудің шешіміне бірқалыпты жинақты да, ал облысында бұл тізбек орташа жинақталатынын айтуға болады.

4. болсын. Сонда келесі тұжырым орынды.

**4-лемма**. Егер

Интегралындағы болса, онда ол интеграл интервалының барлық нүктелерінде дерлік бар жәнеболады.

**Дәлелдеуі**. теңсіздігіәрқашанорынды. (2.6) теңсіздігініңоңжағыныңбіріншіқосылғышы айнымалысы бойынша барлық үшіндерлік, ал екіншіқосылғыш кесіндісінде бойынша интегралданады. Міне, бұдан функциясы барлық үшін дерлік айнымалысы бойынша интегралданады, яғни,

интегралы барлықжағдайдадерліканықталған. Коши-Буняковскийтеңсіздігібойынша

қатысыорынды, ал бұдан

яғни, екенішығады. Демек лемма дәлелденді, яғни,

**5-лемма.**Фредгольмдікоператорлардыңкөбейтіндісі де Фредгольмдік оператор болады.

**Дәлелдеуі**. болсын. Бұлардан

Әрине, бұлөрнектіңоңжағындағыболса, ондатеңдіктегіқайталанғанинтегралдаранықталады. Олайболса, Фубинитеоремасыбойынша

Егер

депбелгілесек, онда

Егерекенінкөрсетейік. Коши-Буняковскийтеңсіздігібойынша

теңсіздігіорынды. Бұлтеңсіздіктіңекіжағынтөртбұрышыбойыншаинтегралдап,

демек, M. Олайболса, операторы Фредгольмдік оператор болады.

**3-ескерту**. ЖалпыжағдайдаФредгольмдікоператорлардыкөбейтуамалындаорынауыстырузаңыәрқашанорынды бола бермейді. Мәселен,

болсын. Сонда

**4-ескерту**. Егер болса, онда(2.8) өрнегіндегіM болады. Расында, егер

депбелгілесек (мұндағықайталанған ядро), онда

Жоғарыдағы (2.9) теңсіздігінүшінпайдалансақ,

ал бұдан немесе

Сондықтан (2.7) теңсіздігінескеріп,

шартыналамыз.

Егер орындалса, онда 4-ескерту бойынша ол ядроның қайталанған ядросы да сол шартты қанағаттандырады.

Егер

депбелгілесек, онда

Ал

болғандықтансоңғытеңсіздіктен

және

теңсіздігішығады.

**4-теорема**. Егер

Фредгольм теңдеуіндегіжәнеболса, ондаолтеңдеуүшінтүзілген Нейман қатарытеңдеудіңшешіміне орташа жинақты.

**Дәлелдеуі.**

қатарүшінүшбұрыштартеңсіздігіпайдаланып, мынаныаламыз:

Егер*n* саны жеткіліктідәрежедеүлкенболса, ондатеңсіздіктіңоңжағыөте аз шамаболады. Демек, қалдықмүшесі

болғанқатаржинақты, олайболса, жоғарыдағы Фредгольм теңдеуіүшіналынған Нейман қатарыитегралданатын функциясына жинақты. Сонымен Енді шектік функция Фредгольм теңдеуінқанағаттандыратынынкөрсетейік. Олүшін екенін, яғни орташа жинақты екенін көрсетсек, жеткілікті. Бұл оңай дәлелденеді, себебі жағдайда

**5-теорема**. Егер шартынақосымшашарты да орындалса, онда Нейман қатары кесіндісінде бірқалыпты жинақты болады.

**Дәлелдеуі:** Нейман қатарыныңжалпымүшесінбағалайық:

Егер (2.11) теңсіздігінпайдалансақ,

теңсіздігішығады, оныңоңжағындағыеселігіболатынгеометриялықпрогрессияныңжалпымүшесі. Вейерштрасс теоремасы бойынша жалпы мүшесі осындай қасиетке ие қатар бірқалыпты жинақты. Теорема дәлелденді.

**5.**Ендікөпөлшемдіинтегралдықтеңдеулергежоғарыдағыкелтірілгентеориялардықолданайық. Көпөлшемді Фредгольм теңдеуіне де қысыпбейнелеуәдісіорынды.

Теңдеуіндешенелгеннемесе-дегішенелмегеноблыс,

ал оның ядросы облысында үзіліссіз немесе

, яғни

болсын. Жоғарыдағышенелгендікшартыкөпаргументті функция үшін

түріндежазылады. (2.12) теңдеудіңядросысоңғыекішарттықанағаттандырса, теңдеуүшінжоғарыдағытұжырымдарорындыекеніндәлелдеуқиынемес.

Егерболса, онда (2.12) теңдеубіртіндепжуықтауәдісіменшешіледіжәнеоныңшешіміжалғызболады. Бұләдістегіқайталанушыядролар

өрнектеріменанықталады да теңдеудіңшешімі

түріндетабылады, мұндағы ядросының резольвентасы:

.

Егершектелген облыс болса, бұл қатар болғанда бірқалыпты жинақты, ал үзіліссіз функциялық қатардың шегі ретінде үзіліссіз функция.

*3. Интегралдықтеңдеулержүйесі.*

Фредгольмнің 2-текті интегралдықтеңдеулержүйесі

түріндеболады. Бұлжүйеніңядроларыалбосмүшелеріболсын. Осыжүйеніңшешіміболатынфункцияларыкеңістігіненізделеді. Бұлтеңдеулержүйесіүшінжоғарыдағытұжырымдартолықтүрдеорынды. Алтеңсіздігіндегіүшін

және ядролары үшін

шарттарорындалса, онда (3.1) жүйебіртіндепжуықтауәдісіарқылышешіледі. Олжуықтапшешупроцесібірқалыптыжинақты. Бұғанбізтолықтоқталмаймыз, себебіжүйеніФредгольмнің 2-текті біртеңдеуінекелтіругеболады. Бірақолтеңдеу тек бір интервал үшінемес, одан*m*есекеңоблыстақарастырылады.

аралығында пен функцияларын

болғанда

түріндеанықтап, ал ядросын облысында

Болғанда

арқылыөрнектеп, (3.1) теңдеулержүйесін

жазсақ, ондабізқұрғанядросы-де интегралданады, ал

болады. Шынында да,

Дәлосылай

**Ұсынылатын әдебиеттер**

1. Орынбасаров, Ш. СақаевИнтегралдықтеңдеулер. Алматы «Білім» 1994.

2. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения М.

3. КрасновМ.Л., МакаренкоГ.И. Операционное исчисление. Устойчивость движения. Наука. 1964.

4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М. 1975.

5. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. М.1981.

6. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М. 1959.

7. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Гостехиздат. 1947

**4-дәріс**

**Фредгольм теориясы**

**Жоспар**

*Ерекшеленген ядролы Фредгольмнің 2-ші текті интегралдық теңдеуі.*

*Фредгольмнің теориясы.*

Ерекшеленген ядро деп біреу тек айнымалысына, ал екіншісі тек  айнымалысына тәуелді екі функция көбейтінділерінің ақырлы қосындысынан тұратын, яғни

(1)

түріндегі ядро аталады. Жалпы жағдайда функциялары өзара сызықты тәуелсіз деп қараймыз. Егер олардың кейбіреулері сызықты тәуелді болса, онда (1) өрнегіндегі қосылғыштарды жинақтап, көбейткіштер сызықты тәуелсіз болатындай етіп түрлендіруге болады. болсын. Бұл жағдайда болады.

Фредгольмнің екінші текті

(2)

интегралдық теңдеуін қарастырайық. Егер ядросын (1) өрнекпен аустырсақ, онда теңдеуден

(3)

теңдеуі шығады. Бұл теңдеудің шешімі бар деп ұйғарайық. Егер



депбелгілесек, онда

(4)

Сонымен (2) теңдеуініңшешімінтабумәселесітұрақтыбелгісізкоэффициенттерінанықтауғакелтірілді.

Егер (4) теңдеуініңекіжағындафункцияларынакөбейтіп, алынғанөрнектібойыншаданғадейінинтегралдасақ, коэффициенттерінанықтайтыналгебралықсызықтықтеңдеулержүйесің

(5)

аламыз, мұндағы

Әрине, осыалгебралықжүйеніңшешіміжоқболса, онда (3) интегралдықтеңдеуініңдешешіміжоқболады. Егерайнымалылар (5) жүйеніңшешімдерібарболса, онда (4) теңдігіненфункциясының (3) теңдеуініңшешіміекенінтексеріпкөруқиынемес.

Ал (5) теңдеулержүйеніңшешімініңбарболуыбелгісізайнымалылардыңкоэффициенттерінеңқұралғананықтауышқабайланыстыекеніалгебракурсынанбелгілі. Сондықтан

анықтауышынқарастырайық. Әринеанықтауыш-ғабайланыстыдәрежелікөпмүшелікжәне, себебіДемек, көпмүшелігініңтүбірлерініңсаны-нанартықболмайды. Олтүбірлердідепбелгілейік.

