Қазақстан Республикасы білім және ғылым министрлігі
Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті

Математика және ақпараттық технологиялар факультеті

Профессор Т.Ғ.Мұстафин атындағы алгебра, математикалық логика және геометрия кафедрасы

Ахажанов Сунгат Беркинович

«Құрылыс конструкцияларын есептеу әдістері» пәні бойынша Дәрістер курсы

білім беру бағдарламасы: «7М05402- Механика»

Қарағанды 2022

№1 дәріс. ***Құрылыс конструкциялар элементтерінің негізгі түсініктері.***

Жоспар:

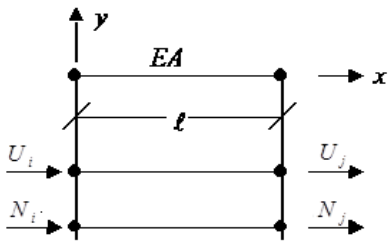
1. Өзектің ақырлы элементі.
2. Өзектік элементке әсер ететін таралған жүктемені түйіндік күштерге келтіру.
3. Өзектік конструкцияны есептеу алгоритмі.

Өзектің ақырлы элементі

Кез келген үздіксіз шаманы (қысым, температура және т.с.с.) бөлек элементтерден тұратын модельмен аппроксимациялау әдістің негізгі идеясы болып табылады. Қарастырылатын уздіксіз шама әр элементте бөлшектік - үздіксіз функциямен аппраксимацияланады, аталған функция қарастырылатын элементтің ақырғы нүктелер санындағы зерттелінетін үздіксіз шаманың мәндері арқылы құрылады.

Жалпы жағдайда, үздіксіз шама алдын ала белгісіз болады, сондықтан аймақтық кейбір ішкі нүктедегі сол шаманың мәндерін анықтау керек. Егер аймақтың кейбір ішкі нүктесіндегі («түйін») шаманың сандық мәндері белгілі болса, дискретті модельді құру қиындық туғызбайды.

Түзудің бойында жатқан өзектен бір ақырлы элементті бөліп алып, оны жеке қарастырайық (1.1-сурет). Оның бастапқы түйінін *i*-деп, ал соңғы түйінін *j*-деп белгілейміз. Бұл элементтің ұзындығы ℓ, ал созылу (қысылу) қатаңдығы *EA* (*E*-өзектің материалының серпімділік модулі; *A* - көлденең қиманың ауданы).



1.1-сурет. Өзектің ақырлы элементі

Бөлініп алынған элементтің деформациялық күйі бойлық жылжулар (U_i, U_j), ал кернеулік күйі бойлық күштер (N_i, N_j) арқылы анықталады. Осы аталған екі күйдің арасындағы негізгі тәуелділікті анықтау үшін материалдар кедергісі курсында қарастырылған өзектің потенциалдық энергиясының өрнегін қолданамыз:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \frac{N^2 dx}{EA} \tag{1.1}$$

Осы өрнектегі бойлық күш (N) Гук заңымен анықталады:

$$N = EA \cdot \varepsilon = EA \cdot \frac{dU}{dx}, \tag{1.2}$$

мұнда ε - салыстырмалы деформация; $U(x)$ - бойлық жылжулар функциясы.

Ақырлы элемент (1.1-сурет) тепе-теңдікте болғандықтан (сыртқы күштер әсер етпегендіктен), оның тепе-теңдік дифференциалдық теңдеуі мына түрде жазылады:

$$\frac{dN}{dx}=0,\ EA\frac{d^2U}{dx^2}=0 \tag{1.3}$$

(1.3) теңдеуді интегралдау арқылы бойлық жылжулар функциясын мына түрде жазамыз:

$$U(x)=\alpha_1+\alpha_2 x \tag{1.4}$$

Тұрақты белгісіздерді (α_1,α_2) шекаралық шарттардан (1.1-сурет) анықтаймыз:

$$\begin{aligned}
&U(0)=U_i:\ \ U_i=\alpha_1\\
&U(\ell)=U_j:\ \ U_j=U_i+\alpha_2\ell\\
&\alpha_1=U_i,\\
&\alpha_2=\frac{U_j-U_i}{\ell}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Осы (1.5) мәндерді (1.4) өрнегіне қоямыз:

$$\begin{aligned}
&U(x)=U_i\left(1-\frac{x}{\ell}\right)+U_j\frac{x}{\ell}=q_1(x)U_i+q_2(x)U_j\\
&q_1(x)=1-\frac{x}{\ell},\quad q_2(x)=\frac{x}{\ell},
\end{aligned} \tag{1.6}$$

мұнда $q_1(x),q_2(x)$ - ақырлы элементтің координаттық функциялары.

Бойлық жылжулар функциясын (1.6) векторлық түрде жазуға болады:

$$\begin{aligned}
&U(x)=\vec{q}^{\,T}\cdot\vec{V},\\
&\vec{q}^{\,T}=|q_1,q_2|,\\
&\vec{V}=\begin{vmatrix}U_i\\U_j\end{vmatrix},
\end{aligned} \tag{1.7}$$

мұнда $\vec{q}^{\,T}$ - транспонирленген координаттық функциялар векторы; $\vec{V}$ - элементтің түйіндер жылжулар векторы.

Енді (1.7) және (1.2) формулаларын ескере отырып, элементтің потенциалдық энергиясын (1.1) мына түрде анықтаймыз:

$$\begin{aligned}
&U=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\frac{N^T\cdot N}{EA}dx=\frac{\vec{V}^T}{2}\cdot K\cdot\vec{V},\\
&K=\int_0^{\ell}\left(\frac{d\vec{q}}{dx}\right)(EA)\left(\frac{d\vec{q}}{dx}\right)^T dx
\end{aligned}, \tag{1.8}$$

мұнда K - элементтің қатаңдық матрицасы.

Ақырлы элементтің түйіндік күштерінің жұмысы былайша анықталады:

$$A=\frac{1}{2}\vec{V}^T\cdot\vec{F},\ \ \vec{F}=\begin{vmatrix}N_i\\N_j\end{vmatrix} \tag{1.9}$$

Қарастырылып отырған ақырлы элемент тепе-теңдікте болғандықтан, (1.8) және (1.9) формулаларды теңестіреміз:

$$A = U: \quad \frac{1}{2}\vec{V}^T \cdot \vec{F} = \frac{\vec{V}^T}{2} K \cdot \vec{V}$$

Осы теңдеуден кернеулік және деформациялық күйлердің арасындағы негізгі тәуелділік алынады:

$$\vec{F} = K \cdot \vec{V} \tag{1.10}$$

Қатаңдық матрицасының (1.8) элементтерін мына формула бойынша анықтаймыз:

$$K_{ij} = \int_0^{\ell} \left(\frac{dq_i}{dx} \right) (EA) \left(\frac{dq_j}{dx} \right) dx \tag{1.11}$$

$$i, j = 1,2$$

Элементтің координаттық функцияларынан (1.6) туынды алып, (1.11) формуласы бойынша қатаңдық матрицаны табамыз:

$$K = \frac{E \cdot \alpha}{l^2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \alpha = \int_0^{\ell} A dx \tag{1.12}$$

Егер $A = A_0 = const,$, онда $\alpha = A_0 \cdot l$.

Сөйтіп, ақырлы элементтің көлденең қимасының ауданы тұрақты болса, онда осы элементтің қатаңдық матрицасы былайша анықталады:

$$K = \frac{EA}{\ell} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \tag{1.13}$$

Бойлық жылжулар функциясын (1.6) қолдана отырып, бойлық күшті (1.2) жалпы жағдайда былайша жазуға болады:

$$N = \frac{E \cdot \alpha}{\ell^2} (U_j - U_i), \tag{1.14}$$

Егер $A = const, \alpha = A \cdot \ell$.

Ақырлы элементтер әдісін күрделі өзекті есептеуге қолданғанда негізгі тәуелділікті (1.10) блок түрінде көрсеткен дұрыс болады.

$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_j \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} S_{ii} & S_{ij} \\ S_{ji} & S_{jj} \end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

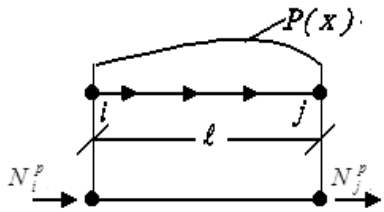
$$S_{ii} = S_{jj} = -S_{ij} = -S_{ji} = S; \; S = \frac{E \cdot \alpha}{\ell^2}$$

Ал бөлініп алынған элементте пайда болатын бойлық күшті (1.14) формуласы бойынша анықтау керек.

Өзектік элементке әсер ететін таралған жүктемені түйіндік күштерге келтіру.

Есептің шарты бойынша жайылған күшті есепке алу керек болса, өзектің тура ось бойына әсер етуі, оны эквиваленттік элементтің шоғырланған күшпен түйінге қойылуын ауыстыру қажет. Өзекті элементтің бойына тең жайылған қарқынды күшті екі шоғырланған күштермен ауыстырылады. Түйінге қойылады, біркелкі жайылған және шоғырланған күштің жұмысы деформацияда бірдей болады: Осы жағдайда екі түйіндік күштерге келтіріледі.

Бөлініп алынған элементке қарқындылығы $P(x)$ жайылған жүктеме әсер етіп тұр деп санайық (1.2-сурет).



1.2-сурет. Жайылған жүктеме

Осы жүктеменің әсерін түйіндік күштермен (N_i^p, N_j^p) алмастыру үшін жүктеменің жұмысын қолданамыз:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} U^T(x)\cdot P(x)dx \qquad (1.16)$$

Осы өрнекке (1.7) формуласын енгізсек, онда

$$T = \frac{\vec{V}^T}{2}\cdot\vec{P}, \quad \vec{P} = \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \end{vmatrix}, \quad P_i = \int_0^{\ell} P(x)q_i(x)dx, \qquad (1.17)$$

мұнда $i = 1,2$; $\vec{P}$- сыртқы түйіндер күштер векторы; $q_i(x)$- координаттық функциялар (1.6); $N_i^p = P_1, N_j^p = P_2$- түйіндік күштер мәндері.

Таралған жүктемелердің әсер етуінің кейбір жағдайларын қарастырайық:
а) Егер таралған жүктеменің қарқындылығы тұрақты болса, онда:

$$N_i^p = P_1 = \frac{P_0\ell}{2}, \quad N_i^p = P_2 = \frac{P_0\ell}{2} \qquad (1.18)$$

б) Егер таралған жүктеменің қарқындылығы белгілі заңдылықпен $P(x) = P_0\dfrac{x}{\ell}$ өзгерсе, онда:

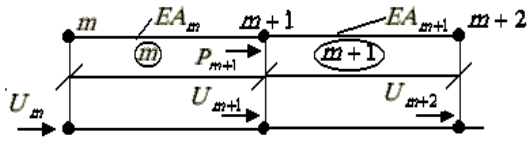
$$N_i^p = P_1 = P_0\int_0^{\ell}\frac{x}{\ell}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)dx = \frac{P_0\ell}{6}, \qquad (1.19)$$

$$N_j^p = P_2 = P_0\int_0^{\ell}\frac{x}{\ell}\cdot\frac{x}{\ell}dx = \frac{P_0\ell}{3}$$

Сөйтіп, қарқындылығының өзгеру заңдылығы белгілі жүктемені (1.17) формуласын қолдану арқылы $N_i^p = P_1$, $N_j^p = P_2$ түйіндік күштермен алмастыруға болады.

Өзектік конструкцияны есептеу алгоритмі

Күрделі өзектік жүйеден іргелес екі элементін бөліп алып, жеке қарастырайық (1.3-сурет).



1.3-сурет. Өзектің жүйенің іргелес ақырлы элементтері

Іргелес элементтердің нөмірлері дөңгелек ішінде көрсетілген. Түйіндер жылжулары (U_m, U_{m+1}, U_{m+2}) бойынша қабылданып алынған. $m+1$ түйініне P_{m+1} белгілі күш әсер ететіні көрсетілген. Іргелес ақырлы элементтер қималарының аудандары болып A_m, A_{m+1} табылады.

Өзектің бойлық жылжулары (U_m, U_{m+1}, U_{m+2}) бойындағы тепе-теңдік теңдеулерін құру үшін (1.7) формуласы бойынша элементтердің түйіндік жылжулар векторын табамыз:

$$\vec{V}^{(m)} = \begin{vmatrix} U_m \\ U_{m+1} \end{vmatrix}, \ \vec{V}^{(m+1)} = \begin{vmatrix} U_{m+1} \\ U_{m+2} \end{vmatrix} \tag{1.20}$$

Ақырлы элементтердің қатаңдық матрицаларын (1.13) формуласы бойынша анықтаймыз:

$$K^{(m)} = \frac{EA_m}{\ell_m} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \ K^{(m+1)} = \frac{EA_{m+1}}{\ell_{m+1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \tag{1.21}$$

Негізгі тәуелділікті (1.10) $m+1$ түйініне қолданамыз:

$$\vec{F}_2^{(m)} + \vec{F}_1^{(m+1)} = P_{m+1}: \ K_2^{(m)} \vec{V}^{(m)} + K_1^{(m+1)} \vec{V}^{(m+1)} = P_{m+1}, \tag{1.22}$$

мұндағы төменгі индекстер $m+1$ түйінінің жылжуының (1.20) формуласы бойынша табылған реттік нөмірлерін көрсетеді.

Бұл теңдеу U_{m+1} жылжу бойындағы элементтің тепе-теңдік теңдеуі болып табылады. Осы теңдеуді (1.20), (1.21) өрнектерін қолдана отырып былайша жазуға болады:

$$-\frac{EA_m}{\ell_m} U_m + \left(\frac{EA_m}{\ell_m} + \frac{EA_{m+1}}{\ell_{m+1}} \right) U_{m+1} - \frac{EA_{m+1}}{\ell_{m+1}} U_{m+2} = P_{m+1}, \tag{1.23}$$

мұнда m - берілген өзектің элементтер саны.

Өзектің бастапқы түйініне қолдану үшін $m = 0; A_0 = 0$, онда (1.23):

$$\frac{EA_1}{\ell_1} U_1 - \frac{EA_1}{\ell_1} U_2 = P_1 \tag{1.24}$$

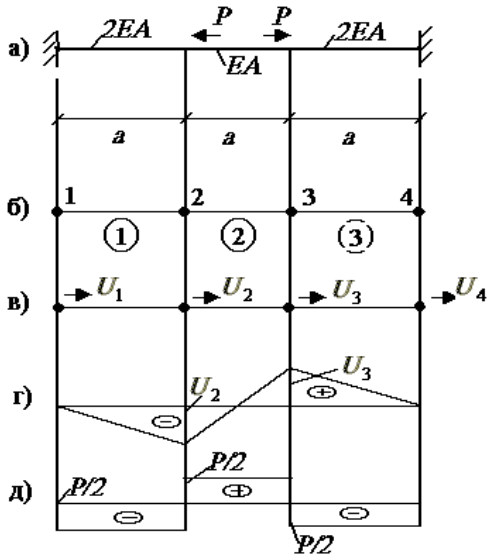
Өзектің соңғы түйініне қолдану үшін $m = n; A_{n+1} = 0$, онда (1.23):

$$-\frac{EA_n}{\ell_n} U_n + \frac{EA_n}{\ell_n} U_{n+1} = P_{n+1} \tag{1.25}$$

Өзектің аралық түйініне (1.23) теңдеуі бірден қолданылады.

Енді өзекті ақырлы элементтер әдісімен есептеу алгоритмін мысал түрінде көрсетейік.

Екі шеті бекітілген өзектің (1.4-сурет) деформациялық және кернеулік күйлерін анықтау керек. Өзекке екі күш әсер етіп, оның көлденең қимасының ауданы сатылы түрде өзгереді.



1.4-сурет. Екі шеті қатты бекітілген өзек

Өзекті ақырлы элементтер әдісімен былайша есептейміз:

1) Өзектің бастапқы үлгісі (1.4.а -сурет) көрсетілген.

2) Өзекті ақырлы элементтерге бөліп, оның элементтерін және түйіндерін нөмірлейміз (1.4.б-сурет).

3) Түйіндер жылжуларының бағыттарын қабылдап аламыз (1.4.в-сурет).

4) Түйіндердің тепе-теңдік теңдеулерін (1.23) бойынша құрамыз:

$$\begin{aligned} m=1:\ & -\frac{2EA}{a}U_1+\left(\frac{2EA}{a}+\frac{EA}{a}\right)U_2-\frac{EA}{a}U_3=-P \\ m=2:\ & -\frac{EA}{a}U_2+\left(\frac{EA}{a}+\frac{2EA}{a}\right)U_3-\frac{2EA}{a}U_4=P \end{aligned} \tag{1.26}$$

5) Байланыстарды ескеру арқылы ($U_1=0, U_4=0$) құрылған теңдеулерден (1.26) шешуші теңдеулер жүйесі алынады:

$$\begin{aligned} & \frac{3EA}{a}U_2-\frac{EA}{a}U_3=-P, \\ & -\frac{EA}{a}U_2+\frac{3EA}{a}U_3=P \end{aligned} \tag{1.27}$$

Шешуші теңдеулер жүйесінен түйіндік бойлық жылжулар анықталады:

$$U_2=-\frac{P\cdot a}{4EA},\quad U_3=\frac{P\cdot a}{4EA} \tag{1.28}$$

(1.28) арқылы өзектің деформациялық күйі табылады (1.4.г-сурет).

6) Элементтердің бойлық күштері (1.14) фомуласы бойынша табылады:

$$\begin{aligned} N^{(1)} &= \frac{2EA}{a}(U_2-U_1)=-\frac{P}{2}, \\ N^{(2)} &= \frac{EA}{a}(U_3-U_2)=\frac{P}{2}, \\ N^{(3)} &= \frac{2EA}{a}(U_4-U_3)=-\frac{P}{2} \end{aligned} \tag{1.29}$$

(1.29) арқылы өзектің кернеулік күйі анықталады (1.4.д-сурет).

Негізгі әдебиеттер:

1. Андреев В.Б. Лекции по методу конечных элементов: учебное пособие. -М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова МАКС Пресс, 2010. - 2-е изд., испр. и доп. - 264 с.

2. Карпиловский В.С. Метод конечных элементов и задачи теории упругости. – Киев: «Софія А», 2022. – 275 с.

3. Трушин С.И. Строительная механика: метод конечных элементов: учебное пособие. – Москва: Изд-во НИЦ ИНФРА-М, 2019. – 305 с.

4. Ахажанов С.Б., Нурланова Б.М. Конструкция есебін автоматтандыру: оқу құралы. – Қарағанды: «Типография Арко» ЖШС баспасы, 2020. – 135 бет.

5. Тухфатуллин Б.А. Численные методы расчёта строительных конструкций: учебное пособие. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2017. – 100 с.

6. Тұрсынов К.А. Құрылыс механикасындағы ақырлы элементтер әдісі: оқу құралы.-Қарағанды: ҚарМУ,2004.-53 б.

7. Елешова А.Е. Ақырлы элементтер әдісі: оқу құралы.-Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 2010.-129 б.

8. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред.- М.: Недра, 1974. – 240 с.

Қосымша әдебиеттер:

1. Жадрасынов Н.Т., Винокуров Л.П. Құрылыс механикасы. - Қарағанды: ҚарМТУ, 2001. - 224 б.

2. Байнатов Ж. Құрылыс механикасы (ғимараттарды динамикаға, сейсмикаға және тұрақтылыққа есептеу). - Алматы: Республикалық баспа кабинеті, 1996. - 235 б.

3. Түсіпов А. Құрылыс механикасының негіздері. - Алматы: Қазақ ұлттық техникалық университеті, 1995. - 121 б.

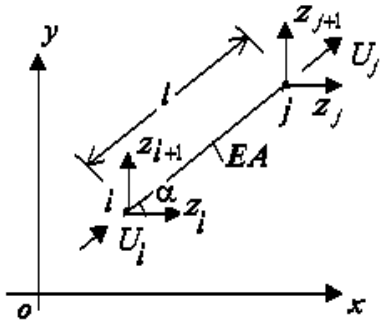
№2 дәріс. ***Конструкцияның сызықтық серпімді элементі.***

Жоспар:

1. Сызықтық серпімді элементтің қатаңдық матрицасы.
2. Жазықтықтағы өзектік конструкцияны есептеу алгоритмі.
3. Фермалық конструкцияның түйіндік жылжулары мен бойлық күштері.

Сызықтық серпімді элементтің қатаңдық матрицасы

Кел келген өзектің жүйеден бір ақырлы элементі бөліп алып, оны координаттық жүйеде (xoy) қарастырайық (1.5-сурет).



2.1-сурет. Сызықтық серпімді элемент

Бұл элементтің түйіндірінің жылжуларын $z_i, z_{i+1}, z_j, z_{j+1}$ деп белгілеп, оларды өзектің өсіне проекциалау арқылы ескі және жаңа жылжулар арасындағы тәуелділікті анықтаймыз:

$$U_i = z_i \cos\alpha + z_{i+1} \sin\alpha,$$
$$U_j = z_j \cos\alpha + z_{j+1} \sin\alpha \qquad (2.1)$$

Осы тәуелділікті векторлық түрде жазамыз.

$$\underbrace{\begin{vmatrix} U_i \\ U_j \end{vmatrix}}_{\bar{V}} = \underbrace{\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} z_i \\ z_{i+1} \\ z_j \\ z_{j+1} \end{bmatrix}}_{\bar{z}}, \qquad (2.2)$$

мұнда $\bar{V}$ - элементтің жергілікті жүйедегі түйіндік жылжулар векторы; C - түрлендіру матрицасы; $\bar{z}$ - элементтің жазықтықтағы түйіндік жылжулар векторы.