 көпмүшелігі (3) теңдеуүшінФредгольманықтаушы, алолкөпмүшеліктіңтүбірлеріядросыныңнемесе (3) интегралдықтеңдеуініңменшіктісандарыдепаталады. Сызықтықалгебралықжүйелертеориясыбойынша (анықтаушыүшін) мынатұжырымдарғаәкеледі.

. Егерсаныкөпмүшелігініңтүбірлерініңбірдебіреуінетеңболмаса, ондакезкелгенфункцияларыүшін (5) жүйеніңжалғызғанашешімібарболады. Демек, (2) интегралдықтеңдеуүшінмынатұжырыморынды.

**1-теорема.**Егерсаныядросыныңменшіктімәніболмаса, онда (3) интегралдықтеңдеуініңкезкелгенфункцияүшін (4) өрнегіменанықталатынжалғызғанашешімібарболады.

ӘдеттебұлтұжырымдыФредгольмніңбіріншітеоремасыдейді.

болса, біртектіалгебралықжүйеніңшешімдеріболады. Сондықтанжағдайдабіртектіинтегралдықтеңдеудіңтекқананольдікшешімібарболады.

Егер (5) жүйесінКрамерәдісіменшешетінболсақ, ондаалымындағыанықтауыштардыбосмүшесіорналасқанбағанаэлементтерібойыншажіктепбылайжазуғаболады:

мұндағы-алгебралықтолықтауыштар, олкөрсеткіші -денаспайтынғабайланыстыкөпмүшелік. Белгісізсандарыныңосымәндерін (4) формулағақойып, (3) теңдеуініңшешімін

түрінде, немесе

формуласымен анықтаймыз, мұнда

жоғарыдағы (3) интегралдықтеңдеуініңрезольвентасышешуядросыдепаталады.

2. Ендісанытеңдеуітүбірлерініңбірінетең, яғниядросыныңменшіктімәніболсын. Онда (1.5) жүйенің анықтауышы нольге тең. Бұл жағдайда сәйкес біртекті

Жүйеніңтеңдеуі (мұндасаныматрицасыныңрангі) сызықтытәуелсізжәненольгетеңемес

векторы оның шешімі болады. Ал сонда

функциялары біртекті интегралдық

теңдеуініңнольгетеңемесшешімдеріболады. Бұлтеңдеудіңжалпышешімібұлайжазылады:

мұндағыкезкелгентұрақтышамалар. Біртектіинтегралдықтеңдеудіңнольгетеңемесшешімдерінсолтеңдеудіңменшіктімәндерінесәйкескелетінменшіктіфункцияларыдепатайды.

Енді (2) теңдеумен қатар мына

интегралдықтеңдеудіқарастырайық, мұнда. Осытеңдеуді (2) интегралдықтеңдеуінетүйіндесдепатайды. Ерекшеленгенядролы (3) интегралдықтеңдеуінетүйіндестеңдеу

.

Бұлтеңдеуүшін, (3) теңдеуінеайтылғантұжырымдардысөзбе-сөзқайталауғаболады. Онын шешімі

түрінде жазылады, мұнда

Егер, яғнитеңдеубіртектіболса, ондатұрақтыкоэффициенттерінсәйкесбіртектіжүйегетүйіндес

теңдеулержүйесіненанықтаймыз. анықтауышыаталғанжүйелергеортақболғандықтансонғыжүйененсызықтытәуелсізвектор–шешімібарболады:

Сондықтан,

функциялары түйіндес біртекті интегралдық

теңдеуініңшешімдеріболады. Осыданмынадайқорытындышығады.

**2-теорема.**Егерпараметріядросыныңменшіктімәніболса, ондабіртектіинтегралдықтеңдеуменоғантүйіндестеңдеудіңбірдейсандысызықтытәуелсізменшіктіфункцияларыбарболады.

БұлтұжырымдыФредгольмнің 2-теоремасыдепайтады.

3. Ендіпараметрібіртектіемес (3) интегралдықтеңдеуініңменшіктімәніболғанжағдайдықарастырайық. Жоғарыдаайтқандай (3) теңдеуініңшешілуі (5) сызықтықтеңдеулержүйеніңшешілуіменэквивалентті. Сондықтан, егерпараметрітеңдеудіңтүбіріболса, онда (5) жүйешешілмейді, демек, (3) интегралдықтеңдеуініңшешіміжоқболады. Ал егер, яғни,

болса, онда (5) жүйеніңшешімібар. Демек, соңғышарттарорындалғанжағдайда (3) біртектіемесинтегралдықтеңдеуініңшешімібарболады. Осы шаттарды жоғарыдағы қатарға қолдансақ,

шарттарын аламыз. Сонымен мынадай теорема делелдедік.

**3-теорема.**Егер ядроның меншікті мәні болса, онда жалпы жағдайда (3) интегралдық теңдеуінің шешімі жоқ болады. Біртекті емес (3) интегралдық теңдеуінің шешімі бар болуы үшін ондағы бос мүше ол теңдеуге түйіндес біртекті теңдеудің сәйкес барлық шешімдеріне ортогоналды болуы қажетті де жеткілікті.

Бұл – Фредгольмнің үшінші теоремасы. Ал соңғы шарттар орындалған жағдайда (3) теңдеуінің ақырсыз көп шешімі бар болады:

мұндағы - біртекті емес интегралды теңдеудің жеке шешуі, ал сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешуі.

**Ұсынылатын әдебиеттер**

1. Орынбасаров, Ш. Сақаев. Интегралдық теңдеулер. Алматы «Білім» 1994.

2. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения М.

3. Краснов М.Л., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Устойчивость движения. Наука. 1964.

4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М. 1975.

5. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. М.1981.

6. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М. 1959.

7. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Гостехиздат. 194

**5 – дәріс**

**Симметриялық интегралдық теңдеулер**

**Жоспар**

*1.Симметриялық ядролар және олардың кейбір қасиеттері*

*2. Симметриялық ядролы интегралдық теңдеулердің негізгі қасиеттері.*

*1.Симметриялық ядролар және олардың кейбір қасиеттері* кеңістігінде

интегралдық теңдеуін қарастырайық. Егер нақты ядро шартын қанағаттандырса, оны симметриялық ядро деп атайды. Мысалы, симметриялық ядролар. Комплекстік ядросы шартын қанағаттандырса, оны симметриялық эрмиттік ядро деп айтады. Ядросы симметриялық ядро болатын интегралдық теңдеуі симметриялық интегралдық теңдеу деп атайды.

Егер симметриялық (эрмиттік) ядро болса, онда бұл ядроның қайталанған ядролары симметриялық болады. Расында, қайталаған ядро анықтамасы бойынша

Дәлосылайжалпыжағдайүшіндебұлқасиеттіңорындыекеніноңайкөругеболады.

Егер симметриялық эрмиттік ядро болса, онда Фредгольм операторы

өзіне түйіндес, яғни болады. Расында

Біз бұдан былай нақты аргументті симметриялық ядроларды қарастырамыз.

*2. Симметриялық ядролы интегралдық теңдеулердің негізгі қасиеттері.*

**1-теорема.** Симметриялық ядролы интегралдық теңдеулердің әртүрлі меншікті мәндеріне сәйкес меншікті функциялар өзара ортогональ.

Дәлелдеуі. Симметриялық ядроның меншікті мәндері мен ал пен оларға сәйкес меншікті функциялар болсын. Сонда , теңдеулері орынды. Бірінші теңдеуді, ал екінші функциясына көбейткеннен соң олардың айырымын интегралдап, мына теңдікті аламыз:

немесе

Бұлтеңдеудеболғандықтан, олтекболғанжағдайдағанаорынды. Теоремадәлелденді.

**2-теорема.**Симметриялықядроныңменшіктімәндерінақтысандарболады.

Дәлелдеуі. Меншіктіфункциясынасәйкесменшіктімән- комплекссандепұйғарайық. Сонда теңдігі орынды. меншіктіфункциясыныңменшіктімәніболатынын, яғнитеңдігіорындыекеніноңайбайқауғаболады. 1-теоремадан болғандықтан, демек,. Сонымен, саны функциясының меншікті мәні бола алмайды.

**Ескерту**. Меншікті функцияларды әрбірінің нормасына бөліп нормалауға болады. Одан кейін, егер бір меншікті мәнге бірнеше сызықты тәуелсіз меншікті функциялар сәйкес келсе, онда оларды Шмидтің ортогональдау әдісін қолданып, өзара ортогональдауға және нормалауға болады. 1-теоремадан әр түрлі меншікті мәндерге сәйкес меншікті функциялар өзара ортогональ екенін көргенбіз.

Демек, симметриялық ядроның меншікті функциялары жиынын ортонормальданған система деп есептеуге болады. Бұдан былай, бір меншікті мәнге бірнеше сызықты тәуелсіз меншікті функциялар сәйкес келетін жағдайда, меншікті мәндер тізбегін жазарда, сол меншікті мәнге қанша меншікті функция сәйкес келсе, сонша қайталап жазамыз. Бұдан кейін әрбір меншікті мәнге жалғыз меншікті функция сай келеді деп айта аламыз. Сонымен қатар келешекте меншікті мәндерді абсалют шамалары бойынша өсетіндей етіп реттеп жазамыз:

Егер меншікті мәндер ақырсыз көп болса, онда Фредгольм теоремасы бойынша олардың шексіздікте шектік нүктелері болуы мүмкін, сондықтан, жағдайда болады.