Негізгі тәуелділікті (1.10) сол жағынан C^T - матрицасына көбейтіп және (2.1) қолданып, оны мына түрге келтіреміз:

$$\underbrace{C^T \cdot \vec{F}}_{\vec{R}} = \underbrace{C^T \cdot K \cdot C \cdot \bar{z}}_{S}, \ \vec{R} = S \cdot \bar{z}, \qquad (2.3)$$

мұнда $\vec{R}$- элементтің түйіндік күштер векторы; S - элементтің қатаңдық матрицасы.

(2.3) өрнекті элементтің жазықтықтағы негізгі тәуелділігі деп атаймыз.

Элементтің көлденең қимасының ауданы өзгермейтін (тұрақты) болса, онда (1.13) және (2.2) қолданып қатаңдық матрицасын табамыз:

$$S=\frac{EA}{\ell}\begin{vmatrix}\cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha\\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha\\ -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha\\ -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha\end{vmatrix} \qquad (2.4)$$

Негізгі тәуелділікті (2.3) блок түрінде былайша жазылады:

$$\begin{bmatrix}\vec{R}_i\\ \vec{R}_j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{ii} & S_{ij}\\ S_{ji} & S_{jj}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}z_i\\ z_j\end{bmatrix},$$

$$\vec{R}_i=\begin{vmatrix}R_i\\ R_{i+1}\end{vmatrix};\ \vec{z}_i=\begin{vmatrix}z_i\\ z_{i+1}\end{vmatrix}, \qquad (2.5)$$

$$\vec{R}_j=\begin{vmatrix}R_j\\ R_{j+1}\end{vmatrix};\ \vec{z}_j=\begin{vmatrix}z_j\\ z_{j+1}\end{vmatrix},$$

$$S_{ii}=S_{jj}=-S_{ij}=-S_{ji}=\frac{EA}{\ell}\begin{vmatrix}\cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha\\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha\end{vmatrix},$$

мұнда $\vec{R}_i, \vec{R}_j$ - сәйкесінше элементтің i және j - түйіндік күштер векторы; $\vec{z}_i, \vec{z}_j$ - элементтің i және j - түйіндік жылжулар векторы; S_{ii} - i түйініндегі $z_i=1$ жылжуынан пайда болатын қатаңдық коэффициенттер матрицасы; S_{jj} - j түйініндегі $z_i=1$ жылжуынан пайда болатын қатаңдық коэффициенттер матрицасы.

Өзекте пайда болатын бойлық күш былайша табылады:

$$N=\frac{EA}{\ell}\left[(z_j-z_i)\cos\alpha+\left(z_{j+1}-z_{i+1}\right)\sin\alpha)\right] \qquad (2.6)$$

Сөйтіп, қатаңдық матрицасындағы бірінші индекс орынды, ал екінші индекс себепті көрсетеді.

Егер элементтің түйіндерінің координаталары (x_i, y_i, x_j, y_j) белгілі болса, онда элементтің ұзындығы мен бағыттауыш косинустары келесі түрде анықталады:

$$\ell=\sqrt{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2} \qquad (2.7)$$

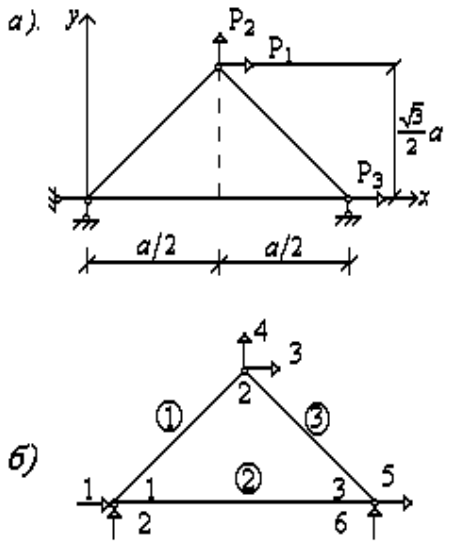
$$\cos\alpha=\frac{x_j-x_i}{\ell},\ \sin\alpha=\cos(90^0-\alpha)=\frac{y_j-y_i}{\ell} \qquad (2.8)$$

Жазықтықтағы элементтің (2.1-сурет) негізгі тәуелділігін (2.5) қолдану арқылы өмірде жиі кездесетін өзектік жүйелерді (ферма, мұнаралар, т.б.) есептеуге болады. Олардың шешуші теңдеулер жүйесі былайша алынады $\vec{R}\to\vec{P}$, $S\to A$, $\vec{z}\to\vec{u}$, мұндағы $\vec{P}$ - жүйенің сыртқы күштер векторы, A - оның қатаңдық матрицасы, $\vec{u}$ - оның түйіндер жылжулар векторы.

Жазықтықтағы өзектік конструкцияны есептеу алгоритмі

Өзектік жүйені есептеу алгоритмін мысал түрінде қарастырайық.

Мысал. Берілген фермаға (2.2.а-сурет) үш күш (P_1, P_2, P_3) әсер етеді. Осы ферманың деформациялық және кернеулік күйін анықтау керек. Ферма үш өзектен тұрады, олардың көлденең қималарының ауданы тұрақты $EA=const$.



2.2-сурет. Ферма

Ферманы ақырлы элементтер әдісімен есептеу алгоритмі:

1) Ферманы ақырлы элементтерге бөліп, оның элементтерін, түйіндерін нөмірлейміз және түйіндік жылжулар бағыттарын қабылдап аламыз (2.2.б-сурет).

2) Элементтердің ұзындығын және олардың орналасу реттерін көрсететін кестені құрамыз (кесте 2.1).

Кесте 2.1

Ферманың элементтерінің орналасуы

Элемент	Ұзындық	Түйін		Координаталар			
		i	j	x_i	x_j	y_i	y_j
1	a	1	2	0	$\frac{a}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$
2	a	1	3	0	a	0	0
3	a	2	3	$\frac{a}{2}$	a	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	0

3) Элементтердің ұзындықтарын және бағыттауыш косинустарды (2.7), (2.8) бойынша табамыз:

$$\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = a$$
$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{2};\ \cos\alpha_2 = 1;\ \cos\alpha_3 = \frac{1}{2} \qquad (2.9)$$
$$\sin\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \sin\alpha_2 = 0;\ \sin\alpha_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4) (2.9) өрнекті ескеру арқылы (2.4) бойынша элементтердің қатаңдық матрицалары анықталады.

5) Элементтер үшін түйіндік жылжулар векторлары былайша құрылады:

$$z^{(1)} = \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{vmatrix}, \quad z^{(2)} = \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_5 \\ z_6 \end{vmatrix}, \quad z^{(3)} = \begin{vmatrix} z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{vmatrix} \tag{2.10}$$

Фермалық конструкцияның түйіндік жылжулары мен бойлық күштері

1) Байланыстарды $z_1 = z_2 = z_6 = 0$ және (2.9) ескере отырып, элементтер бойынша құрылған қатаңдық матрицаларымен негізгі тәуелділікті (2.3) қолданып, шешуші теңдеулер жүйесін келесі түрде жазамыз:

$$\begin{aligned} z_3: &\quad R_3^{(1)} + R_1^{(3)} = P_1: \; S_3^{(1)} z^{(1)} + S_1^{(3)} z^{(3)} = P_1 \\ z_4: &\quad R_4^{(1)} + R_2^{(3)} = P_2: \; S_4^{(1)} z^{(1)} + S_2^{(3)} z^{(3)} = P_2 \\ z_5: &\quad R_3^{(2)} + R_3^{(3)} = P_3: \; S_3^{(2)} z^{(1)} + S_3^{(3)} z^{(3)} = P_3 \end{aligned} \tag{2.11}$$

2) (2.11) шешуші теңдеулер жүйесінен түйіндер жылжуларын анықтаймыз:

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{a}{12EA}\left[27P_1 - \sqrt{3}P_2 + 6P_3\right] \\ z_4 &= \frac{a}{12EA}\left[-\sqrt{3}P_1 + 9P_2 - 2\sqrt{3}P_3\right] \\ z_5 &= \frac{a}{12EA}\left[6P_1 - 2\sqrt{3}P_2 + 12P_3\right] \end{aligned} \tag{2.12}$$

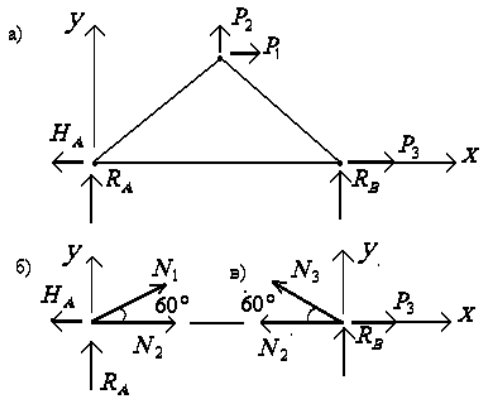
Осы жыжулар арқылы берілген ферманың деформациялық күйі анықталады.

3) Ферманың элементтеріндегі бойлық күштерді (2.6) бойынша анықтаймыз

$$\begin{aligned} N^{(1)} &= \frac{EA}{a}\left(z_3 \cos\alpha_1 + z_4 \sin\alpha_1\right) = P_1 + \frac{P_2}{\sqrt{3}} \\ N^{(2)} &= \frac{EA}{a} z_5 \cos\alpha_2 = \frac{P_1}{2} - \frac{P_2}{2\sqrt{3}} + P_3 \\ N^{(3)} &= \frac{EA}{a}\left[\left(z_5 - z_3\right)\cos\alpha_3 - z_4 \sin\alpha_3\right] = -P_1 + \frac{P_2}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Осы күштер арқылы ферманың кернеулік күйі анықталады.

Енді алынған нәтижелердің дұрыстығын тексеру үшін, берілген ферманы теориялық механика әдісімен есептеп көрелік. Ферманы байланыстардан босатып, олардың реакцияларын анықтаймыз (2.3.а-сурет).



2.3-сурет. Фермалық конструкция

Статиканың тепе теңдік теңдеулерін қолданамыз:

$$1)\ \sum F_{kx} = 0 \quad -H_A + P_1 + P_3 = 0$$

$$H_A = P_1 + P_3$$

$$2)\ \sum M_A = 0 \quad R_B \cdot a - P_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a + P_2 \frac{a}{2} = 0$$

$$R_B = P_1 \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{P_2}{2}$$

$$3)\ \sum F_{ky} = 0 \quad R_A + R_B + P_2 = 0$$

$$R_B = P_1 \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{P_2}{2}$$

Ферманың A түйінін қиып алып (2.3.б-сурет), оның тепе-теңдік теңдеулерінен бойлық күштерді (N_1, N_2) табамыз:

$$\sum F_{ky} = 0: \quad R_A + N_1 \cos 30° = 0;\ N_1 = \frac{P_2}{\sqrt{3}} + P_1$$

$$\sum F_{kx} = 0: \quad N_2 + N_1 \cos 60° - H_A = 0;\ N_2 = \frac{P_1}{2} - \frac{P_2}{2\sqrt{3}} + P_3 \qquad (2.14)$$

Осы ферманың B түйінінің тепе-теңдігінен (2.3.в-сурет) N_3 күші анықталады:

$$\sum F_{ky} = 0: \quad R_B + N_3 \cos 30° = 0;\ N_3 = \frac{P_2}{\sqrt{3}} - P_1 \qquad (2.15)$$

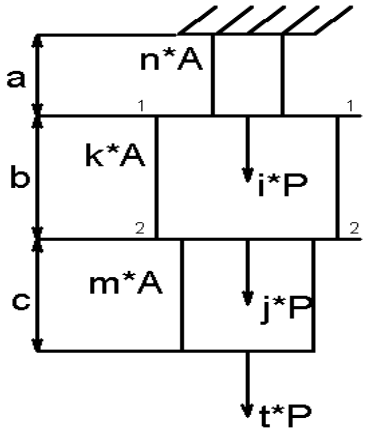
Осы нәтижелерді (2.14) және (2.15) ақырлы элементтер әдісімен алынған нәтижелермен (2.13) салыстырып, олардың бірдей екеніне көзімізді жеткізуге болады. Сондықтан, ақырлы элементтер әдісі есептің нақты шешімін береді. Бұл әдістің басқа әдістерге қарағандағы айырмашылығы: деформациялық және кернеулік күйлері анықталып, өте күрделі өзектік жүйені есептеуге болады. Статикалық анықталған немесе анықталмаған өзектік жүйе бір жолмен есептеледі. Кез келген түрде бекітілген өзектік жүйеге есептеу жүргізуге болады.

Ұқсастық функциясы элементтің шегінде еркін нүктедегі интерполяция координатасы үшін де қолданылады. Егер интерполяция координатасы үшін және орын ауыстыруда сол түйіндер қолданылса және сол интерполяциялық функциялар болса, онда бұл элемент изопараметрлік элемент деп аталады. Изопараметрлік элементтер программаны өңдеу кезіндегі көпшілігі ыңғайлы анықтаушы күштің таралуын алған.

Функция формасының физикалық мағынасы: ақырлы элементтің деформациясы түйіндік жылжулардың әсерінде.

Мысал. Материалы болат өзектік жүйені қарастырайық (2.4-сурет). Оның серпімділік модулі $E = 2 \cdot 10^5\ МПа$. Өзектік жүйе P бойлық күшінің және өзіндік салмақтың әсерінде тұр (болаттың өзіндік салмағы 78кН/м^3). Бастапқы берілгендердің жалпы түрі кесте 2.2 және кесте 2.3 көрсетілген. Өзектің

кернеулік-деформациялық күйін анықтап және жылжулардың, ішкі күштердің, нормалдық кернеулердің эпюраларын тұрғызу қажет.



2.4-сурет. Сатылы түрдегі өзек

Кесте 2.2

Бастапқы берілгендер

Нұсқаның 1-ші цифры	i	j	t	n	k	m	Жылжулар
0	1	0	0	1	1	3	2-2
1	1	0	0	1	3	2	1-1
2	0	1	0	2	3	1	1-1
3	0	0	1	1	2	3	1-1
4	1	0	0	2	1	3	1-1
5	0	1	0	3	2	1	1-1
6	0	0	1	3	1	2	2-2
7	1	0	0	1	3	3	2-2
8	0	1	0	2	3	3	2-2
9	0	0	1	3	2	2	2-2

Кесте 2.3

Бастапқы берілгендер

Нұсқаның 2-ші цифры	A, $см^2$	a, м	b, м	c, м	P, Н
0	20	3,0	2,1	2,0	2000
1	11	2,1	3,0	1,1	1100
2	12	2,2	2,9	1,2	1200
3	13	2,3	2,8	1,3	1300
4	14	2,4	2,7	1,4	1400
5	15	2,5	2,6	1,5	1500

6	16	2,6	2,5	1,6	1600
7	17	2,7	2,4	1,7	1700
8	18	2,8	2,3	1,8	1800
9	19	2,9	2,2	1,9	1900

Бұл есептің жалпы нұсқасының ішінен бір нұсқаны (Мысал) таңдап алайық. Оның бастапқы берілгені мен мәндері келесі кесте 2.4 түрінде болады.

Кесте 2.4

2-2 нұсқа

Бастапқы берілгендер	Мәндері	Өлшем бірлігі
i	0.00	—
j	1.00	—
t	0.00	—
n	2.00	—
k	3.00	—
m	1.00	—
A	12.00	$см^2$
a	2.20	м
b	2.90	м
c	1.20	м
P	1 200.00	Н
γ	78 000.00	$\frac{Н}{м^3}$
E	200 000.00	МПа

Енді осы берілген өзектік жүйенің кернеулік-деформациялық күйін анықтау үшін фортран тілінде бағдарлама құрамыз. Ол келесі түрде жүзеге асырылады:

1) Өзектік жүйені элементтерге бөліп, түйіндерін белгілейміз.
2) Түйіндік жылжулар бағыттарын қабылдап аламыз.
3) Байланыстардың және сыртқы күштердің орындары анықталады.
4) Негізгі параметрлер анықталады: N-өзектің элементтерінің саны; IZ-түйіндер жылжуларының (еркіндік дәрежесі) саны; MP-қатты байланыстар саны; NP-шоғырланған күштер саны; A(IZ,IZ)-өзектің жалпы қатаңдық матрицасы; AK(2,2)-өзектің ақырлы элементінің қатаңдық матрицасы; RM(2,N)-ақырлы элементтердің созылу (қысылу) қатаңдығы мен өлшемдері; IM(2,N)-ақырлы элементтердің топологиясы; JP(MP)-қатты байланыстар жылжуларының нөмірлерінің массиві; BP(NP)-сыртқы шоғырланған

күштердің мәндері; KP(NP)-сыртқы күштер түскен жылжуларының нөмірлерінің массиві.

5) 5.1-сурет бойынша бағдарламаға бастапқы берілгендер келесі түрде енгізіледі:

Parameter (N=3, IZ=4, MP=1, NP=1)

Data RM/4800000.,2.2, 7200000.,2.9, 2400000.,1.2/,

IM/1,2,2,3,3,4/, JP/1/, KP/3/, BP/1200./

6) Құрылған бағдарлама арқылы берілген өзектің (2.4-сурет) жылжуларының, бойлық күштерінің және нормалдық кернеулерінің эпюраларын оңай тұрғызуға болады.

7) Ақырлы элементтер әдісі бойынша құрылған бағдарламасы арқылы кез келген түрдегі өзектік жүйе есебін автоматтандыруға болады.

Негізгі әдебиеттер:

1. Андреев В.Б. Лекции по методу конечных элементов: учебное пособие. -М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова МАКС Пресс, 2010. - 2-е изд., испр. и доп. - 264 с.

2. Карпиловский В.С. Метод конечных элементов и задачи теории упругости. – Киев: «Софія А», 2022. – 275 с.

3. Трушин С.И. Строительная механика: метод конечных элементов: учебное пособие. – Москва: Изд-во НИЦ ИНФРА-М, 2019. – 305 с.

4. Ахажанов С.Б., Нурланова Б.М. Конструкция есебін автоматтандыру: оқу құралы. – Қарағанды: «Типография Арко» ЖШС баспасы, 2020. – 135 бет.

5. Тухфатуллин Б.А. Численные методы расчёта строительных конструкций: учебное пособие. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2017. – 100 с.

6. Тұрсынов К.А. Құрылыс механикасындағы ақырлы элементтер әдісі: оқу құралы.-Қарағанды: ҚарМУ,2004.-53 б.

7. Елешова А.Е. Ақырлы элементтер әдісі: оқу құралы.-Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 2010.-129 б.

8. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред.- М.: Недра, 1974. – 240 с.

Қосымша әдебиеттер:

1. Жадрасынов Н.Т., Винокуров Л.П. Құрылыс механикасы. - Қарағанды: ҚарМТУ, 2001. - 224 б.

2. Байнатов Ж. Құрылыс механикасы (ғимараттарды динамикаға, сейсмикаға және тұрақтылыққа есептеу). - Алматы: Республикалық баспа кабинеті, 1996. - 235 б.

3. Түсіпов А. Құрылыс механикасының негіздері. - Алматы: Қазақ ұлттық техникалық университеті, 1995. - 121 б.

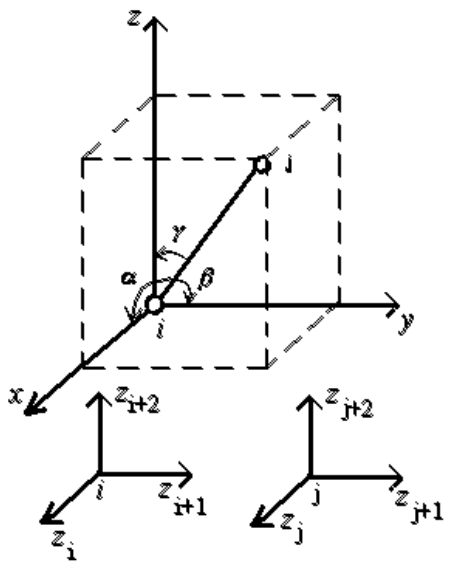
№3 дәріс. ***Кеңістіктегі өзектің ақырлы элементі.***

Жоспар:

1. Кеңістіктегі ақырлы элементтің қатаңдық матрицасы.
2. Кеңістіктегі өзектік жүйені ақырлы элементтер әдісімен есептеу алгоритмі.
3. Кеңістіктегі ферманың элементтеріндегі түйіндік жылжулар мен бойлық күштер.

Кеңістіктегі ақырлы элементтің қатаңдық матрицасы

Кез келген кеңістіктегі өзектік жүйеден бір ақырлы элементті бөліп алып, оны координаттық жүйеде (x, y, z) қарастырайық (3.1-сурет). Бұл элементтің түйіндерінің жылжулары болып $z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_j, z_{j+1}, z_{j+2}$ табылады. Олардың бағыттары 3.1-суретте көрсетілген.



3.1-сурет. Кеңістіктегі ақырлы элемент

Осы жылжулардың өзектің өсіндегі проекцияларының қосындысы өзектің бойлық жылжуларына тең болады:

$$\begin{aligned} u_i &= z_i \cos\alpha + z_{i+1} \cos\beta + z_{i+2} \cos\gamma \\ u_j &= z_j \cos\alpha + z_{j+1} \cos\beta + z_{j+2} \cos\gamma \end{aligned} \tag{3.1}$$

Бұл тәуелділікті векторлық түрде жазамыз:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}}_{\bar{V}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{bmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} z_i \\ z_{i+1} \\ z_{i+2} \\ z_j \\ z_{j+1} \\ z_{j+2} \end{bmatrix}}_{\bar{z}}, \tag{3.2}$$

мұнда $\vec{V}, \vec{z}$ - элементтің түйіндік жылжу векторы (жергілікті жүйедегі және кеңістіктегі); c - түрлендіру матрицасы.