**1-лемма.** Екінші қайталанған ядроның меншікті мәндері жиыны сол ядроның меншікті мәндерінің квадраттарының жиынынан тұрады.

Дәлелдеуі. ядросының меншікті мәні -ге сәйкес меншікті функциясы болсын, теңдігі орынды.

Бұл теңдікке операторын қолданып, теңдеуін аламыз. Одан кейін осы теңдеулерден теңдеуі шығады. Бұл соңғы теңдеуден саны - ядросының меншікті функциясын сәйкес меншікті мәні екенін көреміз.

Екінші жағынан ядросының меншікті мәні ал оған сәйкес меншікті функциясы болсын, яғни шарты орындалсын. Бұл соңғы теңдеуді

(\*)

түрінде жазып және деп белгілейік.Мұнда болуы мүмкін. Бұл жағдайда шамасы ядросының меншікті функциясына сәйкес меншікті мәні болады. Демек, бұл жағдайда лемма дәлелденеді.

Егер болса, (\*) теңдеуінен екені шығады. Бұдан - шамасы ядросының меншікті мәні, ал оған сәйкес меншікті функция. Лемма бұл жағдайда да дәлелденеді.

**1-лемманың салдары.** Егер симметриялық ядро болса, онда қайталанушы ядроның меншікті мәні оң.

Ескерту. Дәл осылай қайталанған ядросының мәндерінің жиынына ядросының -дәрежелі меншікті мәндері жиыны дәл келеді.

**3-теорема.** Кез-келген симметриялық ядроның кемінде бір меншікті мәні бар болады.

Дәлелдеуі. Қайталанған ядросының кемінде бір меншікті мәні бар екенін дәлелдейік, онда жоғарыда лемма бойынша -тың да меншікті мәні бар болады.

Қайталанған ядро -тың жазықтығының болатындай облысында меншікті мәні жоқ болсын (мұндағы -кез-келген оң сан). Кез-келген функциясын алып, жаңадан

(2.1)

функциясын құрамыз. Әрине,. Қарсы жағдайда, яғни болса, ядросының меншікті мәні болар еді де, теорема дәлелденгені болар еді. Сондықтан (2.1) теңдеуін бос мүшесі ал белгісіз функциясы болған 2-текті интегралдық теңдеу ретінде қарастырамыз. Бұл теңдеудің шешімі

мұндағыжоғарыдағы (2.1) теңдеудегіядросыныңрезольвентасы. Бұлтеңдіктіңекіжағындафункциясынаскаляркөбейтсек,

(2.2)

теңдігішығады. Жоғарыдабізядросыныңдөңгелегіішіндеменшіктімәніжоқдепұйғардық, олайболса, резольвентасы-ғақатыстыбүтінфункция, яғнионы

түрінде өрнектеуге болады. Бұл жағдайда (2.2) теңдігіндегі интеграл былай жазылады:

мұндағы

Енді осы оң сан екенін көрсетейік. Соңғы өрнектен

Олай болса, (2.2) теңдігінен

жәнебұданекенішығады, демек (2.2) теңдігінен

(2.3)

Ендіядросыныңешқандайменшіктімәніжоқдепұйғарайық. Бұлжағдайдасанынжеткіліктімөлшердеүлкенетіп, яғнидепалуғаболады. Олай болса, (2.3) теңсіздігінен яғни болады. Мұндай кезде екенін дәлелдеу қиын емес. Расында, -ті тұрақтылап, деп алсақ,

екенішығады, яғни. Соныменегерядросыныңбірденбірменшіктімәніжоқболса, ондаекен. Демек, егерболса, ондақайталанушыядросыныңкеміндебірменшіктімәнібарболады. Бұлжағдайдажоғарыдағылеммабойыншаядросыныңдакеміндебірменшіктімәнібарболады. 3-теоремадәлелденді.

Ескерту. (2.3) теңсіздігіядросыныңменшіктімәніжоқболатыныдөңгелегіішіндеорынды, басқашаайтқандаолсаныядросыныңеңкішіменшіктімәніненазболғандақанағаттанады.

ядросыныңмодульшамасыбойыншаеңкішіменшіктімәніболсын, сондасаныядросыныңменшіктімәніболады. Егерболса, (2.3) теңсіздігіорынды. Сол (2.3) теңсіздігіненболғанда

Бұлтеңсіздіктетеңдікқатысыядросыныңменшіктімәнінесәйкесменшіктіфункциясыүшінорындалады. Расында, бұлжағдайда. Бұдан

**4–теорема**. Егерсимметриялықядроболса, ондаоныңменшіктімәнісолядрорезольвентасыныңқарапайымполюсіболады.

Дәлелдеу. Қарсыжориық, яғнименшіктімәнЛоранқатарынажіктеледі.

(2.4)

мұндағы Резольвента мына интегралдық теңдеуді қанағаттандырады:

орнына (2.4) теңдігінің оң жағын қойып, одан кейін алынған өрнектің екі жағындағы көпмүшеліктердегі айырымы коэффициенттерін теңестіріп,

(2. 5)

теңдіктерін аламыз. Бұл теңдіктердің біріншісін -ке, ал екіншісін -ке көбейтіп, одан кейін алынған нәтижелерді қоссақ,

теңдігішығады. Мұныбойынша -дан -ғадейінинтегралдасақжәнеядроныңсимметриялығынпайдалансақ, онда

одан кейін бұл өрнекке (5) теңдігін қолдансақ,

немесе барлық жерде дерлік екені шығады. Демек, деген шартқа кері қорытынды алдық. Міне, бұл қайшылық теореманың орынды екенін дәлелдейді.

**5-теорема.** Әрбір шектелген интервалда теңдеуінің ақырлы санды түбірлері бар болады.

Дәлелдеуі. Қарсы жориық, яғни кесіндісінде теңдеуінің ақырсыз көп түбірлері жиыны бар деп ұйғарайық. Әрбір түбіріне меншікті функциясы сәйкес келетіні, олардың,

шарттарынқанағаттандыратыныбелгілі. СоңғытеңдіктенөрнегіядросыныңортонормаланғансистемасыбойыншаФурьекоэффиценттеріекенінкөреміз. Бессельтеңсіздігінпайдаланып

теңсіздігіналамыз. Бұныхбойынша -дан-ғадейінинтегралдасақ,

Алболғандықтан, соңғытеңсіздіктер

Егерболса, соңғытеңсіздіктіңсолжағыкезкелгеншамаданүлкенболаалады, сондықтанбұлтеңсіздікорындалмайды. Мінебұлқайшылықтеореманыдәлелдейді.

**Ұсынылатын әдебиеттер**

1. Орынбасаров, Ш. СақаевИнтегралдықтеңдеулер. Алматы «Білім» 1994.

2. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения М.

3. КрасновМ.Л., МакаренкоГ.И. Операционное исчисление. Устойчивость движения. Наука. 1964.

4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М. 195.

5. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. М.1981.

6. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М. 1959.

**6 – дәріс**

**Симметриялық интегралдық теңдеулер (жалғасы)**

**Жоспар**

*1. Ядроны қатарға жіктеу*

*2. Гильберт-Шмидт теоремасы*

*1. Ядроны қатарға жіктеу*

Симметриялық ядросын қарастырайық. Оның меншікті мәндері ал меншікті функцияларыболсын. Меншікті функциялар ортонормаланған, ал меншікті мәндер абсалют шамаларының өcу ретімен орналасқан болсын. Жаңадан

(1.1)

cимметриялық ядросын құрайық.

**1-лемма**. тізбектері симметриялық ядросының меншікті мәндері мен оларға сәйкес меншікті функциялары болады.

Дәлелдеуі. m>n болсын. Бірінші тізбектен -ді, ал екінші тізбектен оған сәйкес келуші функциясын алып,

өрнегінқұрайық. Ендіядросын (1.1) өрнегіменауыстырып, мынадайтеңдікаламыз:

Бұндағы мен ядросының меншікті мәні мен меншікті функциясы болғандықтан, квадрат жақшадағы өрнек нольге тең және { функциялары системасы ортонормаланғандықтан,

Демек, α(x)=0яғниолайболса, m>nжағдайындаменяғниядросыныңменшіктімәніменменшіктіфункциясы.

Керісінше, егерядросыүшін𝜇саныменψ(x)функциясыменшіктімәнменменшіктіфункцияболса, ондаоларядросыныңменшіктімәндеріменменшіктіфункцияларыныңжиындарынантабылады. Ұйғарымбойынша𝜇менψ(x)

теңдеуінқанағаттандырады. Бұлтеңдіктегіядросын (1.1) өрнегібойыншаауыстырсақ,

Бұлтеңдеудіңекіжағындафункциясынаскаляркөбейтіп,

теңдеуінекелеміз. ядросыныңсимметриялықжәне{функцияларыныңортонормаланғанқасиетінескерсек,

өрнектеріналамыз. Бұлжағдайдаалдыңғытеңдеуденортогональдықшартышығады. Онда(1.2) теңдеуі.

түріндежазылады. Бұлтеңдеуден𝜇 мен - ядросының меншікті мәні мен меншікті функциясы екенін, ал -тің ортогональболғандықтанm>nреттіменшіктіфункциялардыңбіреуіменсайкелетінінкөреміз.

**1 - салдар.** Егерядросыныңn-ненкөпменшіктімәні бар болса, ондаядросының меншікті мәндерінің модулі бойынша ең кішісі болады.

Берілгенядроныңменшіктімәндері ақырлы санды болған жеке жағдайды қарастырайық. Онда ядросының бірде–бір меншікті мәні болмайды. Бұндай жағдайда бұрын дәлелденген теорема бойынша

немесе

Осы формуладан ядросының ерекшеленген ядро екенін көреміз. Кез-келген ерекшеленген ядроның ақырлы санды меншікті мәндері бар болғандықтан және жоғарыдағы талдаулардан мына теорема орынды.

**Дини теоремасы.** Квадратымен интегралдана-тын симетриялық ядроның меншікті мәндері мен меншікті функциялары ақырлы санды болуы үшін оның ерекшеленген ядро болуы қажетті және жеткілікті.

**2 - салдар.**Кез-келгенквадратыменинтегралданатынфункциясыүшін

Теңдігіорынды.

Дәлелдеуі. Егеререкшеленбеген ядро болса, соңғытеңдіктіңорындалуы ап-айқын. Біріншісалдарбойыншаядросыерекшеленбегенболса, ондаядросыныңмодулібойыншаеңкішіменшіктімәні болады.

5 – дәрістегі (2.3) теңсіздігібойыншаядросы, оныңменшіктімәні мен меншіктіфункциясыүшін

теңсіздікорындыжәне жағдайда болғандықтан, соңғы өрнектен

Тұрақтыболған х үшін олай болса, ол ядро ортонормаланған{системасыбойынша

Фурье қатарынажіктеледі де, ал Фурье коэффиценттері

теңдігіменанықталады. Сонымен, ядросынаоныңменшіктіфункцияларсистемасы{)} бойынша

түріндегібисызықтыдепаталатын Фурье қатарысәйкескеледіекен. Бессель теңсіздігібойынша

(1.3)

Бұл теңсіздіктегі қатар мүшелері оң және оларды мүшелеп х бойынша а-дан b-ға дейін интегралдап, теңсіздігін аламыз, яғни қатары жинақты.

Ендіквадратында системасының ортонормаланғандығын және Рисс-Фишер теоремасын ескерсек, мынадай қорытындыға келеміз.

**1- теорема.** Бисызықты қатар облысында орташа мағынада жинақты және ол қатардың қосындысы сол ядроға тең.

Енді қайталанған ядроларды жіктейік. Егер { сандары мен функциялары K(x,s) симметриялық ядросының меншікті мәндері мен меншікті функциялары болса, онда қайталанатын ядросының меншікті мәндері , ал меншікті функциялары екені белгілі, яғни

(1.4)

теңдігі орындалады.  ядросын х аргументін тұрақтылап, ортонормаланған  системасы бойынша Фурье қатарына жіктесек,

мұндағы Фурье коэффиценттері

өрнегімен анықталады. Бұдан және (1.4) теңсіздігінен

(1.5)

Сонымен

Егерболса, онда екенін көрсету қиын емес. Сондықтан, (1.5) қатары Рисс-Фишер теоремасыбойыншаорташамағынадажинақты. Егерболса, онда (1.5) қатар тек орташамағынадағанажинақтыемес, оныңm>2болғандаабсалюттіжәнебірқалыптыжинақтыболатынындәлелдеугеболады. болсын. болғандықтан, nсаныныңжеткіліктімөлшердеүлкенмәндерінде. Осыларды ескеріп, (1.5) өрнегіне Коши-Буняковский теңсіздігін пайдалансақ,

Жоғарыда (1.3) Бессельтеңсіздігіменсоңғытеңсіздікпен

екенішығады. Олайболса, қатардыңжинақтылығынкөрсетуші Коши белгісібойынша (1.5) қатарыбірқалыптыжинақтыжәнеоныңқосындысыболады. Сонымен, мына теорема орынды.

**2- теорема.**Егерядросы шартын қанағаттандырса, онда мәндерінде (1.5) қатары облысында абсалютті және бірқалыпты жинақты болады да

Мысал. Фредгольм 2-текті интегралдық

теңдеуініңшешімінтабайық.

Шешуі. формаласынпайдалансақтеңдеуді

түрінекелтіреміз. Бұлөрнекте

депбелгілесек, ондатеңдеуішығады. Бұлтеңдеудеменбелгісізтұрақтыкоэффициенттер. Олардытабуүшінтеңдіктіңекіжағынcosxпенsinxфункцияларынакөбейтіп, оданкейінхбойынша 0-ден𝜋-гедейінинтегралдап,

немесеекенінтабамыз. Демек, берілгентеңдеудіңшешіміболады.

*2. Гильберт-Шмидт теоремасы*

Егер метриялық ядросы үшін теңдігін қанағаттандыратындай функциясы табылмаса, онда ядросы тұйық деп, ал ондай функциясы табылса, онда ядросы тұйық емес деп аталады.

**1 - теорема (Шмидт).** Меншікті функциялар системасы тұйық болуы үшін ядроның тұйық болуы қажетті және жеткілікті.

**Дәлелдеуі.**тұйық емес ядро болсын, яғнифункциясы табылып,

Шартыорындалсын. Соңғыөрнекті функциясына көбейтіп, сонансоң х бойынша 0-дан b- ғадейінинтегралдасақ,



яғнисимтемасытұйықболмайды.

Керісінше, меншіктіфункцияларсистемасытұйықболмасын, яғнитабылып, оларүшін

(2.1)

теңдігіорындалсын. Жоғарыдадәлелденгентұжырымнан

Енді осы теңдіктіω(x)ω(s)-кекөбейтіп, оданкейінs пен х бойынша а-дан b-ғадейінинтегралдап, (2.1) теңдігінескерсек,

Ал болғандықтан, соңғытеңдеуден

Сондықтан, 

жәнедәлосылай

,

яғни, теорема дәлелденді.

Егер

теңдігіорындалса, ондаf(x) функциясыядросыарқылыөрнектелгендейді.

**2-теорема**(Гильберт-Шмидт). ядросы арқылы өрнектелетін кез-келген f(x) функциясысолядроныңменшіктіфункцияларыбойыншаорташажинақты Фурье қатарынажіктеледі.

**Дәлелдеуі**. Алдыменядросыныңменшіктіфункциялары арқылы h(x) функциясын Фурье қатарынажіктейік:

Бессельтеңсіздігінпайдалансақ, қатарыныңжинақтыекенінкөреміз. ОданкейінүшінФурьеқатарын

(2.2)

түземіз, мұндағы

Олайболса,

(2.3)

болғандықтан болады. Сондықтан, Рисс-Фишер теоремасы бойынша (2.3) қатары орташа жинақты.

Енді (2.3) қатарыныңқосындысы-ке тең болатынын дәлелдейік. Ол үшін

депалайық. Онда

Жоғарыдағылемманыңсалдарынпайдалансақ, ұмтылғанжағдайындаболады. Демек, яғнитеоремадәлелденді.

**Ескерту.**Гильберт-Шмитдтеоремасындаменшіктіфункцияларсистемасытолықдепұйғарылмайды.

**3-теорема**. Егерсимметриялықядрошартынқанағаттандырса, онда (2.3)қатарыбірқалыптыжинақтыболады.

**Дәлелденуі.**Жоғарыдағы (1.3) теңсіздігінпайдаланып, (2.3) қатарыныңқалдықбөлігінбағаласақ,

Егер қатарының жинақтылығын пайдалансақ, соңғытеңсіздіктенбарлық және үшін екенін көреміз, бұдан Коши белгісін ескеріп, (2.2) қатарының бірқалыпты жинақты екенін дәлелдейміз.

Гильберт-Шмидт теоремасыныңсалдары. 1-салдар.Қайталанатын-ядросы меншікті функцияларсистемасы бойынша

(2.4)

түріндегіқатарғажіктеледі.

Расында, қайталанушы ядро анықтамасыбойынша

Егер болса, онда 2-теорема бойынша

үшіналынғанжіктеулердіңоңжағындағы-ныоныңмәніменауыстырсақ, (2.4) теңдігішығады.

**1-салдар**.Ядроныңрезольвентасысолядроныңменшіктіфункцияларыбойыншақатарғажіктеледі:

Расында-ныңкішімәндеріүшін

екеніндәлелдегенбіз, алқайталанатынядроныңжіктелуқасиетібойыншаформулалардыпайдалансақ, 

Біртекті емессимметриялықядролы

теңдеуініңшешімінанықтайық. депбелгілейік. Егерболса, ондамұндағы- тұрақтышамалар. Сондықтан,

(2.5)

теңдеуіндегіфункциясын (2.4) теңдігініңоңжағыменауыстырсақ,

бұдан

немесе

(2.6)

Бұл өрнектің екі жағындағы функцияларының коэффициенттерін салыстырып,

екеніналамыз. коэффициенттерімәндерін(2.4) теңдігінеқойып,

Шмидт формуласыналамыз.