Негізгі тәуелділікті (1.10) c^T матрицасына көбейту және (3.2) формуласын ескеру арқылы кеңістіктегі негізгі тәуелділікті алуға болады:

$$\underbrace{c^T \cdot \vec{F}}_{\vec{R}} = \underbrace{c^T \cdot K \cdot c}_{S} \cdot \vec{z}; \quad \vec{R} = S \cdot \vec{z} \tag{3.3}$$

Бұл тәуелділікті (1.13) және (3.2) бойынша блок түрінде жазамыз

$$\begin{bmatrix} \vec{R}_i \\ \vec{R}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} \\ S_{ji} & S_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{z}_i \\ \vec{z}_j \end{bmatrix}; S_{ii} = S_{jj} = -S_{ij} = -S_{ji} = A$$

$$A = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\gamma \\ \cos\beta\cos\alpha & \cos^2\beta & \cos\beta\cos\gamma \\ \cos\gamma\cos\alpha & \cos\gamma\cos\beta & \cos^2\gamma \end{bmatrix};$$

$$\vec{R}_i = \begin{vmatrix} R_i \\ R_{i+1} \\ R_{i+2} \end{vmatrix}; \ \vec{R}_j = \begin{vmatrix} R_j \\ R_{j+1} \\ R_{j+2} \end{vmatrix}; \ \vec{z}_i = \begin{vmatrix} z_i \\ z_{i+1} \\ z_{i+2} \end{vmatrix}; \vec{z}_j = \begin{vmatrix} z_j \\ z_{j+1} \\ z_{j+2} \end{vmatrix}, \tag{3.4}$$

мұнда $\vec{R}_i, \vec{R}_{i+1}, \vec{R}_{i+2}, \vec{R}_j, \vec{R}_{j+1}, \vec{R}_{j+2}$ - элементтің түйіндік күштер векторлары; $\vec{z}_i, \vec{z}_{i+1}, \vec{z}_{i+2}, \vec{z}_j, \vec{z}_{j+1}, \vec{z}_{j+2}$ - элементтің түйіндік жылжулар векторы; $S_{ii}, S_{jj}, S_{ij}, S_{ji}$ - элементтің қатаңдық матрицасының блоктары; A - қатаңдық матрицасының негізгі блогы (барлық блоктар осы матрица арқылы анықталады).

Элементтің бойлық күші (1.14) және (3.1) өрнектерін қолдану арқылы былайша анықталады:

$$N = \frac{EA}{\ell}\left[\left(z_j - z_i\right)\cos\alpha + \left(z_{j+1} - z_{i+1}\right)\cos\beta + \left(z_{j+2} - z_{i+2}\right)\cos\gamma\right] \tag{3.5}$$

Егер элементтің түйіндерінің координаталары $\left(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j\right)$ белгілі болса, онда оның ұзындығы және бағыттаушы косинустары келесідей болады:

$$\ell = \sqrt{\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2 + \left(z_j - z_i\right)^2} \tag{3.6}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_j - x_i}{\ell}, \cos\beta = \frac{y_j - y_i}{\ell}, \cos\gamma = \frac{z_j - z_i}{\ell}, \tag{3.7}$$

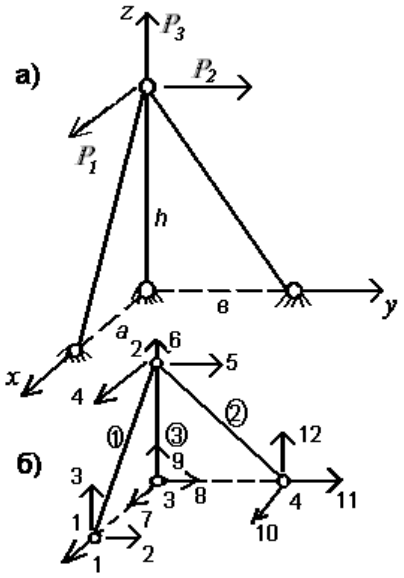
мұнда α, β, γ (3.1-сурет) - элементтің кеңістіктегі орнын анықтайтын бұрыштар.

Сөйтіп, ақырлы элемент кеңістікте болса, оның негізгі тәуелділігі (3.3), ал қатаңдық матрицасы болып (3.4) табылады. Қатаңдық матрицаның дәрежесі жергілікті жүйеде екіге, ал жазықтықта төртке және кеңістікте алтыға тең болады.

Кеңістіктегі өзектік жүйені ақырлы элементтер әдісімен есептеу алгоритмі

Кеңістіктегі өзектік жүйені есептеу алгоритмін мысал түрінде қарастырайық.

Мысал. Берілген кеңістіктегі ферманы (3.2.а-сурет) ақырлы элементтер әдісімен есептеу керек. Ферма үш өзектен тұрады, олардың көлденең қимасының ауданы ($A = const$) тұрақты болып табылады. Бұл фермаға үш күш (P_1, P_2, P_3) әсер тетеді.



3.2-сурет. Кеңістіктегі ферма

Есептеу келесі алгоритм бойынша жүзеге асырылады:

1) Ферманы ақырлы элементтерге бөліп, оның элементтерін және түйіндерін белгілейміз (3.2.б-сурет).

2) Түйіндік жылжулар бағыттарын қабылдап аламыз (3.2.б-сурет).

3) Элементтердің параметрлерін келесі кестеге енгіземіз (түйін нөмірлері, түйін координаталары, элемент ұзындығы).

Кесте 3.1

Кеңістіктегі ферманың элементтерінің орналасуы

Элемент	Ұзындық	Түйін		Координаталар					
		i	j	x_i	x_j	y_i	y_j	z_i	z_j
1	ℓ_1	1	2	a	0	0	0	0	h
2	ℓ_2	2	4	0	0	0	b	h	0
3	ℓ_3	2	3	0	0	0	0	h	0

4) Элементтердің ұзындықтарын және бағыттауыш косинустарды және (3.6) және (3.7) бойынша анықтаймыз

$$\ell_1 = \sqrt{a^2 + h^2};\ \ell_2 = \sqrt{b^2 + h^2};\ \ell_3 = h;$$

$$\cos\alpha_1 = -\frac{a}{\ell_1};\cos\alpha_2 = 0;\cos\alpha_3 = 0;$$

$$\cos\beta_1 = 0;\cos\beta_2 = \frac{b}{\ell_2};\cos\beta_3 = 0; \qquad (3.8)$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{h}{\ell_1};\cos\gamma_2 = -\frac{h}{\ell_2};\cos\gamma_3 = -1;$$

5) Элементтердің қатаңдық матрицалары (3.8) формуланы ескеру арқылы (3.4) бойынша анықталады.

Кеңістіктегі ферманың элементтеріндегі түйіндік жылжулар мен бойлық күштер

1) Элементтер үшін түйіндік жылжулар векторлары былайша құрылады:

$$z^{(1)} = \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{vmatrix},\ z^{(2)} = \begin{vmatrix} z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_{10} \\ z_{11} \\ z_{12} \end{vmatrix},\ z^{(3)} = \begin{vmatrix} z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \\ z_8 \\ z_9 \end{vmatrix} \qquad (3.9)$$

2) Бекіністерді $z_1 = z_2 = z_3 = z_7 = z_8 = z_9 = z_{10} = z_{11} = z_{12} = 0$ және (3.8) ескере отырып, элементтер бойынша құрылған қатаңдық матрицаларымен негізгі тәуелділікті (3.3) қолданып, шешуші теңдеулер жүйесін келесі түрде жазамыз:

$$z_4:\ R_4^{(1)} + R_1^{(2)} + R_1^{(3)} = P_1:\ S_4^{(1)} z^{(1)} + S_1^{(2)} z^{(2)} + S_1^{(3)} z^{(3)} = P_1$$

$$z_5:\ R_5^{(1)} + R_2^{(2)} + R_2^{(3)} = P_2:\ S_5^{(1)} z^{(1)} + S_2^{(2)} z^{(2)} + S_2^{(3)} z^{(3)} = P_2 \qquad (3.10)$$

$$z_6:\ R_6^{(1)} + R_3^{(2)} + R_3^{(3)} = P_3:\ S_6^{(1)} z^{(1)} + S_3^{(2)} z^{(2)} + S_3^{(3)} z^{(3)} = P_3$$

3) Шешуші теңдеулерден (3.10) түйіндер жылжуларын анықтаймыз ($a = b = h$).

$$z_4 = \frac{a}{EA}\left[P_1\left(1 + 2\sqrt{2}\right) + P_2 + P_3\right]$$

$$z_5 = \frac{a}{EA}\left[P_1 + \left(1 + 2\sqrt{2}\right)P_2 + P_3\right] \qquad (3.11)$$

$$z_6 = \frac{a}{EA}\left[P_1 + P_2 + P_3\right]$$

Осы жылжулар арқылы ферманың деформациялық күйі анықталады.

4) Ферманың элементтеріндегі бойлық күштерді (3.10) бойынша табамыз.

$$N^{(1)} = \frac{EA}{\ell_1}\left[-\frac{a}{\ell_1}z_4 + -\frac{h}{\ell_1}z_6\right] = -\sqrt{2}P_1$$

$$N^{(2)} = \frac{EA}{\ell_2}\left[-\frac{b}{\ell_1}z_5 + -\frac{h}{\ell_2}z_6\right] = -\sqrt{2}P_2 \qquad (312)$$

$$N^{(3)} = \frac{EA}{\ell_3}z_6 = P_1 + P_2 + P_3$$

Осы ішкі бойлық күштер арқылы ферманың кернеулік күйі анықталады.

Бұл күштердің мәні статика әдісімен анықталған күштермен бірдей, сондықтан алынған шешім дұрыс болып табылады.

Сөйтіп, кеңістіктегі ақырлы элементті қолдану арқылы өмірде жиі кездесетін күрделі өзектер жүйесін есептеуге болады.

Мысал. Серпімділі негіздегі арқалықтардың есептеуін автоматтандыру.

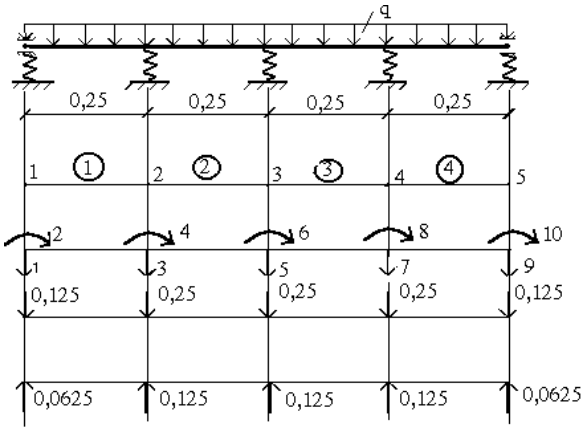
Бұл есепте, негізінен, жерде жатқан қатты арқалықты сыртқы күшпен басқан уақытта жердің әсері қалай болатынын көрсетуіміз керек (3.3-сурет). Есепті шығару үшін бағдарлама құру қажет. Ол үшін арқалықтың жартысын төрт элементке бөліп, түйіндерін, жылжуларын белгілейміз. Таралған күштерді шоғырланған күштерге келтіреміз. Серіппені де күш сияқты алмастырамыз. Серіппенің қатаңдығын мына формуламен анықтаймыз.

$$c = \frac{6}{5}t$$

а) $t < 1$-қатты(майыспайтын) арқалық.

б) $1 < t < 10$-қатаңдықты арқалық.

в) $t > 10$ -майысқақ арқалық.



3.3-сурет. Серпімді негіздегі арқалық

Есептің берілгені: $q = 1\frac{kH}{м}$, $l_0 = 0{,}25м$, $c = 0{,}5$

Жалпы бағдарламасының қысқаша мағлұматы:

$N = 4$ - элементтер саны.

$JZ = 5$ - түйіндер саны.

$IZ = 10$ -жылжулар саны.

$MP = 2$ -бекініс саны.

$NP = 5$ - түйінге түскен күштер саны.

$RM(3,N)$-элементтің ұзындығы (l_0), иілу қатаңдығы (EI), көлденең сырғу параметрі (BM) беріледі.

$IM(2,N)$-түйіндер топологиясы $(i, j, j, k, k,...)$

$KP(NP)$-күштердің қай жылжу бойынша түскенін көрсетеді.

$BP(NP)$-күштің мәні.

$JP(MP)$-бекініс қай жылжуда екенін білдіреді.

$KC(NC)$-серпімді тіреу қай жылжуда екенін көрсетеді.

$BC(NC)$-серпімді тіреу қатаңдығының мәні.

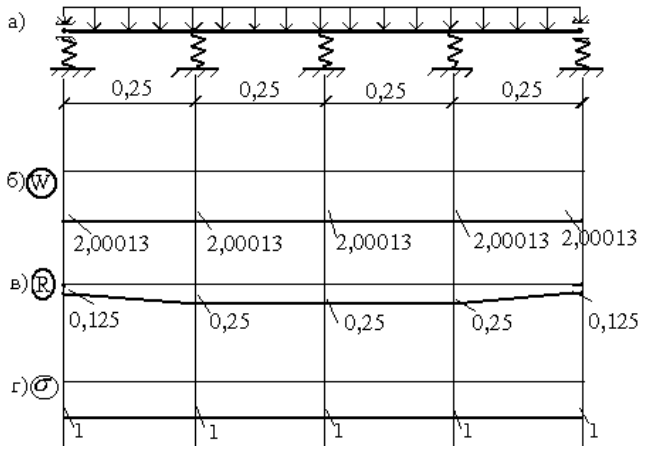
Есептің нәтижесі төменде көрсетілген.

Түйін және жылжулар

1	2.0001280
2	.0000000
3	2.0001280
4	.0000017
5	2.0001280
6	.0000018
7	2.0001290
8	.0000011
9	2.0001290
10	.0000000

Ішкі күштер

1	-.0001	.0000	.0001	.0000
2	-.0001	.0000	.0001	.0000
3	-.0001	.0000	.0001	.0000
4	-.0001	.0000	.0001	.0000

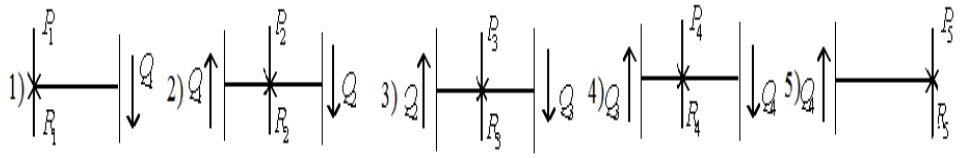


3.4-сурет. Серпімді негіздегі арқалықтың эпюрасы

3.4-суретте а)-берілген арқалық; б)-тік жылжу эпюрасы; в)-реакциялық күштің эпюрасы; г)-нормалдық кернеудің эпюрасы.

Есептің нәтижесін шолып өтетін болсақ, мұнда бұрыштық жылжу, көлденең күш, иілу моменті болмайды. Нәтижеден көріп тұрғанымыздай,

қатты арқалықты сыртқы күшпен басқан уақытта тік жылжу жерге иілмей кіреді. Ал реакциялық күшті былай анықтаймыз.



3.5-сурет. Әр қимадағы сыртқы және ішкі күштер

3.5-суретке қарап, келесі теңдеулер жүйесін құрамыз:

1) $R_1 - Q_1 - P_1 = 0: \quad R_1 = 0{,}125\,kH;$

2) $R_2 + Q_1 - P_2 - Q_2 = 0: \quad R_2 = P_2 = 0{,}25\,kH;$

3) $R_3 + Q_2 - P_3 - Q_3 = 0: \quad R_3 = P_3 = 0{,}25\,kH;$

4) $R_4 + Q_3 - P_4 - Q_4 = 0: \quad R_4 = P_4 = 0{,}25\,kH;$

5) $R_5 - Q_4 - P_5 = 0: \quad R_5 = P_5 = 0{,}125\,kH;$

Кернеуді реакциялық күш арқылы былайша табамыз.

1) $\sigma_1 = \dfrac{R_1}{0{,}125} = \dfrac{0{,}125}{0{,}125} = q$

2) $\sigma_2 = \dfrac{R_2}{0{,}25} = \dfrac{0{,}25}{0{,}25} = q$

3) $\sigma_3 = \dfrac{R_3}{0{,}25} = \dfrac{0{,}25}{0{,}25} = q$

4) $\sigma_4 = \dfrac{R_4}{0{,}25} = \dfrac{0{,}25}{0{,}25} = q$

5) $\sigma_5 = \dfrac{R_5}{0{,}125} = \dfrac{0{,}125}{0{,}125} = q$

Негізгі әдебиеттер:

1. Ахажанов С.Б., Нурланова Б.М. Конструкция есебін автоматтандыру: оқу құралы. – Қарағанды: «Типография Арко» ЖШС баспасы, 2020. – 135 бет.

2. Тухфатуллин Б.А. Численные методы расчёта строительных конструкций: учебное пособие. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2017. – 100 с.

3. Трушин С.И. Строительная механика: метод конечных элементов: учебное пособие. – Москва: Изд-во НИЦ ИНФРА-М, 2019. – 305 с.

4. Андреев В.Б. Лекции по методу конечных элементов: учебное пособие. -М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова МАКС Пресс, 2010. - 2-е изд., испр. и доп. - 264 с.

5. Карпиловский В.С. Метод конечных элементов и задачи теории упругости. – Киев: «Софія А», 2022. – 275 с.

6. Тұрсынов К.А. Құрылыс механикасындағы ақырлы элементтер әдісі: оқу құралы.-Қарағанды: ҚарМУ,2004.-53 б.

7. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред.- М.: Недра, 1974. – 240 с.

8. Елешова А.Е. Ақырлы элементтер әдісі: оқу құралы.-Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 2010.-129 б.

Қосымша әдебиеттер:

1. Жадрасынов Н.Т., Винокуров Л.П. Құрылыс механикасы. - Қарағанды: ҚарМТУ, 2001. - 224 б.

2. Байнатов Ж. Құрылыс механикасы (ғимараттарды динамикаға, сейсмикаға және тұрақтылыққа есептеу). - Алматы: Республикалық баспа кабинеті, 1996. - 235 б.

3. Түсіпов А. Құрылыс механикасының негіздері. - Алматы: Қазақ ұлттық техникалық университеті, 1995. - 121 б.

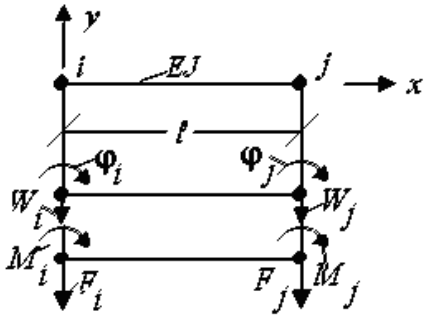
№4 дәріс. ***Ақырлы элементтер әдісімен арқалықтық конструкцияларды есептеу.***

Жоспар:

1. Жергілікті координаттық жүйедегі арқалықтың ақырлы элементі.
2. Элементке әсер ететін жайылған жүктемені түйіндік күштер және моменттермен алмастыру.
3. Көлденең ығысуды ескергендегі иілген арқалықтың ақырлы элементі.
4. Арқалықтық конструкцияны ақырлы элементтер әдісімен есептеу алгоритмі.

Жергілікті координаттық жүйедегі арқалықтың ақырлы элементі.

Арқалықтық конструкциядан бір элементті (ақырлы) бөліп алып, оны жеке қарастырайық (4.1-сурет). Бұл элементтің ұзындығы - ℓ, ал иілу қатаңдығы - EJ (E - элементтің материалының серпімділік модулі; J - оның көлденең қимасының өстік инерция моменті). Осы элементтің деформациялық күйі түйіндік жылжуларымен ($W_i, \varphi_i, W_j, \varphi_j$), ал кернеулік күйі түйіндік күштерімен (F_i, M_i, F_j, M_j) анықталады: W_i, W_j-сәйкесінше i және j түйінінің тік жылжулары; φ_i, φ_j - i және j түйінінің бұрыштық жылжулары (айналу бұрыштары); F_i, F_j - i және j түйініндегі көлденең күштер; M_i, M_j - i және j түйінінің иілу моменттері.



4.1-сурет. Арқалықтың ақырлы элементі

Осы элементтің потенциалдық энергиясы мына формула бойынша табылады:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \frac{M^2(x)}{EJ}\,dx, \tag{4.1}$$

мұнда $M(x)$ - иілу моменті, Гук заңы бойынша анықталады.

$$M(x) = -EJ\,\frac{d^2W(x)}{dx^2} \tag{4.2}$$

Қарастырылып отырған элемент (4.1-сурет) тепе-теңдікте болғандықтан, оның дифференциалдық теңдеуі (материалдар кедергісі курсынан белгілі) былайша жазылады:

$$EJ\,\frac{d^4W(x)}{dx^4}=0\,, \tag{4.3}$$

мұнда $W(x)$ - майысу функциясы.

Осы теңдеудің жалпы шешімі болып табылады:

$$\begin{gathered} W(x)=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3x^2+\alpha_4x^3 \\ \varphi(x)=\frac{dW}{dx}=\alpha_2+2\alpha_3x+3\alpha_4x^2 \end{gathered} \tag{4.4}$$

Мұндағы тұрақты белгісіздерді $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ төмендегі шекаралық шарттардан анықтаймыз:

$$\begin{gathered} x=0: \quad W(0)=W_i: \quad \alpha_1=W_i, \\ x=0: \quad \varphi(0)=\varphi_i: \quad \alpha_2=\varphi_i, \\ x=\ell: \quad W(\ell)=W_j: \quad \alpha_1+\alpha_2\ell+\alpha_3\ell^2+\alpha_4\ell^3=W_j \\ x=\ell: \quad \varphi(\ell)=\varphi_j: \quad \alpha_2+2\alpha_3\ell+3\alpha_4\ell^2=\varphi_j \end{gathered} \tag{4.5}$$

(4.5) өрнекті шешу арқылы тұрақты белгісіздер табылады:

$$\begin{gathered} \alpha_1=W_i; \quad \alpha_2=\varphi_i; \\ \alpha_3=\frac{1}{\ell^2}(-3W_i-2\ell\varphi_i+3W_j-\ell\varphi_j) \\ \alpha_4=\frac{1}{\ell^3}(2W_i+\ell\varphi_i-2W_j+\ell\varphi_j) \end{gathered} \tag{4.6}$$

Егер (4.6) өрнегін (4.4) формуласына енгізсек, онда ол ұқсас мүшелерін жинастыру арқылы мына түрге келтіріледі:

$$\begin{gathered} W(x)=q_1(x)W_i+q_2(x)\varphi_i+q_3(x)W_j+q_4(x)\varphi_j \\ q_1(x)=\left(1-3\frac{x^2}{\ell^2}+2\frac{x^3}{\ell^3}\right); \; q_2(x)=\ell\left(\frac{x}{\ell}-2\frac{x^2}{\ell^2}+\frac{x^3}{\ell^3}\right) \\ q_3(x)=\left(3\frac{x^2}{\ell^2}-2\frac{x^3}{\ell^3}\right); \; q_4(x)=\ell\left(-\frac{x^2}{\ell^2}+\frac{x^3}{\ell^3}\right), \end{gathered} \tag{4.7}$$

мұнда $q_m(x), m=1,2,3,4$ - элементтің иілуіндегі координаттық функциялар; $q_1(x),\ q_2(x),\ q_3(x),\ q_4(x)$ - сәйкесінше $W_i=1, \varphi_i=1, W_j=1, \varphi_j=1$ жылжуларынан пайда болған элементтің майысу функциялары (иілу пішіндері).