Егер рангісі τеселіменшіктімәнболса, онда коэффициенттерін (2.6) теңдігі бойынша анықтай алмаймыз, оның үстіне сол (2.6) теңдігінен

екенішығады. Сондықтанбұлжағдайда (2.6) теңдігініңшешімі

түріндежазылады.

Ендіядролардыкластарғабөлейік. Гильберт-Шмидт теоремасынқолдансақ,

теңдігіналамыз. Бұлтеңдіктіңекіжағы да q(x)функциясынакөбейтіп, оданкейін х бойынша а-дан b-ғадейінинтегралдасақ,

Егерq(x)=h(x) болса, онда

Мінеосытеңдікядроныкластарғабөлудіңнегізіболады. Бұлтеңдікбойыншабарлықменшіктімәндердіңоңболуыныңқажеттіжәнежеткіліктішарты–кезкелгенүшінболуы. Расында, егербарлықболса, ондатеңсіздіктенболатыныкөрініптұр. Ендісолменшіктімәндердіңкеміндебіреуіндепалайықжәнеболсын. Меншіктіфункциялардыңортонормаланғансебептіболады.

Егерсимметриялықядросыныңбарлықменшіктімәндеріоңболса, ядрооңдепаталады. Бұлжағдайда. Егерсимметриялықядросыныңбарлықменшіктімәндерітерісболса, ондаядротерісдәлелденеді. Бұлжағдайда. Егерүшінболса, ондаоңсимметриялықядроанықоңдәлелденеді. Егерүшінболса, ондатеріссимметриялықядроанықтерісдәлелденеді.

**4теорема**ядросыныңанықоңболуыүшін, барлықменшіктімәндероңядротұйықболуықажеттіжәнежеткілікті.

**Дәлелдеуі**. ядросытұйықболмасын, ондаүшінболады. Бұдан

яғнианық оң емес. Сонымен, егер ядросы анық оң болса, онда ол тұйық.

**Мерсертеоремасы**. Егерсимметриялық ядросы негізгі облысында оң және үзіліссіз болса, онда бұл ядроның бисызықты қатары бірқалыпты жинақты.

**Дәлелдеуі.** Оң ядро үшін екенін дәлелдейік. Қарсы жорып, нүктесінде депұйғарайық. Бұлжағдайдаүзіліссіздікқасиетібойынша нүктесі үшін болады. Мынадай функция құрайық:

Бұлфункция үшін

яғниоң болу шартынақарама-қайшы. Бұлқайшылық екенін дәлелдейді.

Енді

(2.7)

деп белгілейік. Әрине -үзіліссіз және симметриялық ядро.

Енді осы ядросының оң екенін көрсетейік. Ол үшін m>p болғанда деп алайық. Онда системасының ортонормаланғанын пайдаланып,

яғни ядросының оң екенін дәлелдейік. Сондықтан . Олай болса, (2.7) теңдігі бойынша

немесебарлықpүшін

Сондықтан, оңмүшелерденқұралғанқатарыжинақты. Албисызықтықатарүшін

теңсіздігіорынды, олбұлтеңсіздіктенқатардыңбірқалыптыжинақтылығышығады. Сонымен, теңдігіорынды. Бұданs=xдепалып, ортонормаланғанүшінтеңдігіналамыз.

**Ұсынылатын әдебиеттер**

1. Орынбасаров, Ш. СақаевИнтегралдықтеңдеулер. Алматы «Білім» 1994.

2. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения М.

3. КрасновМ.Л., МакаренкоГ.И. Операционное исчисление. Устойчивость движения. Наука. 1964.

4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М. 1975.

5. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. М.196.

6. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М. 1959.

7. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Гостехиздат. 1947.

**7-дәріс**

**Тақырыбы:Симметриялықинтегралдықтеңдеугекелтірілетінинтегралдықтеңдеулер.**

**Жоспар**

*1. Қисық симметриялық ядро.*

*2. Симметриялық ядролы интегралдық теңдеуге келтірілетін теңдеулер.*

*3. Шмидт ядросы және ол ядроның меншікті функциялары.*

*4. Шмидт теоремасы.*

*1. Қисық симметриялық ядро.*

Фредгольмнің интегралдық

теңдеуін қарастырайық. Комплекс ядросы үшін теңдігі орындалса, оны қисық симметриялық ядро деп айтады. Нақты ядросы үшін теңдігі орындалса, оны қисық симметриялық ядро деп атайды. Мысалы, қисық симметриялық ядролар.

Егер түріндегі ядроны алсақ, демек симметриялық ядро. Егер жоғарыдағы берілген теңдеу қисық симметриялық ядролы теңдеу болса, оны мына төмендегідей симметриялық ядролы

түріндегіинтегралдықтеңдеугекелтіругеболады (мұндағынемесе). Демек, берілгенқисықсимметриялықядролытеңдеудіңкеміндебірменшіктімәнібарболадыжәнеоныңбарлықменшіктімәндері – жорамалсандар.

*2.Симметриялықядролыинтегралдықтеңдеугекелтірілетінтеңдеулер.*

Қолданбалыесептерде

түріндегіинтегралдықтеңдеужиікездеседі, мұндағынақтысимметриялықядрожәнекесіндідебелгіліфункция. Бұлтеңдеудіңекіжағында-кекөбейтіп, оданкейін

(2.1)

өрнегімен жаңа функция енгізіп, белгісіз үшін

теңдеуіналамыз, мұндағысимметриялықядро.

Егерсандарыменфункцияларыядросыныңсәйкесменшіктімәндеріменменшіктіфункцияларыболса, ондаболғанжағдайдаекенінбілеміз. (2.1) теңдігінескерсек, біртекті

интегралдықтеңдеуініңменшіктіфункцияларыбаржәнеоларсалмақфункциясыменортонормаланған, яғнибарлықүшін

теңдігіорындыболады.

Екіншіқайталанатынядроүшін

меншіктіфункциялардыңжіктеліпалынғансистемаларыбойыншақатарғажіктеуорынды. Бұдан

Бұлтеңдіктіңекіжағыншамасынақысқартсақ,

Дәл осы жолмен

Ядросыүшін

теңдігіалынады. Егер

жіктелуіорындыболса, онда

жәнет.с.с.

*3. Шмидтядросыжәнеолядроныңменшіктіфункциялары.*

симметриялықемесядро, алоныңтүйіндесі, бұларғасәйкесФредгольмоператорларыжәнеболсын. Алжәнесимметриялықжәнеоңоператорлардейік. Олардыңядролары

симметриялықжәнеоңядроларболады. Расында

,

МінеосындайқасиеттерібаржәнеядроларыядросыүшінШмидтядроларыдепаталады.

ӘрбірсимметриялықемесядросынаШмидтекіортогональфункциянысәйкестендіреді, алжалпыжағдайдаберілгенядроның, меншіктіфункцияларыешқандайбайланысыжоқсистемаменсәйкестендіреді. Екіжәнефункциялары (Шмидтіңанықтауыбойынша)

(3.1)

теңдеулерінқанағаттандырса, ондапенфункцияларыодақтасменшіктіфункциялардепаталады. (3.1) теңдеулеріндегішамасынядросыныңменшіктімәні. Әрқашанменшіктіфункцияларпарыбарболады. Расында, (3.1) теңдеулеріненфункциясыншығарыптастасақ, ондасимметриялықядролы

біртектіинтегралдықтеңдеуінекелеміз, мұндағы- Шмидтядросы.

Егер (3.1) теңдеулеріненфункциясыншығарыптастасақ, ондасимметриялықядролы

(3.2)

біртекті интегралдық теңдеуін аламыз, мұнда да - Шмидт ядросы.

Егер (3.1 системасын параметрлеріне сәйкес шешімдері болса, онда , ядролары үшін сандары меншікті мәндер, ал пен функциялары оларға сәйкес меншікті функциялар болады. Керісінше, - сол ядролардың біреуінің (мәселен ядросының ) меншікті мәні болсын. Бұлсанәрқашаноң. Ал функциясы сол санынасәйкесменшікті функция болсын. Егер

депалсақ, онда

Сонымен, (3.1) теңдеулерісистемасыныңшешімдерінтабумәселесінемесесимметриялықядроларыныңбіреуініңменшіктімәндеріменменшіктіфункцияларынтабумәселесіменпара-пар.

Бұлекіядроныңменшіктімәндерібірдейжәнеоңболғандықтанолардыдепбелгілейік. ядросыныңортонормаланғанменшіктіфункциялары болсын. (3.1) теңдеуінің екіншісіндежәнедепалсақ, (3.2) теңдеуініңменшіктімәнінесәйкескелетін меншікті функциясын аламыз.

Осылайалынғанфункциялары да ортонормаланған система құрайды. Расында,

теңдеулерінен

демек, системасы ортонормаланған.