Майысу функциясын (4.7) векторлық түрде былайша жазуға болады:

$$W(x)=\vec{q}^T\cdot\vec{V}\,;\; \vec{q}^T=\left|q_1\ q_2\ q_3\ q_4\right|, \quad \vec{V}^T=\left|W_i\ \varphi_i\ W_j\ \varphi_j\right|, \tag{4.8}$$

мұнда $\vec{q}^T$ - координаттық функциялардың транспонирленген векторы; $\vec{V}^T$ - элементтің түйіндік жылжулар векторы.

Егер (4.8) өрнегін әуелі (4.2)-ге енгізсек, сонан соң алынған моменті (4.1) өрнегіне қоятын болсақ, онда элементтің потенциалдық энергиясы мына түрде болады:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\frac{M^T M dx}{EJ} = \frac{1}{2}\vec{V}^T \cdot K \cdot \vec{V}$$
$$K = \int_0^{\ell}\left(\frac{d^2\bar{q}}{dx^2}\right)(EJ)\left(\frac{d^2\bar{q}}{dx^2}\right)^T dx \qquad (4.9)$$

Қатаңдық матрицасының (K) элементтері төменгі формула бойынша анықталады:

$$K_{ij} = \int_0^{\ell}\frac{d^2\bar{q}_i}{dx^2}(EJ)\frac{d^2\bar{q}_j}{dx^2}dx, \quad i, j = 1,2,3,4 \qquad (4.10)$$

Элементтің түйіндік күштерінің (4.1-сурет) жұмысы төменгі түрде жазылады:

$$A = \frac{1}{2}\vec{V}^T \cdot \vec{F}, \ \vec{F}^T = \begin{vmatrix} F_i & M_i & F_j & M_j \end{vmatrix} \qquad (4.11)$$

Осы элемент тепе-теңдік болғандықтан, оны мына түрде жазуға болады:

$$A = U: \ \frac{1}{2}\vec{V}^T \cdot \vec{F} = \frac{\vec{V}^T}{2} K \cdot \vec{V}$$

Сондықтан жоғары теңдіктен негізгі тәуелділік алынады

$$\vec{F} = K \cdot \vec{V} \qquad (4.12)$$

Егер элементтің иілу қатаңдығы (EJ) тұрақты болса, онда (4.7) және (4.10) бойынша қатаңдық матрицаны оңай табуға болады:

$$K = \frac{EJ}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \qquad (4.13)$$

Енді негізгі тәуелділікті блок түрінде жазайық. Ол үшін блоктар енгізіміз:

$$\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{F}_i \\ \vec{F}_j \end{vmatrix}; \ \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{V}_i \\ \vec{V}_j \end{vmatrix}; \ \vec{F}_i = \begin{vmatrix} F_i \\ M_i \end{vmatrix}; \ \vec{F}_j = \begin{vmatrix} F_j \\ M_j \end{vmatrix}; \ \vec{V}_i = \begin{vmatrix} W_i \\ \varphi_i \end{vmatrix}; \ \vec{V}_j = \begin{vmatrix} W_j \\ \varphi_j \end{vmatrix};$$
$$K = \begin{vmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{vmatrix}; \ K_{ii} = \frac{EJ}{\ell^3}\begin{vmatrix} 12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 \end{vmatrix} \qquad (4.14)$$
$$K_{ij} = \frac{EJ}{\ell^3}\begin{vmatrix} -12 & 6\ell \\ -6\ell & 2l^2 \end{vmatrix}; \ K_{ji} = K_{ij}^T; \ K_{jj} = \frac{EJ}{\ell^3}\begin{vmatrix} 12 & -6\ell \\ -6\ell & 4\ell^2 \end{vmatrix},$$

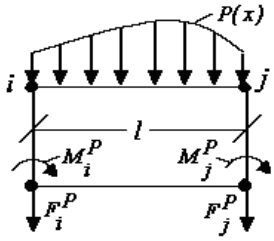
мұнда $\vec{F}_i$ - i түйін күштерінің векторы; $\vec{F}_j$ - j түйін күштерінің векторы; $\vec{V}_i$ - i түйін жылжуларының векторы; $\vec{V}_j$ - j түйін жылжуларының векторы; K_{ii} - қатаңдық матрицасының i түйініндегі $\vec{V}_{i=1}$ векторынан пайда болған блогы; K_{jj} - қатаңдық матрицасының j түйініндегі $\vec{V}_{j=1}$ векторынан пайда болған блогы.

Сөйтіп, қатаңдық матрицасының блоктарының бірінші индексі қай түйінде (орын) пайда болатынын көрсетсе, ал оның екінші индексі неден пайда болатынын (себебін) көрсетеді. Негізгі тәуелділіктің (4.12) жай немесе

блок түрлерін өмірде жиі кездесетін арқалықтық конструкциялар есептеуіне қолдануға болады.

Элементке әсер ететін жайылған жүктемені түйіндік күштер және моменттермен алмастыру

Бөлініп алынған ақырлы элементке қарқындылығы $P(x)$ жайылған жүктеме әсер етіп тұр (4.2-сурет). Осы жүктеменің әсерін $\left(F_i^p, M_i^p, F_j^p, M_j^p\right)$ күштер және моменттермен алмастыру керек.



4.2-сурет. Таралған жүктемені шоғырланған күштерге келтіру

Жүктеменің жұмысын анықтаймыз:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} W^T \cdot P(x)dx \tag{4.15}$$

Егер (4.8) формуласын (4.15) қойсақ, онда жұмыс былайша жазылады:

$$T = \frac{\vec{V}^T}{2}\int_0^{\ell} \vec{q} \cdot P(x)dx = \frac{\vec{V}^T}{2} \cdot \vec{P}\,, \tag{4.16}$$

мұнда $\vec{P}$-сыртқы күш векторы.

Сыртқы күштің компоненттері мына формуламен табылады:

$$P_m = \int_0^{\ell} q_m(x) \cdot P(x)dx, \;\; m = 1,2,3,4 \tag{4.17}$$

$$P_1 = F_i^p, \;\; P_2 = M_i^p, \;\; P_3 = F_j^p, \;\; P_4 = M_j^p,$$

мұнда $q_m(x)$ - координаттық функциялар (4.7) бойынша анықталады.

Мысал. Егер жайылған жүктеменің қарқындылығы тұрақты болса, $P(x) = P_0$, онда (4.17) формуласын қолданып, түйіндік күштер мен моменттерді табамыз:

$$P_1 = F_i^p = P_0\int_0^{\ell} q_1(x)dx = \frac{P_0\ell}{2},$$

$$P_2 = M_i^p = P_0\int_0^{\ell} q_2(x)dx = \frac{P_0\ell^2}{12},$$

$$P_3 = F_j^p = P_0\int_0^{\ell} q_3(x)dx = \frac{P_0\ell}{2}, \tag{4.18}$$

$$P_4 = M_j^p = P_0\int_0^{\ell} q_4(x)dx = -\frac{P_0\ell^2}{12}$$

Мысал. Егер элементке (4.2-сурет) шоғырланған күш P әсер етсе (бұл күш i түйінінен a қашықтықта орналасқан), онда бұл күшті былайша жазамыз:

$$P = P_0 \cdot 2\varepsilon \tag{4.19}$$

мұнда 2ε - жайылған жүктеме P_0 әсер ететін бөліктің ұзындығы.

Бұл жағдайда (4.17) формуласы бойынша табылады:

$$\begin{aligned}
P_1 = F_i^p &= \frac{P}{2\varepsilon}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} q_1(x)dx = P\left(1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3}\right),\\
P_2 = M_i^p &= \frac{P}{2\varepsilon}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} q_2(x)dx = Pa\left(1 - 2\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3}\right),\\
P_3 = F_j^p &= \frac{P}{2\varepsilon}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} q_3(x)dx = P\left(3\frac{a^2}{\ell^2} - 2\frac{a^3}{\ell^3}\right),\\
P_4 = M_j^p &= \frac{P}{2\varepsilon}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} q_4(x)dx = Pa\left(-\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3}\right)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Сөйтіп элементке әсер ететін әртүрлі сыртқы күштерді түйіндік күштер мен моменттерге келтіруге болады.

Көлденең ығысуды ескергендегі иілген арқалықтың ақырлы элементі

Ақырлы элемент (4.1-сурет) біртекті материалдан және ұзын арқалықты есептегенде қолданылады. Егер арқалықтың материалы композит болып табылса, онда көлденең ығысуды ескерген жөн. Оны ескеру үшін негізгі тәуелділікті (4.12) скаляр түрінде жазамыз:

$$F_m = K_{m1}W_i + K_{m2}\varphi_i + K_{m3}W_j + K_{m4}\varphi_j, \;\; m = 1,2,3,4, \tag{4.21}$$

мұнда K_{m1} - қатаңдық матрицаның (4.13) бірінші бағанасы.

$$m = 1: \;\; F_1 = F_i, \;\; K_{11} = \frac{12EJ}{\ell^3}, \quad m = 4: \;\; F_4 = M_j, \quad K_{44} = \frac{4EJ}{\ell}$$

Ақырлы элементтің (4.1-сурет) кез келген қимасындағы көлденең күш Q қима әдісі және (4.12) бойынша былайша анықталады:

$$Q = -F_i = F_j = -\frac{EJ}{\ell^2}\left[\frac{12}{\ell}W_i + 6\varphi_i - \frac{12}{\ell}W_j + 6\varphi_j\right] \tag{4.22}$$

Осы күш басқаша былай болмақ:

$$\tilde{Q} = -GA \cdot \beta, \tag{4.23}$$

мұнда GA, β - көлденең ығысудағы қатаңдық пен бұрыш.

Осы екі (4.22) және (4.23) өрнектерін бір-бірімен теңестіріп, көлденең ығысу бұрышын иілудегі жылжулармен анықтаймыз:

$$\tilde{Q} = Q: \;\; \beta = g\left[\frac{12}{\ell}W_i + 6\varphi_i - \frac{12}{\ell}W_j + 6\varphi_j\right], \quad g = \frac{EJ}{GA \cdot \ell^2}, \tag{4.24}$$

мұнда g -көлденең ығысу параметрі.

Енді мынадай жаңа бұрыштық жылжуларды енгізіп

$$\varphi_i^0 = \varphi_i + \beta, \qquad \varphi_j^0 = \varphi_j + \beta \tag{4.25}$$

(2.24) өрнегін былайша жазамыз

$$\beta = g\left[\frac{12}{\ell}W_i + 6\varphi_i^0 - \frac{12}{\ell}W_j + 6\varphi_j^0 - 12\beta\right]$$

Осы өрнектен көлденең ығысу бұрышын жаңа жылжулар (4.25) арқылы табамыз.

$$\beta = \alpha\left[\frac{12}{\ell}W_i + 6\varphi_i^0 - \frac{12}{\ell}W_j + 6\varphi_j^0\right]; \quad \alpha = \frac{g}{1+12g} \tag{4.26}$$

Енді (4.25) және (4.26) ескере отырып, негізгі тәуелділікті (4.21) былайша жазамыз:

$$F_m = K_{m1}W_i + K_{m2}\varphi_i^0 + K_{m3}W_j + K_{m4}\varphi_j^0 - \left(K_{m2} + K_{m4}\right)\cdot\beta =$$

$$= S_{m1}W_i + S_{m2}\varphi_i^0 + S_{m3}W_j + S_{m4}\varphi_j^0 \tag{4.27}$$

$$S_{m1} = K_{m1} - \frac{12\alpha}{\ell}(K_{m2} + K_{m4})$$

$$S_{m2} = K_{m2} - 6\alpha(K_{m2} + K_{m4})$$

$$S_{m3} = K_{m3} + \frac{12\alpha}{\ell}(K_{m2} + K_{m4})$$

$$S_{m4} = K_{m4} - 6\alpha(K_{m2} + K_{m4}), \quad m = 1,2,3,4,$$

мұнда S_{m2}-көлденең ығысу ескерілгендегі элементтің қатаңдың матрицасының бағанасы.

Егер $g = 0$, онда болады.

Ақырлы элементтің көлденең ығысу ескерілгендегі негізгі тәуелділігі мына түрде болмақ:

$$\vec{R} = S\cdot z, \quad \vec{R}^T = \left|F_i \; M_i \; F_j \; M_j\right|, \quad z^T = \left|W_i \; \varphi_i^0 \; W_j \; \varphi_j^0\right|, \tag{4.28}$$

Осы элементтің қатаңдық матрицасы

$$S = \frac{EJ}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12\alpha_0 & 6\alpha_0\ell & -12\alpha_0 & 6\alpha_0\ell \\ 6\alpha_0\ell & (3\alpha_0+1)\ell^2 & -6\alpha_0\ell & (3\alpha_0-1)\ell^2 \\ -12\alpha_0 & -6\alpha_0\ell & 12\alpha_0 & -6\alpha_0\ell \\ 6\alpha_0\ell & (3\alpha_0-1)\ell^2 & -6\alpha_0\ell & (3\alpha_0+1)\ell^2 \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

$$\alpha_0 = 1 - 12\alpha = \frac{1}{1+12g}$$

Егер көлденең сырғу ескерілмесе $g = 0$, онда $\alpha = 0$, $\alpha_0 = 0$, сондықтан $S = K$ (4.29 матрицасы 4.13 матрицасына тең болмақ).

Көлденең сырғу параметрі (4.24) жалпы жағдайда мына өрнек арқылы анықталады

$$g = \frac{EJ}{\mu\cdot G\cdot A\cdot \ell^2}, \tag{4.30}$$

мұнда $\mu = 1$ - жанамалық кернеу көлденең қимада тұрақты болғанда; $\mu = \frac{5}{6}$ - жанамалық кернеу көлденең қимада параболла заңымен өзгергенде.

Мына векторлармен блоктарды енгізейік:

$$\vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{R}_i \\ \vec{R}_j \end{vmatrix}; \quad \bar{z} = \begin{vmatrix} \bar{z}_i \\ \bar{z}_j \end{vmatrix}; \quad \vec{R}_i = \begin{vmatrix} F_i \\ M_i \end{vmatrix}; \quad \vec{R}_j = \begin{vmatrix} F_j \\ M_j \end{vmatrix}; \quad \bar{z}_i = \begin{vmatrix} W_i \\ \varphi_i^0 \end{vmatrix}; \quad \bar{z}_j = \begin{vmatrix} W_j \\ \varphi_j^0 \end{vmatrix};$$

$$S=\begin{vmatrix} S_{ii} & S_{ij} \\ S_{ji} & S_{jj} \end{vmatrix};\quad S_{ii}=\frac{EJ}{\ell^3}\begin{vmatrix} 12\alpha_0 & 6\alpha_0\ell \\ 6\alpha_0\ell & (3\alpha_0+1)\ell^2 \end{vmatrix};\ S_{ji}=S_{ij}^T \tag{4.31}$$

$$S_{ij}=\frac{EJ}{\ell^3}\begin{vmatrix} -12\alpha_0 & 6\alpha_0\ell \\ -6\alpha_0\ell & (3\alpha_0-1)\ell^2 \end{vmatrix};\quad S_{jj}=\frac{EJ}{\ell^3}\begin{vmatrix} 12\alpha_0 & -6\alpha_0\ell \\ -6\alpha_0\ell & (3\alpha_0+1)\ell^2 \end{vmatrix}$$

Негізгі тәуелділікті былайша жазамыз:

$$\begin{bmatrix} \vec{R}_i \\ \vec{R}_j \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} S_{ii} & S_{ij} \\ S_{ji} & S_{jj} \end{vmatrix}\begin{bmatrix} \bar{z}_i \\ \bar{z}_j \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

Осы тәуелділікті қолдану арқылы арқалықтық конструкцияның негізгі тәуелділігін алуға болады. Ол үшін $\vec{R}\to\vec{P}\ S\to A,\ \bar{z}\to\bar{u}$ алмастыру арқылы мына тәуелділікті аламыз

$$A\cdot\bar{u}=\vec{P}, \tag{4.33}$$

мұнда A - арқалықтық конструкцияның қатаңдық матрицасы; $\bar{u}$ - оның түйіндік жылжулар векторы; $\vec{P}$ - сыртқы түйіндік күштер векторы.

Арқалықтық конструкцияны ақырлы элементтер әдісімен есептеу алгоритмі

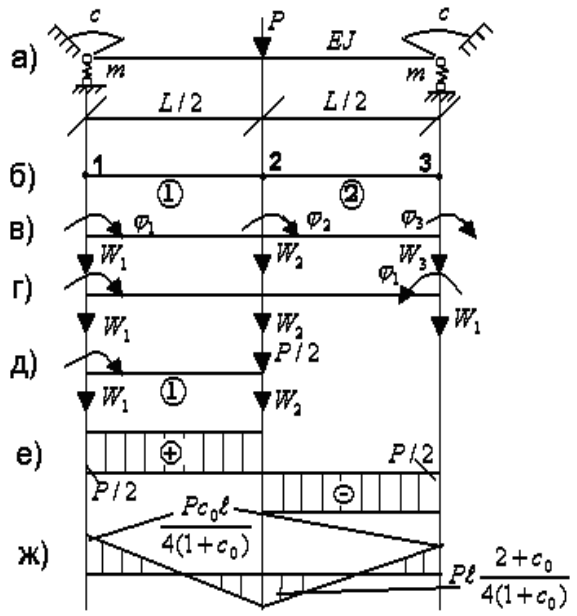
Өмірде арқалықтық конструкциялар жиі кездеседі, сондықтан оларды есептеу өте маңызды мәселе болып табылады. Енді ақырлы элементтер әдісін осы конструкцияларға қолдануын мысал түрінде қарастырып көрелік.

Мысал. Берілген арқалықты (4.3.а-сурет) ақырлы элементтер әдісімен есептеу керек. Есептеу алгоритмі былайша жүргізіледі:

1. Арқалықты ақырлы элементтерге бөліп, оның элементтерін және түйіндерін белгілейміз (4.3.б-сурет)
2. Түйіндік жылжулар бағыттарын қабылдап аламыз (4.3.в-сурет)
3. Элементтердің түйіндік жылжулар векторларын және қатаңдық матрицаларын блок түрінде (4.31) бойынша жасақтаймыз:

$$z^{(1)}=\begin{vmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{vmatrix};\ z^{(2)}=\begin{vmatrix} \bar{z}_2 \\ \bar{z}_3 \end{vmatrix};\ z_1=\begin{vmatrix} W_1 \\ \varphi_1 \end{vmatrix};\ z_2=\begin{vmatrix} W_2 \\ \varphi_2 \end{vmatrix};\ z_3=\begin{vmatrix} W_3 \\ \varphi_3 \end{vmatrix}$$

$$S^{(1)}=\begin{vmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} \end{vmatrix};\quad S^{(2)}=\begin{vmatrix} S_{22}^{(2)} & S_{23}^{(2)} \\ S_{32}^{(2)} & S_{33}^{(2)} \end{vmatrix}; \tag{4.34}$$



4.3-сурет. Серпімді тірелген арқалық

4. Арқалықтың негізгі тәуелділігін таблица түрінде жазамыз.

Кесте 4.1

Негізгі тәуелділікті қолдану кестесі

	$\bar{Z}_1$	$\bar{Z}_2$	$\bar{Z}_3$		$\bar{P}$
$\bar{Z}_1$	$S_{11}^{(1)}$	$S_{12}^{(1)}$			$\bar{P}_1$
$\bar{Z}_2$	$S_{21}^{(1)}$	$S_{22}^{(1)}+S_{22}^{(2)}$	$S_{23}^{(2)}$	=	$\bar{P}_2$
$\bar{Z}_3$		$S_{32}^{(2)}$	$S_{33}^{(2)}$		$\bar{P}_3$

(4.35)

5. Байланыстарды (бірінші және үшінші түйіндерде серпімділік тіреулер орналасқан) ескеріп шешуші теңдеулер жүйесін аламыз:

$$A\cdot\bar{u}=\bar{P}$$

$$A=\begin{bmatrix} S_{11}^{(1)}+c_{11} & S_{12}^{(1)} & 0 \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)}+S_{22}^{(2)} & S_{23}^{(2)} \\ 0 & S_{32}^{(2)} & S_{33}^{(2)}+c_{33} \end{bmatrix};\ \bar{u}=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix};\ \bar{P}=\begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \end{bmatrix} \qquad (4.36)$$

$$C_{11}=C_{33}=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix};\bar{P}_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};\bar{P}_2=\begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix};\bar{P}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

мұнда m,c - серпімділік тіреулер қатаңдықтарының коэффициенттері (4.3.а-сурет).

Егер бірінші түйінде қатаң байланыс болса, онда $z_1=0$, сондықтан A матрицасының бірінші жолымен бағанасын нөлдеп, екеуінің қиылысқан жеріне бірлік матрица E беріледі. Бұл жағдайда A матрицасы мына түрде жазылады

$$A=\begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & S_{22}^{(1)}+S_{22}^{(2)} & S_{23}^{(2)} \\ 0 & S_{32}^{(2)} & S_{33}^{(2)}+c_{33} \end{bmatrix}; E=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.37)$$

6. Шешуші теңдеулер жүйесін шешіп, түйіндік жылжулар векторын анықтаймыз

$$\vec{u}=A^{-1}\cdot\vec{P}, \qquad (4.38)$$

мұнда A^{-1} - кері матрица.

Осы вектор арқалықтың деформациялық күйін анықтайды.

7. Негізгі тәуелділікті (4.32) қолдана отырып элементтердің түйіндік ішкі күштерін анықтаймыз.

$$\vec{R}^{(1)}=S^{(1)}\cdot z^{(1)};\ \vec{R}^{(2)}=S^{(2)}\cdot z^{(2)} \qquad (4.39)$$

Осы векторлар арқылы арқалықтың кернеулік күйі анықталады.

Енді осы алгоритмді қолдана отырып, берілген арқалықтың есебін шешіп көрелік.

Арқалықтың байланыстары және сыртқы күштері симметриялы болғандықтан, алты жылжудың тек қана үшеуі белгісіз болады (4.3.г-сурет). Сондықтан арқалықтың тек қана бір элементін қарастырсақ жеткілікті болады (4.3.д-сурет). Бұл жағдайда шешуші теңдеулер (4.29) ескеру арқылы (4.36) былайша жазылады:

$$\frac{EJ}{\ell^3}\begin{bmatrix} (12\alpha_0+m_0) & 6\alpha_0\ell & -12\alpha_0 & 6\alpha_0\ell \\ 6\alpha_0\ell & (3\alpha_0+1+c_0)\ell^2 & -6\alpha_0\ell & (3\alpha_0-1)\ell^2 \\ -12\alpha_0 & -6\alpha_0\ell & 12\alpha_0 & -6\alpha_0\ell \\ 6\alpha_0\ell & (3\alpha_0-1)\ell^2 & -6\alpha_0\ell & (3\alpha_0+1)\ell^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_1 \\ \varphi_1^0 \\ W_2 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{p}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4.40)$$

Осы теңдеулерді шешіп түйіндік жылжуларды анықтаймыз.

$$W_2=\frac{\Delta_0}{4\alpha_0 m_0 g}\frac{pl^3}{EJ};\ W_1=\frac{1}{2m_0}\frac{p\ell^3}{EJ};\ \varphi_1^0\cdot\ell=\frac{1}{24g}\frac{p\ell^3}{EJ} \qquad (4.41)$$

$$\Delta_0=\frac{m_0\alpha_0}{12}+2\alpha_0 g+\frac{m_0 g}{\sigma};\qquad g=\frac{1+c_0}{\sigma}$$

Серпімділік байланыстардың қатаңдықтары мына формулалармен анықталмақ.

$$m=m_0\frac{EJ}{\ell^3};\quad c=c_0\frac{EJ}{\ell}, \qquad (4.42)$$

мұнда m_0, c_0 - өлшемсіз қатаңдық параметрлер; EJ - элементтің иілу қатаңдығы; ℓ - элементтің ұзындығы.

Көлденең ығысу параметрі α_0 (4.29) бойынша, ал ондағы g - (4.30) бойынша анықталады.

Сөйтіп (4.41) бойынша арқалықтың деформациялық күйі анықталады.

Егер $c_0=0$, $m_0=\infty$ (топсалы тірелген арқалық), онда (4.29) ескере отырып жылжуларды (4.41) былайша жазуға болады $\left(\ell=\frac{L}{2}\right)$

$$W_2 = (1+3g)\frac{PL^3}{48EJ}, \quad W_1 = 0; \quad \varphi_1^0 \cdot \ell = \frac{1}{48}\frac{PL^3}{EJ} \tag{4.43}$$

Ал егер $\mu = \frac{5}{6}$, $J = \frac{h^3}{12}$; $A = h$; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ және (4.30) ескерсек үлкен майысу мына мәнді қабылдайды:

$$W_2 = \left[1 + \frac{12}{5}(1+\nu)\frac{PL^3}{48EJ}\right] \tag{4.44}$$

Бұл мән көлденең ығысуды ескеретін теория бойынша алынған мәнге жақын болмақ.

$$W_2 = \left(1 + \frac{\bar{k}^2 n}{10}\right)\frac{PL^3}{48(1+\nu)} = \left[1 + \frac{x^2}{5}(1+\nu)\frac{h^2}{L^2}\right]\frac{PL^3}{48EJ} \tag{4.45}$$

Егер көлденең ығысу ескерілмесе $g = 0$, немесе $\frac{h}{L} = 0$, онда (4.44) және (4.45) формулалары классикалық теория бойынша алынған мәнге тең болмақ.

Енді негізгі тәуелділік (4.28) бойынша (4.29) және (4.41) ескере отырып элементтердің түйіндік күштерін табамыз.

$$\bar{R}^{(1)} = S^{(1)} \cdot z^{(1)} = P\begin{vmatrix} -\dfrac{c_0^{-1/2}\ell}{4(1+c_0)} \\ -\dfrac{(2+c_0)^{1/2}}{4(1+c_0)} \end{vmatrix}; \; \bar{R}^{(2)} = S^{(2)} \cdot z^{(2)} = P\begin{vmatrix} \dfrac{(2+c_0)^{1/2}}{4(1+c_0)} \\ \dfrac{c_0^{-1/2}\ell}{4(1+c_0)} \end{vmatrix}; \tag{4.46}$$

Арқалықтың ішкі күштер эпюраларын $Q = -F_i; M = M_i; Q = F_j; M = -M_j$ ескере отырып және (4.46) бойынша тұрғызамыз (4.3.е-сурет, 4.3.ж-сурет).

Негізгі әдебиеттер:

1. Ахажанов С.Б., Нурланова Б.М. Конструкция есебін автоматтандыру: оқу құралы. – Қарағанды: «Типография Арко» ЖШС баспасы, 2020. – 135 бет.

2. Тухфатуллин Б.А. Численные методы расчёта строительных конструкций: учебное пособие. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2017. – 100 с.

3. Трушин С.И. Строительная механика: метод конечных элементов: учебное пособие. – Москва: Изд-во НИЦ ИНФРА-М, 2019. – 305 с.

4. Андреев В.Б. Лекции по методу конечных элементов: учебное пособие. -М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова МАКС Пресс, 2010. - 2-е изд., испр. и доп. - 264 с.

5. Карпиловский В.С. Метод конечных элементов и задачи теории упругости. – Киев: «Софія А», 2022. – 275 с.

6. Тұрсынов К.А. Құрылыс механикасындағы ақырлы элементтер әдісі: оқу құралы.-Қарағанды: ҚарМУ,2004.-53 б.

7. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред.- М.: Недра, 1974. – 240 с.

8. Елешова А.Е. Ақырлы элементтер әдісі: оқу құралы.-Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 2010.-129 б.

Қосымша әдебиеттер:

1. Жадрасынов Н.Т., Винокуров Л.П. Құрылыс механикасы. - Қарағанды: ҚарМТУ, 2001. - 224 б.

2. Байнатов Ж. Құрылыс механикасы (ғимараттарды динамикаға, сейсмикаға және тұрақтылыққа есептеу). - Алматы: Республикалық баспа кабинеті, 1996. - 235 б.

3. Түсіпов А. Құрылыс механикасының негіздері. - Алматы: Қазақ ұлттық техникалық университеті, 1995. - 121 б.

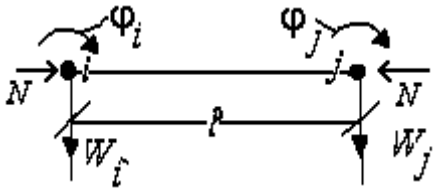
№5 дәріс. ***Өзектің орнықтылығындағы және арқалықтың еркін тербелісіндегі ақырлы элемент.***

Жоспар:

1. Өзектің орнықтылығындағы ақырлы элемент.
2. Өзектік жүйенің орнықтылығын ақырлы элементтер әдісімен есептеу алгоритмі.
3. Арқалықтың еркін тербелісіндегі ақырлы элемент.
4. Өзектік жүйенің еркін тербелісін ақырлы элементтер әдісімен есептеу алгоритмі.

Өзектің орнықтылығындағы ақырлы элемент.

Екі күшпен (N) қысылған ақырлы элементті қарастырайық (5.1-сурет).



5.1-сурет. Қысылған ақырлы элемент

Бұл күштердің орнықтылығын жоғалтар алдындағы жұмысы былайша анықталады:

$$B = -\frac{1}{2} N\Delta\ell = -\frac{N}{2}\int_0^{\ell}\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 dx, \tag{5.1}$$

мұнда $\Delta\ell$ - элементтің абсолюттік қысқаруы; $W(x)$ - оның майысу функциясы.

Майысу функциясының векторлық түрін (4.8) қолданып (5.1) өрнегін мына түрге келтіреміз:

$$\begin{aligned} B &= -\frac{N}{2}\int_0^{\ell}\left(\frac{dW}{dx}\right)^T \cdot \left(\frac{dW}{dx}\right) dx = -\frac{\vec{V}^T}{2} N\int_0^{\ell}\frac{d\bar{q}}{dx}\left(\frac{d\bar{q}}{dx}\right)^T dx\cdot\vec{V} = \\ &= \frac{\vec{V}^T}{2} P\cdot\vec{V}; \quad P = -N\int_0^{\ell}\frac{d\bar{q}}{dx}\left(\frac{d\bar{q}}{dx}\right)^T dx, \end{aligned} \tag{5.2}$$

мұнда P - ақырлы элементтің орнықтылығындағы қатаңдық (геометриялық) матрицасы; $\vec{V}$ - элементтің түйіндер жылжулар векторы.

Осы қатаңдық матрицасының әрбір элементі мына формула бойынша анықталады:

$$P_{ij} = -N\int_0^{\ell}\frac{d\bar{q}_i}{dx}\cdot\frac{d\bar{q}_j}{dx} dx, \quad i, j = 1,2,3,4 \tag{5.3}$$

Енді элементтің координаттық функцияларынан (4.7) бірінші туынды алып (5.3) формуласы бойынша орнықтылықты сипаттайтын матрицаны анықтауға болады:

$$P=-\frac{N}{30\ell}\begin{bmatrix} 36 & 3\ell & -36 & -3\ell \\ 3\ell & 4\ell^2 & -3\ell & -\ell^2 \\ -36 & -3\ell & 36 & -3\ell \\ -3\ell & -\ell^2 & -3\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Элементтің негізгі тәуелділігін алу үшін (4.9), (4.11) және (5.2) өрнектерін қолдана отырып, оның тепе-теңдік теңдеуін жазамыз.

$$A=U+B:\ \vec{F}=(K+P)\vec{V}$$

Осы теңдеудің екі жағын $\frac{\ell^3}{EJ_0}$ көбейтсек, онда жалпы қатаңдық матрица $\overline{K}$ былайша жазылады.

$$\overline{K}=\gamma\underbrace{\begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}}_{\overset{\circ}{K}}-K_N\underbrace{\begin{bmatrix} 36 & 3\ell & -36 & -3\ell \\ 3\ell & 4\ell^2 & -3\ell & -\ell^2 \\ -36 & -3\ell & 36 & -3\ell \\ -3\ell & -\ell^2 & -3\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}}_{\hat{K}} \tag{5.5}$$

$$K_N=\frac{N\ell^2}{30EJ_0};\ \gamma=\frac{J}{J_0},$$

мұнда K_N - күдікті жүктеме параметр.

Негізгі тәуелділік (5.5) мына түрде болады.

$$\vec{R}=\overline{K}\cdot\vec{V},\quad \vec{R}=\frac{\ell^3}{EJ_0}\cdot\vec{F} \tag{5.6}$$

Егерде көлденең сырғу ескерілетін болса, онда ақырлы элементтің негізгі тәуелділігі (5.6), оның қатаңдық матрицасы (4.29) және (5.4) қолдану арқылы алынады:

$$\overline{K}=\gamma\underbrace{\begin{bmatrix} 12\alpha_0 & 6\alpha_0\ell & -12\alpha_0 & 6\alpha_0\ell \\ 6\alpha_0\ell & (3\alpha_0+1)\ell^2 & -6\alpha_0\ell & (3\alpha_0-1)\ell^2 \\ -12\alpha_0 & -6\alpha_0\ell & 12\alpha_0 & -6\alpha_0\ell \\ 6\alpha_0\ell & (3\alpha_0-1)\ell^2 & -6\alpha_0\ell & (3\alpha_0+1)\ell^2 \end{bmatrix}}_{\overset{\circ}{K}}- \tag{5.7}$$

$$-K_N\underbrace{\begin{bmatrix} 36 & 3\ell & -36 & -3\ell \\ 3\ell & 4\ell^2 & -3\ell & -\ell^2 \\ -36 & -3\ell & 36 & -3\ell \\ -3\ell & -\ell^2 & -3\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}}_{\hat{K}}$$

Сөйтіп, өзектің орнықтылығын есептеу үшін негізгі тәуелділікті (5.6) қолдану керек

$$\vec{R}=\overline{K}\cdot\vec{V},\quad \overline{K}=\gamma\cdot\overset{0}{K}-K_N\cdot\hat{K}, \tag{5.8}$$

мұнда $\overline{K}$ - ақырлы элементтің жалпы қатаңдық матрицасы; $\overset{\circ}{K}$ - оның иілуіндегі қатаңдық матрицасы (көлденең сырғуды ескермесе (5.5), ал көлденең сырғуды ескерілгенде (5.7) өрнектерімен анықталады); $\hat{K}$ -

элементтің геометриялық қатаңдық матрицасы (орнықтылықты сипаттайтын матрица).

Ақырлы элементтің негізгі тәуелділігін (5.8) қолдану арқылы кез келген өзектік жүйенің негізгі тәуелділігін $\left(\vec{R} \to 0;\ \gamma \overset{\circ}{K} \to A,\ \hat{K} \to B;\ \ \vec{V} \to \vec{u}\right)$ алуға болады.

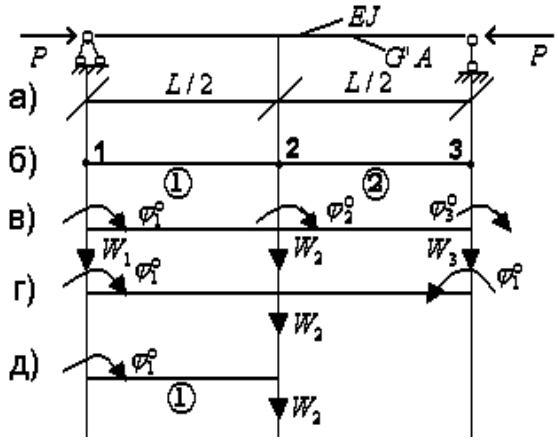
$$\left(A - K_N \cdot B\right)\vec{u} = 0, \tag{5.9}$$

мұнда $\vec{u}$ - өзектік жүйенің түйіндер жылжулар векторы.

Өзектік жүйенің орнықтылығын ақырлы элементтер әдісімен есептеу алгоритмі.

Ақырлы элементтер әдісін өзектік жүйелер орнықтылығын есептеуге қолдануын мысал түрінде қарастырып көрелік.

Мысал. Берілген өзекті (5.2.а-сурет) ақырлы элементтер әдісімен есептеу керек.



5.2-сурет. Екі жағынан қысылған өзек

Есептеу алгоритмі былайша жүзеге асырылады:

1. Өзекті ақырлы элементтерге бөліп, оның элементтерін және түйіндерін белгілейміз (5.2.б-сурет)
2. Түйіндер жылжулар бағыттарын қабылдап аламыз (5.2.в.-сурет)
3. Элементтердің түйіндік жылжулар векторларын және олардың қатаңдық матрицаларын жасақтаймыз:

$$\vec{V}^{(1)} = \begin{vmatrix} W_1 \\ \varphi_1^0 \\ W_2 \\ \varphi_2^0 \end{vmatrix};\ \vec{V}^{(2)} = \begin{vmatrix} W_2 \\ \varphi_2^0 \\ W_3 \\ \varphi_3^0 \end{vmatrix};\ \overline{K}^{(1)} = \overline{K}^{(2)} = \overline{K}, \tag{5.10}$$

мұнда K матрицасы (5.7) формуласы бойынша анықталады.

4. Өзектің негізгі тәуелділігін (5.8) қолдану арқылы кесте аламыз $\gamma = 1, \lambda = K_N$

Кесте 5.1

Негізгі тәуелділікті қолдану кестесі

W_1 φ_1^0 W_2 φ_2^0 W_3 φ_3^0

$12-36\lambda$	$(6-3\lambda)\ell$	$-(12-36\lambda)$	$(6+3\lambda)\ell$		
$(6-3\lambda)\ell$	$(4-4\lambda)\ell^2$	$-(6-3\lambda)\ell$	$(2+\lambda)\ell^2$		
$-(12-36\lambda)$	$-(6-3\lambda)\ell$	$(12-36\lambda)+(12-36\lambda)$	$-(6-3\lambda)\ell+(6-3\lambda)\ell$	$-(12-36\lambda)$	$(6+3\lambda)\ell$
$(6+3\lambda)\ell$	$(2+\lambda)\ell^2$	$-(6-3\lambda)\ell+(6-3\lambda)\ell$	$4(1-\lambda)\ell^2+4(1-\lambda)\ell^2$	$-(6-3\lambda)\ell$	$(2+\lambda)\ell^2$
		$(12-36\lambda)$	$(6-3\lambda)\ell$	$(12-36\lambda)$	$-(6-3\lambda)\ell$
		$(6+3\lambda)\ell$	$(2+\lambda)\ell^2$	$-(6-3\lambda)\ell$	$4(1-\lambda)\ell^2$

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ \varphi_1^0 \\ W_2 \\ \varphi_2^0 \\ W_3 \\ \varphi_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Енді бұл тәуелділікті (5.9) түрінде жазуға болады.

$$(A-\lambda B)\bar{u}=0, \tag{5.11}$$

Мұнда

$$A=\begin{vmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell & 0 & 0 \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6\ell & 24 & 0 & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & 0 & 8\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 0 & 0 & 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{vmatrix};\ B=\begin{vmatrix} 36 & 3\ell & -36 & -3\ell & 0 & 0 \\ 3\ell & 4\ell^2 & -3\ell & -\ell^2 & 0 & 0 \\ -36 & -3\ell & 72 & 0 & -36 & -3\ell \\ -3\ell & -\ell^2 & 0 & 8\ell^2 & -3\ell & -\ell^2 \\ 0 & 0 & -36 & -3 & 36 & -3\ell \\ 0 & 0 & -3\ell & -\ell^2 & -3\ell & 4\ell^2 \end{vmatrix}$$

$$\bar{u}^T=\begin{vmatrix} W_1 & \varphi_1^0 & W_2 & \varphi_2^0 & W_3 & \varphi_3^0 \end{vmatrix}$$

5. Біртекті алгебралық теңдеулер жүйесінің (5.11) анықтауышын нөлге теңестіру арқылы күдікті жүктеме параметрін ($\lambda=K_N$) анықтайтын теңдеу аламыз:

$$\det|A-\lambda B|=0 \tag{5.12}$$

Осы теңдеудің түбірлерін тауып, олардан ең кішісін таңдап аламыз.

6. Күдікті жүктеменің ең кіші параметрінің мәнін $K_N^{\min}$ ескере отырып күдікті күшті (5.5) бойынша анықтаймыз

$$P=K_N^{\min}\cdot 30\frac{EJ_0}{\ell^2}, \tag{5.13}$$

мұнда $\ell=\frac{L}{n}=\frac{L}{2}$; n - элементтер саны болып табылады.

7. Негізгі теңдеудің (5.11) бір жолын қысқартып сол жолға сәйкес бағананы оң жаққа шығару арқылы біртекті теңдеулер жүйесін біртексіз теңдеулер жүйесіне келтіреміз.

Осы түрлендіру жүргізер алдында (5.11) теңдеулеріне λ орнына $\lambda^{\min} = K_N^{\min}$ енгізілуі керек.

Алынған теңдеулер жүйесіне шешу арқылы түйіндік жылжуларын анықтап, олар бойынша өзектің орнықтылықты жоғалту пішіні тұрғызылу керек.

Жоғарғыдағы көрсетілген алгоритм жалпы жағдайға арналған. Оларды жүзеге асыру тек компьютер арқылы жүргізіледі.