1. *Шмидт теоремасы.*үшін

(4.1)

теңдігі орынды екені Шмидт дәлелдеген (мұндағы симметриялық емес ядро).

**Теорема** (Шмидт). -үзіліссіз ядро болсын. (4.1) теңдігімен анықталған кез-келген функциясы ядросының меншікті функциялары арқылы бірқалыпты жинақты қатарға жіктеледі.

**Дәлелдеуі.** Теореманың шартына байланысты (4.1) теңдігімен анықталған функциясы үзіліссіз болады. Ал үшін Фурье коэффиценттері

Екінші жағына

ядросының Фурье коэффициенттері. Бессель теңсіздігінен және қатарларының жинақтылығы шығады. Сондықтан

қатарыабсалюттіжәнебірқалыптыжинақты.

депбелгілейік. функциясыбарлықфункцияларынаортогональ. Расында,

демек,

(4.2)

Мынаөрнектіқарастырайық:

Бұған (4) теңдігінпайдалансақ,

Гильберт-Шмидт теоремасыбойыншафункциясынядросыныңменшіктіфункцияларыарқылыкоэффициенттері болған бірқалыптыжинақтықатарғажіктеугеболады. Екіншіжағынан

Сондықтаналдыңғытеңдіктен

Демек (4.2) жәнесоңғытеңдіктерден

яғни. Ендеше

(4.3)

теңдігіналамыз. Бұлформуладан үшін

Осытәсілменкез-келгенфункциясынфункцияларыарқылыбірқалыптыжинақты

қатарынажіктеугеболады. Теорема дәлелденді.

Енді (6) формуласынсимметриялық

ядросынақолданайық. Сонда ол ядро

(4.4)

түріндежіктеледі. Дәлосылай

қатарыналамыз.

ядросын жіктейік. системасыбойыншатүрінде жіктейміз, мұндағы ал бұл мәнді алдынғы қатарға қойып,

қатарыналамыз.Бұлқатар пен бойынша орташа жинақты. Расында, жоғарыдағы өрнектерден

=

бұл (4.4) бірқалыптыжинақтылыққалдықмүшесі, сондықтанол жағдайда - ге ұмтылады. Демек,

**Ұсынылатын әдебиеттер**

1. Орынбасаров, Ш. СақаевИнтегралдықтеңдеулер. Алматы «Білім» 18.

2. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения М.

3. КрасновМ.Л., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Устойчивость движения. Наука. 184.

4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М. 195.

5. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. М.1981.

6. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М. 179.

7. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Гостехиздат. 167.

**8 – дәріс**

**Тақырыбы:Фредгольм интегралдық теңдеулері**

**Жоспар**

*1. Фредгольмның бірінші текті теңдеуі*

*2. Ядросы симметриялық емес I-текті инегралдық теңдеулер*

*1. Фредгольмның бірінші текті теңдеуі*

Фредгольмнің I-текті

(1.1)

теңдеуін қарастырайық. Бұндай теңдеу әрқашан шешіле бермейді. Мысалы

теңдеуі кез келген үшін шешіле бермейді. Егер бұл теңдеуде , оның шешімі болады. Онымен қоса

функцияда мен тұрақты шамалары шартын қанағаттандырса, онда теңдеу шешіледі яғни теңдеудің ақырсыз көп шешімі бар болады.

Егер (1.1) теңдеуіндегі симметриялық ядро болса, онда Шмидт теоремасы бойынша мына

I-тектіинтегралдықтеңдеудіңшешімдеріядросыныңбарлықменшіктіфункцияларынаортогональфункциялармендәлкеледі. Егертұйықядроболса, бұлтеңдеудіңтекнольдікшешіміғанабарболады.

Егеролядротұйықболмаса (мәселенерекшеленгенядроболса), ондатеңдеудіңақырлынемесесанақтыжиындысызықтытәуелсізшешімдерібарболады.

Ендіболғанкездегі(1.1)теңдеуінқарастырайық. Гильберт-Шмидттеоремасыбойынша(1.1)теңдеуініңшешімібарболуыүшінфункциясыядросыныңменшіктіфункцияларысистемасыбойыншақатарғажіктелуіқажет, яғни

Міне,осышарторындалса, (1.1) теңдеуініңшешімін

түріндеіздеугеболады, мұндағыбелгісізтұрақтышамалар: Соңғықатарды (1.1) теңдеуінеқойып, оныалдыңғықатарменсалыстырсақ, , яғни

**Теорема** (Пикар). Тұйықсимметриалықядролы

(1.1)

I-тектіинтегралдықтеңдеуініңкласындажалғызшешімі бар болу үшін

қатарыныңжинақтыболуықажетті де жеткілікті. Мұндағы ал сандары ядросыныңменшіктімәндері, да шешімі бар деп ұйғарайық. Онда

Бұлтеңдікті

(1.2)

түріндежазамыз. Бұдан сандардың функциясы үшін Фурье қатарының коэффициенттері екенін көреміз. Бессель теңсіздігі бойынша

демек ,қатаржинақты.

Жеткіліктігі: керісіншеқатаржинақтыболсын, ондаФишер-Рисстеоремасыбойыншажалғызғанафункциясытабылады, олүшінсистемасыбойыншаФурьекоэффициенттеріболады, яғни, (1.2) теңдігіорынды. Алфункциясықатарға

түріндежіктеледі .Екіншіжағынан (1.2) теңдігінескерсек,

Олайболса, соңғыекітеңдіктерден

яғни функциясы (1.2) теңдеуінқанағаттандыратыноныңшешіміболады.

Егер ядросы тұйық болмаса , онда (1.1)теңдеуініңшешімікөпболады. жәнеболсын.Олкезде, егерфункциясы (1.1) теңдеуініңшешіміболса , ондафункциясыдаолтеңдеудіңшешіміболады (мұндағыc тұрақтышама). - ерекшеленген ядро болса, ол тұйық емес, сондықтан (1.1) теңдеуінің шешімі ақырсыз көп тұрақты шамаларға байланысты болады. Ал (1.1) теңдеуінің шешімі бар және ол жалғыз болуы үшін ядросының тұйық болуы маңызды.

Фредгольмнің кейбір І-текті теңдеулерін шешу үшін біртіндеп жуықтау әдісін қолдануға болады.

**Теорема.** (1) теңдеуінің ядросы симметриялық және оң болып, ол теңдеу бірмәнді шешілсін. Сонда

(1.3)

рекурренттікформуласыменанықталатынтізбегі (1.3) теңдеуініңшешімінеорташажинақтыболады. Мұндағыеңкішіменшіктімән.

**Дәлелдеуі.** (3) теңдігіндедепалсақ,

өрнегіналамыз. Мұныңекіжағындаядросыныңменшіктіфункцияларыкекөбейтіп, xбойыншаa-данb-ғадейінинтегралдасақ,

мұнда

Ендіядросысимметриялық ядро екенінескеріпжәне

теңдігінпайдаланып

өрнегіналамыз. Сонымен

Мұндай

интегралдықарастырайық. системасыныңтолықтығынескерсек

(Парсеваль теңдігі)

Немесе

Ал теңсіздігінен .Сондықтанүшін

номері табылып болғанда

болады. Демек,

яғни,тізбегіинтегралдықтеңдеудіншешімі функциясына орташа жинақты.

М**ысал.**Біртектіинтегралдық

теңдеуініңменшіктімәндеріменменшіктіфункцияларынтабайық.

Ш**ешуі.**Теңдеудібасқашажазайық:

оданкейін

депбелгілесек, берілгентеңдеудібылайжазамыз:Бұлөрнектіңекіжағындапен-кекөбейтіп, бойынша-денгедейінинтегралдап,

,

Немесе мен -ніанықтайтын

Теңдеулеріналамыз. Бұлсистеманыңнольдікемесшешімібарболуыүшін

яғниболуыкерек. Мінебұлсаныжоғарыдағытеңдеудіңядросыныңменшіктімәні, алменшіктіфункциянытабуүшінсистемаға-ныңмәнінқойып, екенінтабамыз. Бұл-діпайдаланып, берілгентеңдеуядросыныңменшіктіфункциясыекенінанықтаймыз. Егерсоңғытеңдіккедепмәнінқойсақ, ондаменшіктіфункцияболады.

*2. Ядросы симметриялық емес I-текті инегралдық теңдеулер*

Симетриялық емес ядросын мынадай бисызықты

қатарынажіктелсін. Ондаинтегралдықтеңдеуініңшешімдерібарлықфункцияларынаортогональфункцияларболады. МінебұданШмидтядросытұйықболсатеңдеудіңтекнольдікшешіміғанабарболатыны, жәнеядротұйықболмаса, ондаолтеңдеудіңақырлынемесесанақтыжиындысызықтытәуелсізнольгетеңемесшешімдерібарболатынышығады.

**Теорема.** Біртектіемес

теңдеуініңкласындашешілуіүшінбұлтеңдеудегібосмүшеШмидттіңядросыныңменшіктіфункцияларыарқылы

(2.2)

орташажинақтықатарынажіктелужәне

(2.3)

қатарыныңжинақтыболуықажеттідежеткілікті. Осышарторындалғанкезде (2.1) теңдеуініңшешімі

түріндеөрнектеледі, мұндағыжоғарыдағы (1.3) теңдеуініңкезкелгеншешімі.

**Дәлелдеуі.**Егер (2.1) теңдеуініңшешіміболса, онда. Сондықтан Шмидт теоремасыбойынша функциясы (2.2) қатарына жіктеледі. Бессель теңсіздігі бойынша (2.3) қатар жинақты болады және, керісінше, егер (2.3) қатары жинақты болса, онда Рисс-Фишер теоремасыбойыншафункциясытабылыпжәне Фурье коэффициенттері болады, яғни

Теңдігіорынды. Бұлтеңдікпенанықталғанфункциясының (2.1) теңдеуінқанағаттандыратыныноңайтексеріпкөругеболады.

**Ұсынылатын әдебиеттер**

1. Орынбасаров, Ш. СақаевИнтегралдықтеңдеулер. Алматы «Білім» 1994.

2. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения М.

3. КрасновМ.Л., МакаренкоГ.И. Операционное исчисление. Устойчивость движения. Наука. 1964.

4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М. 1975.

5. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. М.1981.

6. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М. 1959.

7. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Гостехиздат. 1947.

**9 – дәріс**

**Фредгольмнің I-текті корректі емес интегралдық теңдеуі**

**Жоспар**

*1. Корректі емес қойылғантуралы ұғым*

*2. Фредгольмнің I-текті теңдеуі корректі емес есеп*

*3. Меншікті мәндер мен меншікті функциялардың эктеремальдық қасиеттері.*

*1. Корректі емес қойылғантуралы ұғым.*

теңдеуінің және белгілі болған жағдайда шешуін табу есебін қарастырайық. Есепті корректі емес қою жағдайларын да қарастыралақ. Бірінші рет бұл ұғымдарды Жак Адамар енгізді.

мен функциялары метрикалық және кеңістіктерінің элементтері болып, оларда сәйкес жєне түріндегі метрикаларды анықтасын. Әдетте метрика ұғымы есептің қойылуына байланысты анықталады.

түрінде теңдеудің шешімі ұғымы анықталсын.

Егер санына сәйкес саны табылып, теңсіздігінен болса, онда орнықты шешім делінеді, мұндағы , ал

Егер  қос метрикалық кеңістікте: 1). үшін оның шешімі бар болса; 2)шешім жалғыз, бірмәнді анықталса; 3)шешім үшін орнықтылық шарттары орндалса, онда есебі корректі қойылған есеп деп аталады. Бұл шарттардың кемінде біреуін қанағаттандырмайтын есептер корректі емес есептер деп аталады. Бұл корректі емес қойылған есеп ұғым тек қос метрикалық кеңістікте бұл есеп корректі қойылған болуы мүмкін.

Мысал үшін кесіндіде берілген функциясының туындысы болатын функциясын анықтау мәселесін алуға болады:

функциясының туындысы болсын. функциясы метрикасында функциясынан шамамен айырмашылықта болады, мұндағы кез келген аз шама. Бірақ  туындысы метрикасы бойынша -тен айырмашылықта болады және ол айырманы параметрінің жеткілікті мөлшердегі үлкен мәні үшін үлкен етуге болады. Демек, шешімнің орнықтылық шарттары орындалмай жатыр.

Егер пен функцияларының ара қашықтығы метрикасымен, яғни,

Немесе

формуласымен, алпенфункцияларыныңарақашықтығыметрикасыменберілсе, ондабұлқашықтықтарөзарақатынасындаболады, мұндағы, Демек, функциясыныңазөзгеруіфункциясыназөзгертіледі, яғниқарастырылыпжатқанесепорнықты .

Енді Фредгольмнің 2-текті

теңдеуінқарастырайық. Мұныңядросыүзіліссізфункция, алолядроныңменшіктімәніболмасын. Онда (1) теңдеуініңжалғызғанашешіміболады, ол

түріндежазылады. Мұндағыүзіліссізфункция. Міне осы тұжырымдардан бұл теңдеуді шешу есебі орнықты , яғни функциясының аз өзгеруіне функциясының да аз өзгеруі сәйкес келеді. Сонымен (1) есебі корректі қойылған.

*2. Фредгольмнің I-текті теңдеуі корректі емес есеп*

Бірінші текті Фредгольм тењдеуін

қарастырайық. Мұндағыядросыүзіліссізжәнедифференциялданатынболсын. (2.1) теңдеуішешімініңорнықтылықмәселесіменшұғылданайық.

Жаңафункциясыненгізейік, мұндапараметір. Бұлфункцияны (2.1) теңдеуіндегіпенауыстырсақ,

Бұдан

немесе

Әрине, мұндағабайланыссызтұрақтышама. Cондықтанжеткіліктідәрежедеүлкенболса, өтеазшамаболады. Екіншіжағынаняғни бұл шама өте аз емес. Міне, осы екі нәтиже (2.1) интегралдық теңдеуінің корректі еместігін көрсетеді, яғни оның шешімі орнықты болмайды.

*3. Меншікті мәндер мен меншікті функциялардың эктеремальдық қасиеттері.* Гильберт-Шмидт теоремасы бойынша, кез келген үшін

теңдігіорынды, мұндағыал-дероныңменшіктімәндері. Бұлтеңдіктіңоңжағындатұрғанқатарорташажинақтыболағандықтан, оныкескаляркөбейтугеболады, яғни

ядросыныңменшіктімәндерісандарыабсалютшамаларыныңөсуретіменорналассын, яғниболсын, алабсолютшамасыбойыншаеңкішісі. Онда соңғы теңдіктен

Егер бұл теңсіздікке Бессель теңсіздігін

пайдалансақ, онда

қатысышығады.

Алфункциясыбіріншіменшіктіфункцякетеңболса, ондаосытеңсіздіктепе-теңдіккеайналады. Расында, болса, онда тепе –теңдігінен

өрнегіналамыз. Соныменмынадайтұжырымдыдәлелдедік.

**Теорема.** Нормаланғанфункцияларжиынындаскаляршамасыөзініңеңжоғарғымәнінеие, ол-гетеңалмаксимуммәнінеболғандажетеді.

Ендіядросыныңменшіктіфункцияларыортогональболатыннормаланғанфункцияларжиынынқарастырайық, яғни

болсын. Онда берілген теңдіктен

теңдігіналамыз. Бұлөрнеккежоғарыдағытүрлендірулердіқайталасақ,

қатынастарын аламыз. Сондықтан мына тұжырым орынды.

**Ұсынылатын әдебиеттер**

1. Орынбасаров, Ш. Сақаев Интегралдық теңдеулер. Алматы «Білім» 1994.

2. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения М.

3. Краснов М.Л., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Устойчивость движения. Наука. 1964.

4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М. 1975.

5. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. М.1981.

6. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М. 1959.

7. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Гостехиздат. 1947.

**9 – дәріс**

**Фредгольмнің I-текті корректі емес интегралдық теңдеуі**

**Жоспар**

*1. Корректі емес қойылғантуралы ұғым*

*2. Фредгольмнің I-текті теңдеуі корректі емес есеп*

*3. Меншікті мәндер мен меншікті функциялардың эктеремальдық қасиеттері.*

*1. Корректі емес қойылғантуралы ұғым.*

теңдеуінің және белгілі болған жағдайда шешуін табу есебін қарастырайық. Есепті корректі емес қою жағдайларын да қарастыралақ. Бірінші рет бұл ұғымдарды Жак Адамар енгізді.

мен функциялары метрикалық және кеңістіктерінің элементтері болып, оларда сәйкес жєне түріндегі метрикаларды анықтасын. Әдетте метрика ұғымы есептің қойылуына байланысты анықталады.

түрінде теңдеудің шешімі ұғымы анықталсын.

Егер санына сәйкес саны табылып, теңсіздігінен болса, онда орнықты шешім делінеді, мұндағы , ал

Егер  қос метрикалық кеңістікте: 1). үшін оның шешімі бар болса; 2)шешім жалғыз, бірмәнді анықталса; 3)шешім үшін орнықтылық шарттары орндалса, онда есебі корректі қойылған есеп деп аталады. Бұл шарттардың кемінде біреуін қанағаттандырмайтын есептер корректі емес есептер деп аталады. Бұл корректі емес қойылған есеп ұғым тек қос метрикалық кеңістікте бұл есеп корректі қойылған болуы мүмкін.

Мысал үшін кесіндіде берілген функциясының туындысы болатын функциясын анықтау мәселесін алуға болады:

функциясының туындысы болсын. функциясы метрикасында функциясынан шамамен айырмашылықта болады, мұндағы кез келген аз шама. Бірақ  туындысы метрикасы бойынша тен айрмашылықта болады және ол айырманы параметрінің жеткілікті мөлшердегі үлкен мәні үшін үлкен етуге болады. Демек, шешімнің орнықтылық шарттары орындалмай жатыр.