Енді қойылған есепті шығару үшін оны ықшамдап көрелік. Өзектің байланыстарын $(W_1 = 0, W_3 = 0)$ және симметриясын $(\varphi_2^0 = 0, \varphi_3^0 = -\varphi_1^0)$ ескере отырып, оның жылжулар санын азайтамыз (5.2.г.-сурет). Бұл жағдай симметриялы болғандықтан тек қана бір элементті қарастыруға болады (5.2.д.-сурет). Енді осы элементтің түйіндік жылжулар векторын және қатаңдық матрицасын жасақтаймыз

$$\bar{V}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_1^0 \\ W_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \; \bar{K}^{(1)} = \bar{K} \tag{5.14}$$

Негізгі тәуелділікті (5.8) қолдана отырып жылжулар бағыттары бойынша тепе-теңдік теңдеулерін құрамыз

$$\begin{aligned} &\bar{R}_2^{(1)} = 0; \; \bar{K}_2^{(1)} \cdot V^{(1)} = 0: \; 4\ell^2(1-K_N)\varphi_1^0 + (-6+3K_N)\ell W_2 = 0 \\ &\bar{R}_3^{(1)} = 0; \; \bar{K}_3^{(1)} \cdot V^{(1)} = 0: (-6+3K_N)\ell\varphi_1^0 + (12-36K_N)W_2 = 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Бұл теңдеу ашылып жазылған (5.11) теңдеу болып табылады. Енді (5.12) теңдеуі былайша жазылады:

$$\det|A - K_N B| = 4(1-K_N)(12-36K_N)\ell^2 - \left(-6+3K_N^2\right)^2 \ell^2 = 0$$

$$45\left(K_N^2 - \frac{52}{45}K_N + \frac{4}{45}\right)\ell^2 = 0 \tag{5.16}$$

Осы теңдеудің түбірлерін анықтаймыз.

$$(K_N)_{1,2} = \frac{1}{45}\left[26 \pm \sqrt{496}\right] = \frac{1}{45}\left[26 \pm 22{,}2711\right]$$

Ең кіші түбірі

$$K_N^{\min} = \frac{1}{45}\left[26 - 22{,}2711\right] = 0{,}0829 \tag{5.17}$$

Күдікті күшті (2.59) бойынша анықтаймыз

$$P = K_N^{\min} \cdot 120\frac{EI_0}{L^2} = 9{,}9439\frac{EI_0}{L^2} \tag{5.18}$$

Осы есепті ғұлама ғалым Л.Эйлер 1774 жылы шығарған. Оның шешімі әдебиеттегі дәл шешімі болып табылады.

$$P = P_Э = \pi^2 \frac{EJ_0}{L^2} \tag{5.19}$$

Енді екі шешімді (5.18) және (5.19) салыстырып алшақтықты 0,75% табамыз.

Сөйтіп, ақырлы элементтер әдісін есептің шешуіне қолданғанда $n=2$ болғанда дәл шешімге жуық шешім алуға болады.

Негізгі теңдеулердің бір жолын (екінші) алып тастап біртексіз теңдеу аламыз

$$4\ell^2(1-K_N^{\min})\varphi_1^0=-(-6+3K_N^{\min})W_2$$

Осы теңдеуден $W_2=\ell$ болғанда

$$\varphi_1^0=-\frac{(-6+3K_N^{\min})}{4(1-K_N^{\min})}\frac{1}{\ell} \qquad (5.20)$$

Табылған жылжулар $W_2=\ell$ және (5.20) бойынша берілген өзектің орнықтылықты жоғалтқандағы пішінін анықтаймыз.

Сөйтіп, ақырлы элементтер әдісі бойынша күрделі орнықтылық есебін шығаруға болады.

Арқалықтың еркін тербелісіндегі ақырлы элемент.

Егер арқалық басқа дене әсерінен тепе-теңдік қалпынан шығарылған болса, онда осы денені алып тастағанда арқалық еркін тербелісте болады.

Енді арқалықтан бір элементті бөліп алып, оны жеке қарастырайық (4.1-сурет). Бұл элементтің деформациялық күйі бұрынғыша түйіндік жылжулармен $(W_i,\varphi_i,W_j,\varphi_j)$ анықталынады. Элемент еркін тербелісте (қозғалыста) боғандықтан оның инерция күші былайша анықталады

$$q^u=m\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \qquad (5.21)$$

мұнда m - погондық (бірлік) масса; $W(x_1,t)$ - динамикалық майысу функциясы; $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ - элементтің өте кіші бөлігінің үдеуі; t - уақыт параметрі.

Еркін тербеліс гармоникалық заңмен өзгеретіндіктен майысу функциясы былайша қабылданады

$$W(x_1,t)=W_0\sin\omega t, \qquad (5.22)$$

мұнда ω - дөңгелектік жиілік; $W_0(x_1)$ - статикалық майысу функциясы.

Элементтің инерция күшін (5.21) гармоникалық заңды (5.22) ескере отырып мына түрде жазуға болады

$$q^u=-m\omega^2W_0\sin\omega t=-m\omega^2\cdot W \qquad (5.23)$$

Осы өрнектен инерция күші элементтің майысу функциясы заңдылығы бойынша өзгеретіндегі көрінеді.

Майысу функциясының координаттық функциялар арқылы өрнегін

$$W=\vec{q}^T\cdot\vec{V} \qquad (5.24)$$

ескере отырып элементтің потенциалдық энергиясын анықтаймыз.

$$U=\frac{1}{2}\int_0^\ell\frac{M^2dx}{EJ}=\frac{\vec{V}^T}{2}\int_0^\ell\underbrace{(\vec{q}'')(EJ)(\vec{q}'')^T\,dx}_{K_1}\cdot\vec{V} \qquad (5.25)$$

Инерция күшінің жұмысы

$$B=\frac{1}{2}\int_0^\ell W\cdot q^u=\frac{\vec{V}^T}{2}\int_0^\ell\underbrace{\vec{q}(-m\omega^2)\vec{q}^T dx}_{K_2}\cdot\vec{V} \qquad (5.26)$$

Түйіндік күштер жұмысы

$$A = \frac{1}{2}\vec{V}^T \cdot \vec{F} \tag{5.27}$$

Элемент тепе-теңдікте болғандықтан

$$A = U + B \tag{5.28}$$

Осы өрнектен (5.25) – (5.27) ескере отырып және бәрін $\frac{1}{2}\vec{V}^T$ қысқартқанда мына негізгі тәуелділік алынады:

$$\vec{F} = (K_1 - K_2)\cdot\vec{V}\,, \tag{5.29}$$

мұнда K_1-элементтің иілуіндегі, ал K_2-оның еркін тербелісіндегі қатаңдық матрицалары болып табылады.

Координаттық функциялардың мәндерін ескере отырып және өлшемсіз параметрлерді

$$\begin{gathered} \ell_0 = \frac{\ell}{L}, W = \frac{\hat{W}}{L}, \gamma = \frac{J}{J_0}, F = \frac{\hat{F}L^2}{EJ_0} \\ M = \frac{\hat{M}L}{EJ_0}, \beta = K_\omega = \frac{m\omega^2 L^4}{420EJ_0}, \varphi = \hat{\varphi} \end{gathered} \tag{5.30}$$

енгізу арқылы (5.29) тәуелділікті былайша жазуға болады.

$$\vec{F} = K\cdot\vec{V};\;\; K = \gamma\cdot\overset{\circ}{K} - \beta\cdot\overset{\vee}{K}\,, \tag{5.31}$$

мұнда K - элементтің жалпы қатаңдық матрицасы; β - тербеліс параметрі; J_0 - негізгі өстік момент инерциясы; L - арқалықтың ұзындығы; $\hat{W}, \hat{F}, \hat{M}, \hat{\varphi}$ - өлшемді параметрлер (майысу, көлденең күш, момент, айналу бұрышы); ℓ - элементтің өлшемді ұзындығы.

Жалпы қатаңдық матрицасының (K) құраушы матрицалары былайша анықталады

$$\begin{gathered} \overset{\circ}{K} = \frac{1}{\ell_0^3}\begin{bmatrix} 12 & 6\ell_0 & -12 & 6\ell_0 \\ 6\ell_0 & 4\ell_0^2 & -6\ell_0 & 2\ell_0^2 \\ -12 & -6\ell_0 & 12 & -6\ell_0 \\ 6\ell_0 & 2\ell_0^2 & -6\ell_0 & 4\ell_0^2 \end{bmatrix}; \\ \overset{\vee}{K} = \ell_0\begin{bmatrix} 156 & 22\ell_0 & 54 & -13\ell_0 \\ 22\ell_0 & 4\ell_0^2 & 13\ell_0 & -3\ell_0^2 \\ 54 & 13\ell_0 & 156 & -22\ell_0 \\ -13\ell_0 & -3\ell_0^2 & -22\ell_0 & 4\ell_0^2 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{5.32}$$

Элементтің негізгі тәуелділігін (2.77) ескере отырып және $\vec{F} \to 0,\; \gamma\overset{0}{K} \to A,\; \overset{\vee}{K} \to B, \vec{V} \to \bar{u}$ ұмтылдыра отырып арқалықтың негізгі тәуелділігін мына түрде жазуға болады

$$(A - \beta B)\bar{u} = 0\,, \tag{5.33}$$

мұнда A - арқалықтың иілуіндегі, ал B - оның еркін тербелісіндегі қатаңдық матрицалары; β - арқалықтың еркін тербеліс параметрі; $\bar{u}$ - арқалықтың түйіндер жылжулар векторы.

Осы теңдеуді шешу арқылы β және $\bar{u}$ анықталады. Өмірде β параметрінің ең кіші мәні керек болады, себебі сыртқы күш жиілігі арқалықтың ең кіші еркін тербеліс жиілігімен тең болғанда қауіпті резонанс құбылысы пайда болады.

Арқалықтың негізгі тәуелділігі (теңдеуі) (5.33) былайша шешіледі:
а) осы теңдеудің анықтауышы нөлге теңестіріліп $\det|A-\beta B|=0$ β параметріне қатысты алгебралық теңдеу алынады. Осы теңдеудің ең кіші түбірі $\beta_{\min}$ анықталады;

б) біртекті n ретті алгебралық теңдеулер жүйесінен (5.33) бір теңдеу (соңғы) алынып тастап ол біртексіз $n-1$ ретті теңдеулер жүйесіне келтіріледі (алынған жолға сәйкес бағана оң жаққа шығарылады). Алынған теңдеулер жүйесін шешу арқылы арқалықтың түйіндер жылжулары $\bar{u}$ анықталады.

Өзектік жүйенің еркін тербелісін ақырлы элементтер әдісімен есептеу алгоритмі.

Жазықтықтағы кез келген өзектік жүйенің еркін тербелісі былайша анықталады:
1) Жүйе ақырлы элементтерге бөлінеді;
2) Жүйенің элементтері мен түйіндері нөмірленеді;
3) Түйіндер жылжулар бағыттары қабылданып алынады;
4) Түйіндер жылжулар векторлары және элементтердің қатаңдық матрицалары жасақталынады;
5) Элементтің негізгі тәуелділігін қолдану арқылы жүйенің негізгі тәуелділігі біртекті алгебралық теңдеулер жүйесі түрінде алынады;
6) Негізгі теңдеулер жүйесін шешу арқылы ең кіші еркін тербеліс параметрі мен жүйе түйіндерінің жылжулар векторы табылады;
7) Түйіндер жылжулар мәні бойынша еркін тербеліс пішіні тұрғызылады.

Енді осы алгоритмді мысал түрінде топсалы арқалыққа қолданып көрелік. Арқалықты екі элементке бөлгенде, оның байланыстарын және симметриялық деформациясын ескергенде түйіндер жылжулар векторы былайша болмақ:

$$\bar{V}^{(1)}=\begin{vmatrix}0\\ \varphi_1\\ W_2\\ 0\end{vmatrix} \tag{5.34}$$

Осы элементтің қатаңдық матрицасы (5.31) және (5.32) формулалары бойынша анықталады.

Негізгі тәуелділікті (5.31) қолдану арқылы мынандай теңдеулер аламыз

$$\begin{aligned}\vec{F}_2^{(1)}&=\bar{K}_2^{(1)}\cdot V^{(1)}=0:\ (4/\ell_0-\beta 4\ell_0^3)\varphi_1+(-6/\ell_0^2-\beta 13\ell_0^2)W_2=0\\ \vec{F}_3^{(1)}&=\bar{K}_3^{(1)}\cdot V^{(1)}=0:(-6/\ell_0^2-\beta 13\ell_0^2)\varphi_1+(12/\ell_0^3-\beta 156\ell_0)W_2=0\end{aligned} \tag{5.35}$$

Енді осы теңдеулердің анықтауышын нөлге теңестіреміз.

$$\Delta=-\left(-6/\ell_0^2-\beta 13\ell_0^2\right)^2+48\left(1/\ell_0^3-13\beta\ell_0\right)\left(1/\ell_0-\beta\ell_0^2\right)=0,$$

Онда мынандай теңдеу алынады:

$$12\left(\ell_0^4-828\beta+455\ell_0^4\beta^2\right)=0 \tag{5.36}$$

Бұл теңдеудің түбірлері $\left(\ell_0=\dfrac{1}{2}\right)$

$$\beta_{1,2}=\frac{1}{455}(6624\pm 6517{,}6388);\ \beta_{\min}=0{,}233761 \tag{5.37}$$

Дөңгелектің жиілік (2.76)

$$\omega^2 = 420 \cdot \beta_{\min} \frac{EJ_0}{mL^4} = 98{,}1795\left(\pi^4\right)\frac{EJ_0}{mL^4} \qquad (5.38)$$

Бұл нәтиженің алшақтығы 0,79% (жақшаның ішінде оның дәл шешімі көрсетілген).

Енді (5.35) жүйенің бір теңдеуін алып тастап мына нәтиже алынады

$$\varphi_1 = \frac{\left(6/\ell_0^2 - 13\beta_{mib}\ell_0^2\right)}{\left(4/\ell_0 - 4\beta_{mib}\ell_0^3\right)} W_2 \qquad (5.39)$$

Осы жылжулар арқылы $W_2 = 1$ және (5.39) арқалықтың еркін тербеліс пішіні тұрғызылады. Өмірде жиі кездесетін конструкцияларды есептеу үшін компьютерге арналған бағдарлама құру қажет.

Негізгі әдебиеттер:

1. Ахажанов С.Б., Нурланова Б.М. Конструкция есебін автоматтандыру: оқу құралы. – Қарағанды: «Типография Арко» ЖШС баспасы, 2020. – 135 бет.

2. Тухфатуллин Б.А. Численные методы расчёта строительных конструкций: учебное пособие. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2017. – 100 с.

3. Трушин С.И. Строительная механика: метод конечных элементов: учебное пособие. – Москва: Изд-во НИЦ ИНФРА-М, 2019. – 305 с.

4. Андреев В.Б. Лекции по методу конечных элементов: учебное пособие. -М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова МАКС Пресс, 2010. - 2-е изд., испр. и доп. - 264 с.

5. Карпиловский В.С. Метод конечных элементов и задачи теории упругости. – Киев: «Софія А», 2022. – 275 с.

6. Тұрсынов К.А. Құрылыс механикасындағы ақырлы элементтер әдісі: оқу құралы.-Қарағанды: ҚарМУ,2004.-53 б.

7. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред.- М.: Недра, 1974. – 240 с.

8. Елешова А.Е. Ақырлы элементтер әдісі: оқу құралы.-Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 2010.-129 б.

Қосымша әдебиеттер:

1. Жадрасынов Н.Т., Винокуров Л.П. Құрылыс механикасы. - Қарағанды: ҚарМТУ, 2001. - 224 б.

2. Байнатов Ж. Құрылыс механикасы (ғимараттарды динамикаға, сейсмикаға және тұрақтылыққа есептеу). - Алматы: Республикалық баспа кабинеті, 1996. - 235 б.

3. Түсіпов А. Құрылыс механикасының негіздері. - Алматы: Қазақ ұлттық техникалық университеті, 1995. - 121 б.

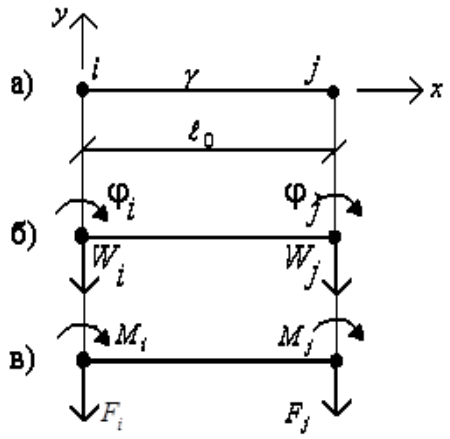
№6 дәріс. ***Жалпыланған сызықтық ақырлы элемент.***

Жоспар:

1. Жалпыланған сызықтық ақырлы элементтің қатаңдық матрицасы.
2. Топсалы тірелген арқалықты динамикалық күш әсеріне есептеу.

Жалпылаған сызықтық ақырлы элементтің қатаңдық матрицасы

Жазықтықтағы өзектік жүйеден бір элементті бөліп алып, оны жергілікті координаттық жүйеде қарастырайық (6.1.а-сурет). Бұл элементтің деформациялық күйі түйіндер жылжуларымен $(w_i, \varphi_i, w_j, \varphi_j)$ анықталады (6.1.б-сурет), ал оның кернеулік күйі түйіндер күштерімен (F_i, M_i, F_i, M_j) табылады (6.1.в-сурет).



6.1-сурет. Жалпыланған сызықтық ақырлы элемент

Қарастырылып отырған элементтің негізгі тәуелділігі

$$\vec{F} = K \cdot \vec{V}, \quad K = \gamma \overset{\circ}{K} - \alpha \hat{K} - \beta \check{K}$$
$$\vec{F}^T = \begin{vmatrix} F_i & M_i & F_j & M_j \end{vmatrix}, \vec{V}^T = \begin{vmatrix} W_i & \varphi_i & W_j & \varphi_j \end{vmatrix}, \tag{6.1}$$

мұнда $\vec{F}, \vec{V}$ - түйіндер күштері мен жылжуларының векторлары; K- жалпы қатаңдық матрицасы; α, β, γ - негізгі параметрлер; $\overset{\circ}{K}, \hat{K}, \check{K}$- әртүрлі себептерді сипаттайтын матрицалар.

Жалпыланған матрицаның құраушы матрицалары және негізгі параметрлері былайша анықталады:

$$\overset{\circ}{K} = \frac{1}{\ell_0^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell_0 & -12 & 6\ell_0 \\ 6\ell_0 & 4\ell_0^2 & -6\ell_0 & 2\ell_0^2 \\ -12 & -6\ell_0 & 12 & -6\ell_0 \\ 6\ell_0 & 2\ell_0^2 & -6\ell_0 & 4\ell_0^2 \end{bmatrix};$$

$$\hat{K} = \frac{1}{\ell_0} \begin{bmatrix} 36 & 3\ell_0 & -36 & 3\ell_0 \\ 3\ell_0 & 4\ell_0^2 & -3\ell_0 & -\ell_0^2 \\ -36 & -3\ell_0 & 36 & -3\ell_0 \\ 3\ell_0 & -\ell_0^2 & -3\ell_0 & 4\ell_0^2 \end{bmatrix}$$

$$\check{K} = \ell_0 \begin{bmatrix} 156 & 22\ell_0 & 54 & -13\ell_0 \\ 22\ell_0 & 4\ell_0^2 & 13\ell_0 & -3\ell_0^2 \\ 54 & 13\ell_0 & 156 & -22\ell_0 \\ -13\ell_0 & -3\ell_0^2 & -22\ell_0 & 4\ell_0^2 \end{bmatrix}; \tag{6.2}$$

$$\ell_0 = \frac{\ell}{L} = \frac{1}{n};\ W = \frac{\hat{W}}{L};$$

$$\gamma = \frac{J}{J_0};\ \alpha = \frac{\hat{N}\,L^2}{30EJ_0};$$

$$\beta = \frac{rL^4}{420EJ_0}; F = \frac{\hat{F}\,L^2}{EJ_0}; M = \frac{\hat{M}\,L}{EJ_0}; \varphi = \hat{\varphi},$$

мұнда $L; EJ_0; J_0$ - жүйенің ұзындығы, иілу қатаңдығы және өстік момент инерциясы; $\hat{N}, \hat{F}, \hat{M}$ - элементтің бойлық және көлденең күштері мен иілу моменті; $\hat{W}, \hat{\varphi}$ - тік және бұрыштық жылжулар; ℓ, J - элементтің өлшемді ұзындығы мен өстік момент инерциясы; ℓ_0, W, φ - элементтің өлшемсіз ұзындығы мен тік жылжуы және бұрыштық жылжуы; n - жүйенің бөлінгендегі элементтер саны; r - жайылған күштің бірлік ауданындағы қарқындылығы.

Сөйтіп (6.1) жалпылаған элементтің өлшемсіз түрдегі негізгі тәуелділігі болып табылады. Элементтің негізгі тәуелділігін (6.1) қолдану арқылы және $\vec{F} \to \vec{P};\ \gamma \cdot \overset{o}{K} \to A;\ \hat{K} \to B;\ \check{K} \to c;\ \vec{V} \to \vec{u}$ ұмтылдыра отырып жүйенің негізгі тәуелділігі алынады

$$(A - \alpha \cdot B - \beta \cdot C)\,\vec{u} = \vec{P}, \tag{6.3}$$

мұнда $\vec{u}, \vec{P}$ - жүйенің түйіндеріндегі жылжулар мен сыртқы күштер векторлары; α, β - белгілі (белгісіз) параметрлер; A, B, C - сандық матрицалар.

Осы теңдеуді шешу арқылы мынандай есептер шығарылмақ:

1. Егер $\alpha = 0, \beta = 0$ иілу есебі

$$A\vec{u} = \vec{P} \tag{6.4}$$

2. Егер $\beta = 0, \vec{P} = 0$ орнықтылық есебі

$$(A - \alpha \cdot B)\vec{u} = 0 \tag{6.5}$$

3. Егер $\alpha = 0$, $\vec{P} = 0$ еркін тербеліс есебі

$$(A - \beta \cdot C)\vec{u} = 0 \tag{6.6}$$

4. Егер $\beta = 0, \alpha = \alpha_0$ қысылып иілу есебі

$$(A - \alpha_0 \cdot B)\vec{u} = \vec{P} \tag{6.7}$$

5. Егер $\beta = \beta_0, \alpha = 0$ динамикалық иілу есебі

$$(A - \beta_0 \cdot C)\,\vec{u} = \vec{P} \tag{6.8}$$

6. Егер $\alpha = \alpha_0, \vec{P} = 0$ қысылып тербелу есебі

$$(A - \alpha_0 \cdot B - \beta \cdot C)\vec{u} = 0 \tag{6.9}$$

7. Егер $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ динамикалық қысылып иілу есебі

$$(A - \alpha_0 \cdot B - \beta_0 \cdot C)\vec{u} = \vec{P} \tag{6.10}$$

Сөйтіп (6.3) теңдеуі бойынша өзектік жүйенің кез келген есептерін

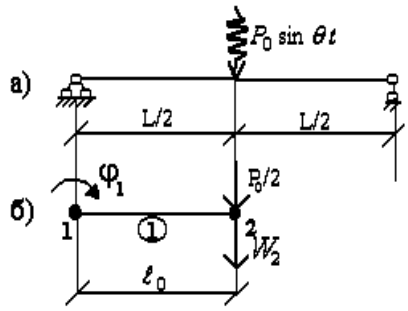
шығаруға болады. Айта кететін жәй параметрлердің α_0, β_0 мәндері есептің қойылуына тәуелді болады. Енді жоғарғыдағы көрсетілген есептерді мысал түрінде қарастырып көрелік.