Егер пен функцияларының ара қашықтығы метрикасымен, яғни,

Немесе

формуласымен, алпенфункцияларыныңарақашықтығыметрикасыменберілсе, ондабұлқашықтықтарөзарақатынасындаболады, мұндағы, Демек, функциясыныңазөзгеруіфункциясыназөзгертіледі, яғниқарастырылыпжатқанесепорнықты .

Енді Фредгольмнің 2-текті

теңдеуінқарастырайық. Мұныңядросыүзіліссізфункция, алолядроныңменшіктімәніболмасын. Онда (1) теңдеуініңжалғызғанашешіміболады, ол

түрінде жазылады . Мұндағы үзіліссіз функция . Міне осы тұжырымдардан бұл теңдеуді шешу есебі орнықты , яғни функциясының аз өзгеруіне функциясының да аз өзгеруі сәйкес келеді. Сонымен (1) есебі корректі қойылған.

*2. Фредгольмнің I-текті теңдеуі корректі емес есеп*

Бірінші текті Фредгольм тењдеуін

қарастырайық. Мұндағыядросыүзіліссізжәнедифференциялданатынболсын. (2.1) теңдеуішешімініңорнықтылықмәселесіменшұғылданайық.

Жаңафункциясыненгізейік, мұндапараметір. Бұлфункцияны (2.1) теңдеуіндегіпенауыстырсақ,

Бұдан

немесе

Әрине, мұндағабайланыссызтұрақтышама. Cондықтанжеткіліктідәрежедеүлкенболса, өтеазшамаболады. Екіншіжағынаняғни бұл шама өте аз емес. Міне, осы екі нәтиже (2.1) интегралдық теңдеуінің корректі еместігін көрсетеді, яғни оның шешімі орнықты болмайды.

*3. Меншікті мәндер мен меншікті функциялардың эктеремальдық қасиеттері.* Гильберт-Шмидт теоремасы бойынша, кез келген үшін

теңдігіорынды, мұндағыал-дероныңменшіктімәндері. Бұлтеңдіктіңоңжағындатұрғанқатарорташажинақтыболағандықтан, оныкескаляркөбейтугеболады, яғни

ядросыныңменшіктімәндерісандарыабсалютшамаларыныңөсуретіменорналассын, яғниболсын, алабсолютшамасыбойыншаеңкішісі. Ондасоңғытеңдіктен

Егер бұл теңсіздікке Бессель теңсіздігін

пайдалансақ, онда

қатысышығады.

Алфункциясыбіріншіменшіктіфункця-кетеңболса, ондаосытеңсіздіктепе-теңдіккеайналады. Расында, болса, онда тепе –теңдігінен

өрнегіналамыз. Соныменмынадайтұжырымдыдәлелдедік.

**Теорема.** Нормаланғанфункцияларжиынындаскаляршамасыөзініңеңжоғарғымәнінеие, ол-гетеңалмаксимуммәнінеболғандажетеді.

Ендіядросыныңменшіктіфункцияларыортогональболатыннормаланғанфункцияларжиынынқарастырайық, яғни

болсын. Онда берілген теңдіктен

теңдігіналамыз. Бұлөрнеккежоғарыдағытүрлендірулердіқайталасақ,

қатынастарын аламыз. Сондықтан мына тұжырым орынды.

**Ұсынылатын әдебиеттер**

1. Орынбасаров, Ш. Сақаев Интегралдық теңдеулер. Алматы «Білім» 1994.

2. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения М.

3. Краснов М.Л., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Устойчивость движения. Наука. 1964.

4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М. 1975.

5. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. М.1981.

6. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М. 1959.

7. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Гостехиздат. 1947.

**10 – дәріс**

**Тақырыбы: Интегралдық түрлендірулер мен теңдеулер**

**Жоспар:**

1. Фурье түрлендіруі және оның интегралдық теңдеулерге қолданылуы. Фурьенің интегралдық түрлендіруі түсінігі.

2. Фурьенің интегралдық теңдеуі.

Математикалық физиканың көптеген есептерін шешу мәселесі арнайы ядролы интегралдық теңдеулерді шешуге алып келеді. Бұндай теңдеулерді интегралдық түрлендірулер әдістерімен шешу ыңғайлы.функциясы шектелген немесе шектелмеген аралықта болсын.функциясын интегралдық түрлендіру деп

өрнегінайтамыз, мұндабелгіліфункциясытүрлендірудіңядросыделінеді, оләрбіртүрлендіруүшінәртүрліболады.

ПрактикалықесептердеФурье, Лаплас, Меллин, Бессельтүрлендірулердіңтекинтегралдықтеңдеулердіңшешуүшінқажеттілерінғанакелтіреміз.

*1. Фурье түрлендіруі және оның интегралдық теңдеулерге қолданылуы.Фурьенің интегралдық түрлендіруі түсінігі.*

Белгілі функция және кез келген шенелген кесіндіде Дирихле шартын қанағаттандырса, онда математикалық анализ курсында

формуласының орынды екенін дәлелдейді. Егер үзіліссіз функция болса, онда

(1.1) теңдігін Фурьенің интегралдық формуласы, ал оның оң жағын Фурье интегралы деп айтады.

формуласын комплекс айнымалыүшін

түріндежазуғаболады. (1.2) теңдігінмынаекіөрнек

түріндежазуғаболады, бұлөрнектердіФурьетүрлендірулерідепайтады. МұндағысоңғыинтегралдыКошибойыншаинтегралдыңбасмәнімағынасындақабылдаймыз. Біріншітеңдіктіфункциянытуратүрлендіру, алекіншітеңдіктіккерітүрлендірудепайтады.

(1.1) интегралдықформуласынанФурьеніңсинусжәнекосинустүрлендірулеріналуғаболады:

Егераралығындатақфункцияболса, ондатақфункцияданаралығыбойыншаалынғанинтегралдыңнольгеайналатынынескерсек,

Бұдан

депбелгілеп,

өрнегіншығарамыз. БұлформулалардысәйкестүрдеФурьеніңтуражәнекерісинустүрлендірулерідепайтады;

б) Егерфункцияаралығындажұпболса, жоғарыдағыдайжолмен

депбелгілеп,

түріндегіФурьеніңкосинустүрлендіруіналамыз

*2. Фурьеніңинтегралдықтеңдеуі.*

Фурьеніңөзарақостүрлендіруініңәрбірінсолинтегралішіндегіфункцияныңтеңдеуі, алекіншісіноныңшешіміретіндеқарауғаболады. БұлжағдайдажоғарыдаталқылағанФредгольмтеоремаларыдұрысболмауымүмкін. МысалыФурьеніңкосинустүрлендіруінқарастырайық:

Бұлөрнектердібір-бірінеқоссақ,

теңдігішығады. Бұданжоғарғыайтылғаншарттардықанағаттандыратынфункциясынқалайалсақта

функциясы

интегралдықтеңдеуініңменшіктісанынасәйкесменшіктіфункциясыболады. Мәселенфункциясындепалсақ,

Демек,меншіктісанына (2.1) интегралдықтеңдеуінің

түріндегіпараметрлерінебайланыстыақырсызкөпшешімдержиынысәйкескелетінішығады, яғнипараметррангіліақырлысанемес.

1Мысал. Жұқаиілгішпластинканыңтербелуітуралыесептіңшешімімынаинтегралдықтеңдеуге

келеді, мұндабелгісіз функция, албелгілі функция. Бұл Фредгольмнің I-тектіинтегралдықтеңдеуі. Бұндадепайнымалылардыауыстырсақ, теңдеу

түрінекеледі. Оғанкерісинустүрлендірудіңформуласынқолданып,

өрнегіналамыз. Ендібұданбұрынғыайнымалыларғакөшсек,

жоғарыдағытеңдеудіңшешімінанықтаймыз.

ЯдроаргументтерініңайырымынабайланыстыФредгольмніңинтегралдықтеңдеуі. Мынадай

ядроаргументтерініңайрымынабайланыстыинтегралдықтеңдеудіқарастырайық. болсын.

Қарастырыпотырған (2.2) теңдеуініңекіжағынадаФурьетүрлендіруінқолдансақ,

бұдан

өрнегіналамыз. Егерболса, онда (2.2) теңдеуініңшешімін

түріндеанықтаймыз. Егерболса, онда (2.2) теңдеуініңжалпыжағдайдаабсолюттіинтегралданатыншешіміжоқболады.

Енді (2.3) өрнегінен

теңдігішығады. функциясынФурьеніңкерітүрлендіруіболсын. Сонда (2.4) өрнегініңоңжағы

пенфункцияларыныңұйысуы. Сондықтан (2.4) өрнегін

түрінде, яғни (2.2) теңдеуініңшешіміретіндежазуғаболады.

Ұсынылатын әдебиеттер

1. Орынбасаров, Ш. СақаевИнтегралдықтеңдеулер. Алматы «Білім» 1994.

2. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения М.

3. Краснов М.Л., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Устойчивость движения. Наука. 1964.

4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М. 1975.

5. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. М.1981.

6. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М. 1959.

7. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Гостехиздат. 1947.