Топсалы тірелген арқалықты динамикалық күш әсеріне есептеу

Мысал. Есептің қойылуы: топсалы арқалықтың (6.2.а-сурет) есебін жалпы түрде шығару керек. Арқалыққа әсер ететін динамикалық күш мына түрде болсын:

$$P(t) = \overline{P}_0 \sin\theta t, \tag{6.11}$$

мұнда $\overline{P}_0$ - күштің өлшемді мәні; θ - сыртқы күштің дөңгелектік жиілігі.



6.2-сурет. Топсалы тірелген арқалық

Осы арқалықтың ұзындығы L, иілу қатаңдығы EJ_0 белгілі деп санаймыз. Арқалықты екі элементке ($n = 2$) бөліп, оның тек қана бір элементін (симметрияны және байланыстарды ескерсек) қарастырамыз (6.2.б-сурет).

Арқалықтың иілу қатаңдығы тұрақты болғандықтан ($\gamma = 1$) және оны екі элементке бөлеміз ($n = 2; \ell_0 = \frac{1}{2}$). Түйіндік жылжулар векторы (6.2.б-сурет) бойынша

$$\overline{V}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_1 \\ W_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

Негізгі тәуелділікті (6.1) және (6.2) мен (6.12) қолдана отыра жылжулар бойындағы тепе-теңдік теңдеулерін аламыз:

$$\begin{aligned} &1)\ \ \varphi_1: \ \ \vec{F}_2^{(1)} = K_2^{(1)} \vec{V}^{(1)} = 0 \\ &2)\ \ W_2: \ \ \vec{F}_3^{(1)} = K_3^{(1)} \vec{V}^{(1)} = 0 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Осы өрнектерді ашып жазғанда (6.3) теңдеудің скалярлық түрі алынады:

$$\begin{aligned} &1)\ \left(\frac{4}{\ell_0} - \alpha \cdot 4 \cdot \ell_0 - \beta \cdot 4 \cdot \ell_0^3\right)\varphi_1 + \left(-\frac{6}{\ell_0^2} + \alpha \cdot 3 - \beta \cdot 13 \cdot \ell_0^2\right) W_2 = 0 \\ &2)\ \left(-\frac{6}{\ell_0^2} + \alpha \cdot 3 - \beta \cdot 13 \cdot \ell_0^2\right)\varphi_1 + \left(\frac{12}{\ell_0^3} - \alpha \cdot \frac{36}{\ell_0} - \beta \cdot 156 \cdot \ell_0\right) \cdot W_2 = \frac{P_0}{2} \end{aligned} \tag{6.14}$$

Осы теңдеулердің жалпы шешімі:

$$\varphi_1 = -\frac{1(-\frac{6}{\ell_0^2} + \alpha \cdot 3 - 13\beta \cdot \ell_0^2)}{4(\frac{1}{\ell_0} - \alpha \cdot \ell_0 - \beta \cdot \ell_0^3)} \cdot W_2;$$

$$W_2 = \frac{2P_0}{\Delta}\left(\frac{1}{\ell_0} - \alpha \cdot \ell_0 - \beta \cdot \ell_0^3\right); \qquad (6.15)$$

$$\Delta = -(-\frac{6}{\ell_0^2} + \alpha \cdot 3 - 13 \cdot \beta \cdot \ell_0^2)^2 +$$

$$+ 48(\frac{1}{\ell_0^3} - \alpha \cdot \frac{3}{\ell_0} - 13\beta \cdot \ell_0)(\frac{1}{\ell_0} - \alpha \cdot \ell_0 - \beta \cdot \ell_0^3)$$

Енді жоғарыда көрсетілген есептердің (6.4) – (6.10) кейбір шешімдерін алудың жолдарын қарастырамыз:

1) Статикалық иілу (6.4).

Мәндерді ($\alpha = 0, \beta = 0$) қойсақ ($\ell_0 = \frac{1}{2}$)

$$\varphi_1 = \frac{3}{2\ell_0} W_2,\ \Delta = \frac{12}{\ell_0^4},\ W_2 = \frac{P_0 \ell_0^3}{6} = \frac{P_0}{48} \qquad (6.16)$$

Енді (6.2) белгілеулерді және (6.16) қолдана отырып есептің өлшемді түріндегі шешімін аламыз

$$\hat{W}_2 = W_2 \cdot L = \frac{L}{48}\left(\hat{P}_0 \frac{L^2}{EJ_0}\right) = \frac{\hat{P}_0 L^3}{48EJ_0}$$

$$\varphi = \hat{\varphi}_1 = 3W_2 = \frac{P_0}{16} = \frac{\hat{P}_0 L^2}{16EJ_0} \qquad (6.17)$$

Алынған нәтиже дәл әдісті қолданғандағы шешіммен бірдей болып шығады.

2) Орнықтылық (6.5).

Мәндерді $P_0 = \beta = 0$ (6.15) жалпы шешіміне қоямыз. Онда анықтауышты нөлге теңестіріп, теңдеудің түбірлерін табамыз:

$$\Delta = -\left(-\frac{6}{\ell_0^2} + \alpha \cdot 3\right)^2 + 48\left(\frac{1}{\ell_0^3} - \alpha \cdot \frac{3}{\ell_0}\right)\left(\frac{1}{\ell_0} - \alpha \cdot \ell_0\right) =$$

$$= \frac{12}{\ell_0^4} - \frac{156\alpha}{\ell_0^2} + 135\alpha^2 = 192 - 624\alpha + 135\alpha^2 = 0 \qquad (6.18)$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{135}(312 \pm 267{,}2527);\ \alpha_{\min} = 0{,}3315.$$

Енді (6.2) бойынша күдікті күшті (Эйлер күшін) анықтаймыз

$$\hat{N} = \alpha_{\min} \cdot 30\frac{EJ_0}{L^2} = 9{,}9439(\pi^2)\frac{EJ_0}{L^2} \qquad (6.19)$$

Бұл шешімнің дәл шешімінен алшақтығы 0,75% болады.

3) Еркін тербеліс (6.6).

Мәндерді ($P_0 = \alpha = 0$) (6.15) өрнегіне қойсақ, онда анықтауыштан мынандай теңдеу алынады:

$$\Delta = -(-\frac{6}{\ell_0^2} - 13\ell_0^2\beta)^2 + 48(\frac{1}{\ell_0^3} - 13\ell_0 \cdot \beta)(\frac{1}{\ell_0} - \ell_0^3\beta) =$$
$$= \frac{12}{\ell_0^4} - 828\beta + 455\ell_0^4\beta^2 = 0 \qquad (6.20)$$

$$\beta^2 - \frac{13248}{455}\beta + \frac{3072}{455} = 0$$

Бұл теңдеудің түбірлері

$$\beta_{1/2} = \frac{1}{455}(6624 \pm 6517{,}6388),\ \beta_{\min} = 0{,}2338 \qquad (6.21)$$

Енді (6.2) өрнегі бойынша ($r = \rho \cdot F \cdot \omega^2$) тербелістің өзіндік жиілігін анықтаймыз.

$$\omega^2 = 420 \cdot \beta_{\min} \frac{EJ_0}{\rho \cdot F \cdot L^4} = 98{,}1795(\pi^4)\frac{EJ_0}{\rho \cdot F \cdot L^4} \qquad (6.22)$$

Бұл шешімнің дәл шешімнен (жақшаның ішіндегі) алшақтығы 0,79%.

4) Қысылып иілу (6.7).

Бұл жағдайда қысу күші күдікті күштің 0,6 бөлігін құрайды деп санап (6.19) бойынша α_0 параметрін анықтаймыз $P = 0{,}6 \cdot \hat{N},\ \alpha_0 = 0{,}6 \cdot \alpha_{\min} = 0{,}1989$. Сонан соң ($\beta = 0$) ескере отырып (6.15) өрнегінен өлшемсіз жылжуларды анықтаймыз

$$\Delta = 73{,}24;\ b = \frac{1}{\ell_0} - \ell_0 \cdot \alpha_0 = 1{,}9006$$
$$W_2 = \frac{2P_0}{\Delta} b = 0{,}0159 \cdot P_0 (0{,}0208 \cdot P_0) \qquad (6.23)$$
$$\varphi_1 = 0{,}1597 \cdot P_0 (0{,}0625 \cdot P_0)$$

Жақшаның ішінде (6.16) шешімі көрсетілген. Бұл салыстырудан қысылып иілген арқалық, иілген арқалықтан көрі майысқақ болып табылады.

5) Динамикалық иілу (6.8).

Мына мәндерді ($\beta_{\min}$ (6.21) бойынша алынады) $\alpha = 0; \theta = 0{,}6\omega_{\min}; \beta_0 = 0{,}36\beta_{\min} = 0{,}0842$. (6.15) шешіміне қойсақ, онда жылжулар

$$\Delta = 122{,}5219;\ b = \frac{1}{\ell_0} - \ell_0^3 \cdot \beta_0 = 1{,}3268$$
$$W_2 = \frac{2P_0}{\Delta} b = 0{,}0217 \cdot P_0 (0{,}0208 \cdot P_0) \qquad (6.24)$$
$$\varphi_1 = 4{,}5738 W_2 = 0{,}0991 P_0 (0{,}0625 \cdot P_0)$$

Бұл шешімнен динамикалық иілудегі жылжулар статикалық иілудегі жылжулардан (олар жақшаның ішінде көрсетілген) үлкен болатындығын көруге болады.

Жүктеменің динамикалық, уақыт өте құрылыс элементтері үдеуін арттыратын әсерін қарастырғанда, пайда болатын инерция күші ескеріледі. Барлық динамикалық жүктемелер тербеліс туғызады, олар қайталанатын болады.

Үздіксіз әсер ететін күш жоқ болғанда, тербелістер меншікті деп аталады.

Арқалық тербелістері туралы есеп қарастырайық, айталық, кіші тербелістер майысу жазықтығында өтеді және көлденең қима көлемі

ұзындыққа қарағанда, елеулі емес. Арқалық осі түзу сызықты деп алынса, және массасы берілген заң бойынша берілген

$$\bar{m} = \frac{p}{g}$$

мұндағы $\bar{m}$ – арқалықтың погонды массасы; p – арқалық ұзындығының салмақ бірлігі; g – ауырлық күшінің үдеуі.

Кездейсоқ себеппен t уақыт моментінде арқалық вертикалды жазықтықта жылжиды. Арқалықтың динамикалық серпімді сызық ординаталары W екі тәуелсіз айнымалы функциялары болады, x - абциссасы, және t уақыт:

$$\mathrm{W} = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$$

арқалықтың элементар элементіне инерция күші әсер ететінін ескерсек,

$$q_u = -\bar{m}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

және гармоникалық заң бойынша қарқындылықты жүктеме ауытқушы $q_B = q_0(x)\sin(\theta t)$, мұндағы $q_0(x)$ – амплитудалық мән; θ - ауытқушы жүктеменің шеңберлік жиілігі $q = q_B + q_u$ болғанда, арқалықтың айнымалы қимасының көлденең тербелістерінің теңдеуін аламыз:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EI\frac{\partial^2 W}{dx^2}) + \bar{m}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q_0(x)\sin(\theta t)$$

түріндегі шекаралық шарттар арқалықтың соңдарында орындалады, бастапқы шарттар $t = 0$ болғанда:

$$W(x,0) = \bar{W}_0 \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = V_0$$

мұндағы $\bar{W}_0$ - бастапқы майысу; V – бастапқы жылдамдық.

Тербелмелі өзектің ақырлы элементі.

Формулалар бойынша анықтаймыз:

а) кинетикалық энергия:

$$T = -\frac{\{V\}^T}{2} m\omega^2 \left\{ \int_0^L \{q\}(mF)\{q\}^T dx \right\} \{V\}$$

б) түйіндік күштер жұмысы:

$$A = \frac{1}{2}\{V\}^T \cdot \{R\}$$

мұндағы $\{R\} = \begin{Bmatrix} \{R\}_i \\ \{R\}_j \end{Bmatrix}$ - ақырлы элементтің түйінді күштер векторы; $\{R\}_i = \begin{Bmatrix} F \\ M_i \end{Bmatrix}$ - i-ші түйіннің түйінді күш векторы; $\{R\}_j = \begin{Bmatrix} F_j \\ M_j \end{Bmatrix}$ - j-ші түйін үшін тура солай.

Ақырлы элементтің тепе-теңдік шарттары бойынша $A = T$ негізгі тәуелділік бар,

$$\{R\} = [k]\{V\}$$

мұндағы $[k]$ - ақырлы элементтің қатаңдық матрицасы, ол келесі түрде:

$$[k] = -m\omega^2 \left\{ \int_0^L \{q\}(F)\{q\}^T \, dx \right\}$$

$$[k] = -\frac{m\omega^2 F}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Қарастырылған мысал арқылы ақырлы элементтер әдісімен қарапайым арқалықты есептеуді жүргізу жолы көрсетілген. Өмірде жиі кездесетін күрделі арқалықтарды ақырлы элементтер әдісімен есептеу үшін алгоритмдік тілді қолдану арқылы бағдарлама құрып, есептеуді компьютер арқылы толық автоматтандыру керек.

Сөйтіп, қарастырылған жалпылаған элементі қолдану арқылы арқалықтың әр қилы есептерін оңай шығаруға болады.

Негізгі әдебиеттер:

1. Ахажанов С.Б., Нурланова Б.М. Конструкция есебін автоматтандыру: оқу құралы. – Қарағанды: «Типография Арко» ЖШС баспасы, 2020. – 135 бет.

2. Тухфатуллин Б.А. Численные методы расчёта строительных конструкций: учебное пособие. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2017. – 100 с.

3. Трушин С.И. Строительная механика: метод конечных элементов: учебное пособие. – Москва: Изд-во НИЦ ИНФРА-М, 2019. – 305 с.

4. Андреев В.Б. Лекции по методу конечных элементов: учебное пособие. -М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова МАКС Пресс, 2010. - 2-е изд., испр. и доп. - 264 с.

5. Карпиловский В.С. Метод конечных элементов и задачи теории упругости. – Киев: «Софія А», 2022. – 275 с.

6. Тұрсынов К.А. Құрылыс механикасындағы ақырлы элементтер әдісі: оқу құралы.-Қарағанды: ҚарМУ,2004.-53 б.

7. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред.- М.: Недра, 1974. – 240 с.

8. Елешова А.Е. Ақырлы элементтер әдісі: оқу құралы.-Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 2010.-129 б.

Қосымша әдебиеттер:

1. Жадрасынов Н.Т., Винокуров Л.П. Құрылыс механикасы. - Қарағанды: ҚарМТУ, 2001. - 224 б.

2. Байнатов Ж. Құрылыс механикасы (ғимараттарды динамикаға, сейсмикаға және тұрақтылыққа есептеу). - Алматы: Республикалық баспа кабинеті, 1996. - 235 б.

3. Түсіпов А. Құрылыс механикасының негіздері. - Алматы: Қазақ ұлттық техникалық университеті, 1995. - 121 б.

№7 дәріс. ***Күрделі конструкцияларды ақырлы элементтер әдісімен есептеу.***

Жоспар:

1. Майысқақ арқалықты ақырлы элементтер әдісімен есептеу.
2. Серпімділік негіздегі және дәлденген ақырлы элемент.

Майысқақ арқалықты ақырлы элементтер әдісімен есептеу

Бұдан бұрын ақырлы элементтер әдісі қатты конструкцияларды есептеуге қолданған болатын. Оларды жалпы жағдайда (6.1) негізгі тәуелділігі қолдану арқылы есептеуге болатындығы көрсетілген (6.1 тармақта). Өмірде қатты конструкциялармен қатар майысқақ конструкциялар жиі кездеседі. Осы конструкцияларды басқа әдістермен есептегенде көп қиындықтар кездеседі. Енді майысқақ конструкцияларды есептеу үшін ақырлы элементтер әдісін қолданып көрелік. Бұл конструкцияларда бойлық күш екі жылжуға тәуелді болады

$$N = EA\left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dx}\right)^2\right], \tag{7.1}$$

мұнда EA - созылу (қысылу) қатаңдығы; $u(x)$ - бойлық жылжу функциясы; $W(x)$ - майысу функциясы.

Енді осы конструкциядан бір элементті бөліп алсақ (6.1-сурет) және $u(x)$ мен $W(x)$ бұрынғы мәндерін қолдансақ, онда (7.1) өрнегінің интегралы былай болады.

$$\alpha_0 = \gamma\left[\frac{(u_j - u_i)}{l_0} + \frac{1}{60\ell_0}\vec{V}^T \cdot \overset{0}{K} \cdot \vec{V}\right], \tag{7.2}$$

$$\gamma = \frac{A}{A_0};\ \alpha_0 = \frac{N}{EA_0}$$

мұнда A_0 - базалық (негізгі) көлденең қиманың ауданы; α_0 - өлшемсіз бойлық күш; $\overset{0}{K}$ - элементтің қатаңдық матрицасы (6.2); $\vec{V}$ - оның түйіндік жылжулар векторы; $g = \vec{V}^T \cdot \overset{0}{K} \cdot \vec{V}$ - элементтің геометриялық сызықсыз параметрі.

Бұл параметрдің өрнегі жалпы жағдайда былайша анықталады:

$$\begin{aligned} g = \vec{V}^T \cdot \overset{0}{K} \cdot \vec{V} = \frac{1}{\ell_0}[&36 \cdot W_i^2 + 6 \cdot \ell_0 \cdot W_i \cdot \varphi_i - 72 \cdot W_i \cdot W_j + \\ &+ 6 \cdot \ell_0 \cdot W_i \cdot \varphi_j + 4 \cdot \ell_0^2 \cdot \varphi_i^2 - 6 \cdot \ell_0 W_j \cdot \varphi_i - 2 \cdot \ell_0^2 \cdot \varphi_i \cdot \varphi_j +, \\ &+ 36 \cdot W_j^2 - 6 \cdot \ell_0 \cdot W_j \varphi_j + 4 \cdot \ell_0^2 \cdot \varphi_j^2] \end{aligned} \tag{7.3}$$

мұнда ℓ_0 - элементтің өлшемсіз ұзындығы.

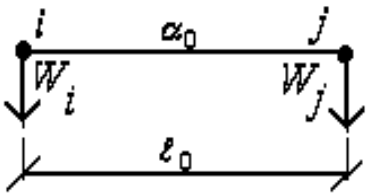
Егер бойлық жылжуды ескермесек, онда өлшемсіз бойлық күш (7.2) былайша жазылады:

$$\alpha_0 = \gamma \cdot \frac{g}{60 \cdot \ell_0} \tag{7.4}$$

Бұл параметр элементтің иілуінде пайда болатын жылжуларға тәуелді болады. Енді (6.1) тәуелділіктегі α параметрінің орнына α_0 қойсақ, онда осы

тәуелділік бойынша майысқақ конструкцияларды ақырлы элементтер әдісімен есептеуге болатындығы көрінеді.

Ең қарапайым майысқақ конструкция болып майысқақ сым табылады. Одан бір элементті бөліп алып жеке қарастырайық (7.1-сурет).



7.1-сурет. Майысқақ сымның ақырлы элементі

Бұл жағдайда негізгі тәуелділік былайша жазылады.

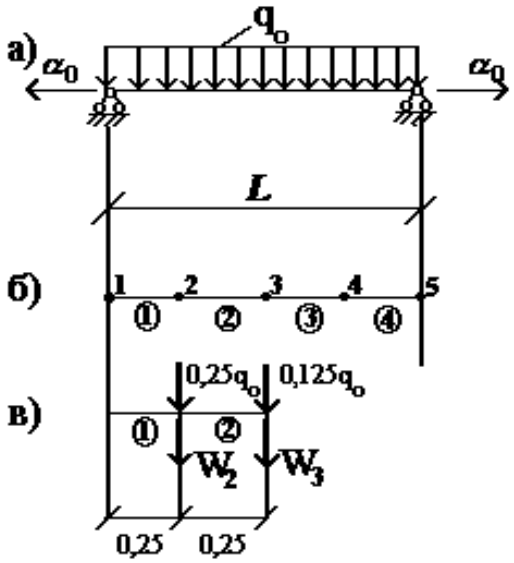
$$\underbrace{\begin{vmatrix} F_i \\ F_j \end{vmatrix}}_{\vec{F}} = \underbrace{\frac{\alpha_0}{\ell_0}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\overset{0}{K}} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} W_i \\ W_j \end{vmatrix}}_{\vec{V}} \tag{7.5}$$

$$\alpha_0 = 1 + g; \quad g = \frac{1}{\ell_0}\left(W_i^2 - 2W_iW_j + W_j^2\right),$$

мұнда g - элементтің сызықсыз геометриялық параметрі.

Егер $g = 0$, онда $\alpha_0 = 1$, сондықтан майысқақ сым қатты сымға айналады.

Мысал. Енді ақырлы элементтер әдісімен майысқақ сымды (7.2.а-сурет) есептеп көрелік. Сымды төрт элементке бөліп, оның элементтерін және түйіндерін нөмірлейміз (7.2.б-сурет). Жайылған жүктемені шоғырланған күштерге келтіріп және симметрияны ескеріп, сымның тек жартысын ғана қарастырамыз (7.2.в-сурет).



7.2-сурет. Майысқақ сым

Түйіндік жылжулар векторларын және элементтердің қатаңдық матрицаларын жасақтаймыз:

$$\bar{V}^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 \\ W_2 \end{vmatrix}; \bar{V}^{(2)} = \begin{vmatrix} W_2 \\ W_3 \end{vmatrix}; K^{(1)} = \frac{\alpha_0^{(1)}}{\ell_0} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; K^{(2)} = \frac{\alpha_0^{(2)}}{\ell_0} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \tag{7.6}$$

Түйіндік жылжулардың тепе-теңдік теңдеулерін құрамыз:

$$\begin{aligned} &а)\ W_2 : \vec{F}_2^{(1)} + \vec{F}_1^{(2)} = 0{,}25q_0 : \left(\alpha_0^{(1)} + \alpha_0^{(2)}\right)W_2 - \alpha_0^{(2)}W_3 = 0{,}25q_0\ell_0 \\ &б)\ W_3 : \vec{F}_2^{(2)} = 0{,}125q_0 : \ -\alpha_0^{(2)}W_2 + \alpha_0^{(2)}W_3 = 0{,}125q_0\ell_0 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Осы теңдеулерді шешіп жылжуларды анықтаймыз:

$$W_2 = \frac{3}{8\alpha_0^{(1)}} q_0\ell_0; W_3 = \left(\frac{3}{\alpha_0^{(1)}} + \frac{1}{\alpha_0^{(2)}}\right) \cdot \frac{q_0\ell_0}{8} \tag{7.8}$$

Егер $\alpha_0^{(1)} = \alpha_0^{(2)} = 1;\ \ell_0 = 0{,}25$, онда (қатты сым)

$$W_2 = \frac{3}{32} q_0;\ W_3 = \frac{q_0}{8} \tag{7.9}$$

Осы өрнектен $W_3 = f$ деп санап, жылжулар мен жүктемені табамыз.

$$W_3 = f; q_0 = 8f;\ W_2 = \frac{3}{4} f \tag{7.10}$$

Енді (7.10) ескере отырып (7.5) бойынша параметрлерді анықтаймыз

$$g^{(1)} = 9f^2; g^{(2)} = f^2; \alpha_0^{(1)} = 1 + 9f^2;\ \alpha_0^{(2)} = 1 + f^2 \tag{7.11}$$

Осы мәндерді (7.8) қойсақ, онда олар мына түрді қабылдайды:

$$W_2 = \frac{3f}{4\left(1+9f^2\right)};\ W_3 = \frac{f\left(1+3f^2\right)}{\left(1+9f^2\right)\left(1+f^2\right)} \tag{7.12}$$

Бұл өрнектен және (7.10)-ден сандық мәндерді анықтаймыз.

1) $f = 0;\ q_0 = 0;\ W_3 = 0;$

2) $f = \frac{1}{4};\ q_0 = 4;\ W_3 = 0{,}22;$ (7.13)

3) $f = 1;\ q_0 = 8;\ W_3 = 0{,}2;$

Осы мәндер бойынша q_0 мен W_3 арасындағы графиктерді тұрғызуға болады.

Енді майысқақ топсалы арқалықты (6.2-сурет) қарастырайық. Бұл жағдайда (6.12) векторды ескере отырып, элементтердің сызықсыз геометриялық параметрлері (7.3) бойынша мына мәндерді қабылдайды:

$$g^{(1)} = g^{(2)} = \frac{1}{\ell_0}\left[36\,W_2^2 - 6\ell_0 W_2\varphi_1 + 4\ell_0^2\varphi_1^2\right] \tag{7.14}$$

Сызықты иілудегі нәтижелерді (7.16) қолданып жылжуларды былайша жазамыз

$$\varphi_1 = f;\ W_2 = \frac{f}{3};\ P_0 = 16 \cdot f \tag{7.15}$$

Осы мәндерді (7.14)-ге қойсақ, онда $g^{(1)} = g^{(2)} = 8f$, сондықтан (7.4) бойынша ($\ell_0 = \frac{1}{2},\ \gamma = 1$)

$$\alpha_0 = \frac{1}{30} g = \frac{4}{15} f^2 = 0{,}2667f^2 \tag{7.16}$$

Енді топсалы арқалықтың жалпы шешімін (6.15) қолданып және α орнына α_0 (7.16) қойсақ, онда мынандай есептер шығаруға болады.

1) Сызықсыз иілу ($\beta = 0$). Анықтауышты (6.15) бойынша жазып, (7.16) формуласы бойынша параметрлерді табамыз:

$$\Delta = -m^2 + 48 \cdot n \cdot P;\ m = -24 - 3\alpha_0;\ \ n = 8 + 6\alpha_0;\ P = 2 + \frac{\alpha_0}{2} \qquad (7.17)$$

$$m = -24 - 0{,}81 f^2;\ \ n = 8 + 1{,}62 f^2;\ \ P = 2 + 0{,}14 f^2 \qquad (7.18)$$

Түйіндік жылжуларды анықтайтын формулаларды (6.15) арқылы жазамыз:

$$W_2 = \frac{2P_0 \cdot P}{\Delta};\ \varphi_1 = -\frac{m}{2\Delta} P_0;\ P_0 = 16 \cdot f \qquad (7.19)$$

Осы формулалар бойынша сызықсыз иілу шешімін табамыз:

1. $f = 0:\ m = -24;\ n = 8;\ P = 2;\ \Delta = 192;\ W_2 = 0;\ \varphi_1 = 0;\ P_0 = 0$
2. $f = 0{,}2:\ m = -24{,}0324;\ n = 8{,}0648;\ P = 2{,}0096;$ $\Delta = 198{,}8324;\ W_2 = 0{,}0646;\ \varphi_1 = 0{,}1933;\ P_0 = 3{,}2$
3. $f = 0{,}4:\ m = -24{,}1296;\ n = 8{,}2592;\ P = 2{,}0224;$ $\Delta = 219{,}5259;\ W_2 = 0{,}1178;\ \varphi_1 = 0{,}3517;\ P_0 = 6{,}4$ (7.20)
4. $f = 0{,}6:\ m = -24{,}2916;\ n = 8{,}5832;\ P = 2{,}0504;$ $\Delta = 254{,}5463;\ W_2 = 0{,}1546;\ \varphi_1 = 0{,}4579;\ P_0 = 9{,}6$
5. $f = 0{,}8:\ m = -24{,}5184;\ n = 9{,}0368;\ P = 2{,}0896;$ $\Delta = 305{,}2464;\ W_2 = 0{,}1754;\ \varphi_1 = 0{,}5146;\ P_0 = 12{,}8$
6. $f = 1:\ m = -24{,}81;\ n = 9{,}62;\ P = 2{,}14;$ $\Delta = 372{,}6303;\ W_2 = 0{,}184;\ \varphi_1 = 0{,}5328;\ P_0 = 16$

Алынған (7.20) шешім бойынша өлшемсіз күш P_0 пен өлшемсіз жылжу φ_1 арасындағы графикті тұрғызуға болады. Айта кететін жәй: егер сызықты иілуде график түзу болса, ол график сызықсыз иілуде қисық болмақ.

2) Сызықсыз орнықтылық (кейінгі күдікті деформация). Арқалыққа арналған параметрлердің мәндерін (7.14), (7.16), (7.18) қолданып, анықтауышты (6.15) мына түрде жазамыз:

$$\Delta = -(m + 3\alpha)^2 + 48(n - 6\alpha)\left(P - \frac{\alpha}{2}\right) \qquad (7.21)$$

Осы анықтауышты нөлге теңестіріп (квадраттық) теңдеу аламыз:

$$\alpha^2 - 2a\alpha + b^2 = 0$$

Бұл теңдеудің түбірлері келесіге тең болады.

$$\alpha_{1/2} = a \pm \sqrt{a^2 - b^2};$$
$$a = \frac{1}{135}\left[3m + 24\left(6P + \frac{n}{2}\right)\right];\ b^2 = \frac{1}{135}\left(-m^2 + 48 \cdot n \cdot P\right), \qquad (7.22)$$

мұнда m, n, P бұрынғыша (7.18) формуласы бойынша анықталады.

Осы формулалар бойынша сызықсыз орнықтылықтың шешімін табамыз:

1. $f = 0: m = -24; n = 8;\ P = 2; a = \frac{312}{135};\ b^2 = \frac{192}{135}$
   $\alpha_{1/2} = \frac{1}{135}[312 \pm 267{,}2527];\ \alpha_{\min} = 0{,}3315$
2. $f = 0{,}2: m = -24{,}0324; n = 8{,}0648;\ P = 2{,}0056; a = \frac{313{,}4868}{135};$
   $b^2 = \frac{198{,}8324}{135};\ \alpha_{1/2} = \frac{1}{135}[313{,}4868 \pm 267{,}2669];\ \alpha_{\min} = 0{,}3424$

3. $f=0{,}4: m=-24{,}1296; n=8{,}2592;\ P=2{,}0224; a=\dfrac{317{,}9472}{135};$

$b^2=\dfrac{219{,}5259}{135};\ \alpha_{1/2}=\dfrac{1}{135}\left[317{,}9472\pm 267{,}3096\right];\ \alpha_{\min}=0{,}3751$

4. $f=0{,}6: m=-24{,}2916; n=8{,}5832;\ P=2{,}0504; a=\dfrac{325{,}3812}{135};$ (7.23)

$b^2=\dfrac{254{,}6699}{135};\ \alpha_{1/2}=\dfrac{1}{135}\left[325{,}3812\pm 267{,}3808\right];\ \alpha_{\min}=0{,}4296$

5. $f=0{,}8: m=-24{,}5184; n=9{,}0368;\ P=2{,}0896; a=\dfrac{335{,}7888}{135};$

$b^2=\dfrac{305{,}2464}{135};\ \alpha_{1/2}=\dfrac{1}{135}\left[335{,}7888\pm 267{,}4806\right];\ \alpha_{\min}=0{,}5059$

6. $f=1: m=-24{,}81; n=9{,}62;\ P=2{,}14; a=\dfrac{349{,}17}{135};$

$b^2=\dfrac{372{,}6303}{135};\ \alpha_{1/2}=\dfrac{1}{135}\left[349{,}17\pm 267{,}609\right];\ \alpha_{\min}=0{,}6042$

Алынған (7.23) шешім бойынша өлшемсіз күдікті параметр $\alpha_{\min}$ және өлшемсіз f арасындағы графикті тұрғызуға болады.

3) Сызықсыз еркін тербеліс. Арқалықтың сызықсыз геометриялық параметрлерін (7.14), (7.16), (7.18) қолдана отырып, анықтауышты (6.15) былайша жазамыз:

$$\Delta=-\left(-\frac{6}{\ell_0^2}-3\alpha_0-13\ell_0^2\beta\right)^2+48\left(\frac{1}{\ell_0^3}+3\frac{\alpha_0}{\ell_0}-13\ell_0\beta\right)\left(\frac{1}{\ell_0}+\alpha_0\ell_0-\ell_0^3\beta\right).$$

Бұл анықтауышты ($\ell_0=\dfrac{1}{2}$) және (7.18) қолдана отырып мына түрге келтіреміз

$$\Delta=-\left(m-\frac{13}{4}\beta\right)^2+48\left(n-\frac{13}{2}\beta\right)\left(P-\frac{\beta}{8}\right)$$

Енді осы анықтауышты нөлге теңестірсек, онда квадраттық теңдеу алынады:

$$\beta^2-2a\beta+b^2=0\,.$$

Бұл теңдеудің түбірлері

$$\beta_{1/2}=a\pm\sqrt{a^2-b^2}$$
$$a=\frac{1}{455}\left[-52m+48(n+52P)\right];\ b^2=\frac{16}{455}\left(-m^2+48\cdot n\cdot P\right) \qquad (7.24)$$
$$m=-24-0{,}81f^2;\ n=8+1{,}62f^2;\ P=2+0{,}14f^2$$

Осы формулалар бойынша сызықсыз еркін тербелістің шешімін табамыз:

1. $f=0:\ m=-24;\ n=8; P=2;\ a=\dfrac{6624}{455};\ b^2=\dfrac{3072}{455}$

$\beta_{1,2}=\dfrac{1}{455}\left[6624\pm 6517{,}6388\right];\ \beta_{\min}=0{,}2338$

2. $f=0{,}2:\ m=-24{,}0324;\ n=8{,}0648; P=2{,}0056;\ a=\dfrac{6642{,}7728}{455};$

$b^2=\dfrac{3181{,}3185}{455};\ \beta_{1,2}=\dfrac{1}{455}\left[6642{,}7728\pm 6532{,}9113\right];\ \beta_{\min}=0{,}2415$

3. $f=0{,}4:\ m=-24{,}1296;\ n=8{,}2592; P=2{,}0224;\ a=\dfrac{6699{,}0912}{455};$

$b^2=\dfrac{3512{,}4142}{455};\ \beta_{1,2}=\dfrac{1}{455}\left[6699{,}0912\pm 6578{,}7289\right];\ \beta_{\min}=0{,}2645$

4. $f = 0{,}6:\ m = -24{,}2916;\ n = 8{,}5832;\ P = 2{,}0504;\ a = \dfrac{6792{,}9552}{455};$

$b^2 = \dfrac{4074{,}7179}{455};\ \beta_{1,2} = \dfrac{1}{455}\left[6792{,}9552 \pm 6655{,}0915\right];\ \beta_{\min} = 0{,}3029$

5. $f = 0{,}8:\ m = -24{,}5184;\ n = 9{,}0368;\ P = 2{,}0896;\ a = \dfrac{6924{,}3648}{455};$ (7.25)

$b^2 = \dfrac{4883{,}9417}{455};\ \beta_{1,2} = \dfrac{1}{455}\left[6924{,}3648 \pm 6761{,}9912\right];\ \beta_{\min} = 0{,}3569$

6. $f = 1:\ m = -24{,}81;\ n = 9{,}62;\ P = 2{,}14;\ a = \dfrac{7093{,}32}{455};$

$b^2 = \dfrac{5962{,}0848}{455};\ \beta_{1,2} = \dfrac{1}{455}\left[7093{,}32 \pm 6899{,}4521\right];\ \beta_{\min} = 0{,}4261$

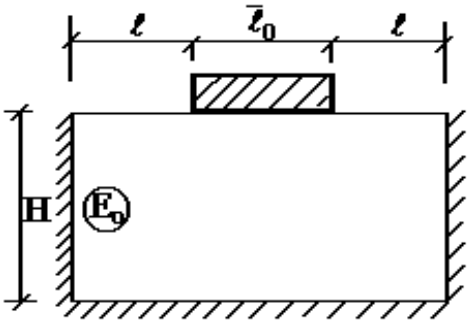
Осы алынған нәтиже бойынша өлшемсіз еркін тербеліс параметрі $\beta_{\min}$ және өлшемсіз жылжу f арасындағы график тұрғызылады.

Серпімділік негіздегі және дәлденген ақырлы элемент

Ақырлы элементтер әдісін құрылыс механикасының екі арнайы есебіне қолданып көрелік.

Бірінші арнайы есеп болып серпімділік негіздегі арқалық табылады. Былайша айтқанда арқалық серпімді дененің үстінде орналасқан (мысал түрінде жердің үстінде орналасқан іргетасты айтамыз). Осы дененің арқалыққа әсерін анықтау құрылыс механикасының бір қиын есептеріне жатады.

Енді осы арқалықты қарастырып көрелік (7.3-сурет). Мұнда: H, E_0 - серпімділі дененің биіктігі мен серпімділік модулі; $\bar{\ell}_0, h, E$ - арқалықтың ұзындығы, биіктігі және серпімділік модулі; ℓ, b - серпімділік негіздің арқалықтан тыс ұзындығы мен ені.



7.3-сурет. Серпімді негіздегі арқалық

Серпімділі негіздің сипаттамаларын анықтау үшін арқалықтан тыс бөлігін арқалық түрінде қарастырамыз (ұзындығы ℓ, биіктігі H). Бұл арқалықтың (көлденең) сол жағы бекінген, ал оң жағы бос. Бос жағына тік бірлік күш әсер етсе $(k = 1)$, онда Мор формуласы бойынша тік жылжу (δ_1) және ол бойынша қатаңдық (r_{11}) анықталады:

$$\delta_1 = \int_0^{\ell} \frac{M_1^2 dx}{E_0 J_1} = \frac{1}{EJ_0}\frac{1}{2}\cdot\ell\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\ell = \frac{\ell^3}{3E_0 J_1}$$

$$r_{11} = \frac{1}{\delta_1} = \frac{3E_0 J_1}{\ell^3} = \frac{3\alpha E_0 J}{\ell^3};\ J = \frac{b\ell_0^3}{12};\alpha = \left(\frac{H}{\ell_0}\right)^3, \qquad (7.26)$$

мұнда J - арқалықтың астындағы серпімділі дененің өстік момент инерциясы.

Ал егер арқалыққа (көлденең) бірлік момент әсер етсе $(k=1)$, онда Мор формуласы бойынша бұрыштық жылжу (δ_2) және қатаңдық (r_{22}) анықталады:

$$\delta_2 = \int_0^{\ell} \frac{M_1^2 dx}{E_0 J_1} = \frac{\ell}{E_0 J_1}; \; r_{22} = \frac{1}{\delta_2} = \frac{E_0 J_1}{\ell} = \alpha \frac{E_0 J}{\ell} \tag{7.27}$$

Енді арқалықтың астындағы серпімділі негізді тік арқалық түрінде қарастырып көрелік, оның төменгі жағы бекінген, ал жоғарғы жағы бос. Бос жағына бірлік күш әсер еткенде ($k=1$) Мор формуласы бойынша тік жылжу (δ_3) және оған тән қатаңдықты анықтауға болады:

$$\begin{gathered} \delta_3 = \int_0^H \frac{N_1^2}{E_0 F} dx = \frac{1}{E_0 F} H \cdot 1 \cdot 1 = \frac{H}{E_0 F}; \\ r_{33} = \frac{1}{\delta_3} = \frac{E_0 F}{H}; \; F = b \cdot \ell_0 \end{gathered} \tag{7.28}$$

Егер осы арқалыққа бірлік момент ($k=1$) әсер етсе, онда Мор формуласы бойынша бұрыштық жылжу (δ_4) және оған тән қатаңдықты анықтауға болады:

$$\delta_4 = \int_0^H \frac{M_1^2}{E_0 J} dx = \frac{1}{E_0 J} H \cdot 1 \cdot 1 = \frac{H}{E_0 J}; \; r_{44} = \frac{1}{\delta_4} = \frac{E_0 J}{H} \tag{7.29}$$

Сөйтіп, серпімділі негіздің арқалыққа әсері $r_{11}, r_{22}, r_{33}, r_{44}$ қатаңдықтары арқылы ескеріледі.

Енді серпімділі негіздің арқалықтың ақырлы элементтегі сипаттамаларын былайша анықтауға болады

$$\begin{gathered} r_{33}^0 = \frac{\ell_3^0}{EJ_0} r_{33} = 12 \cdot t \left(\frac{\overline{\ell}_0}{H} \right); \; t = \frac{E_0 J}{EJ_0} \\ r_{44}^0 = \frac{\ell_0}{EJ_0} r_{44} = t \left(\frac{\overline{\ell}_0}{H} \right); \; J_0 = \frac{bh^3}{12} \\ r_{11}^0 = \frac{\ell_0^3}{EJ_0} r_{11} = 3 \cdot \alpha \cdot t \left(\frac{\overline{\ell}_0}{\ell} \right)^3 \\ r_{22}^0 = \frac{\ell_0}{EJ_0} r_{22} = \alpha \cdot t \left(\frac{\overline{\ell}_0}{\ell} \right), \end{gathered} \tag{7.30}$$

мұнда $E_0 J, EJ_0$ - серпімділі негіздің және арқалықтың иілу қатаңдықтары; t - арқалықтың майысқақтық дәрежесі.

Айта кететін жәй: r_{11}^0 және r_{22}^0 серпімділі негіздің арқалықтың шетіндегі сызықтық және спираль түрдегі пружиналардың қатаңдықтары.

Ақырлы элементтің негізгі тәуелділігіндегі (6.1) параметрлер мына мәндерді қабылдайды:

$$\alpha = \frac{r_{44}^0}{30} \frac{1}{\ell_0^2}; \; \beta = \frac{r_{33}^0}{420} \frac{1}{\ell_0^4}, \tag{7.31}$$

мұнда α - бұрыштық әсер параметрі; β - сызықтық әсер параметрі болып табылады.

Бұрын олар (6.2) формуласы бойынша: α - қысу күшін, ал β - инерция күшін сипаттаған болатын.

(6.1) тәуелділікті қолданғанда α мен β-ны оң таңбамен алу керек. Сөйтіп, ақырлы элементті (6.1-сурет) қолдану арқылы серпімділі негізді арқалықты есептеуге болады.

Енді екінші арнайы есепті шығару үшін ақырлы элементтер әдісін қолданып көрелік. Арқалықтың ақырлы элементі (6.1-сурет) классикалық немесе техникалық теорияға негізделген: негізгі өрнектерді алғанда көлденең сырғу, көлденең қысу және қабаттардың қысымдары ескерілмеген. Осы жағдайларды ескеріп көрелік. Ол үшін көлденең күш өрнегін қолданамыз:

$$Q = -EJ\frac{d^3W}{dx_1^3} = -GF\frac{d\overline{W}}{dx_1}\ , \tag{7.32}$$

мұнда $W(x_1)$ - иілудегі майысу функциясы; $\overline{W}(x_1)$ - көлденең сырғудағы майысу функциясы; EJ, GF - иілу және сырғу қатаңдықтары.

Бұл өрнектен екі функцияның арасындағы байланысты анықтаймыз.

$$\overline{W}(x_1) = \frac{EJ}{GF}\frac{d^2W}{dx_1^2} \tag{7.33}$$

Жалпы жағдайда (дәлелденген теория бойынша) иілу моменті былайша анықталады:

$$\begin{aligned} M &= -EJ\frac{d^2W}{dx_1^2} + N\cdot\overline{W} + \nu\cdot M_\sigma = -EJ\frac{d^2W}{dx_1^2} + N\frac{EJ}{GF}\frac{d^2W}{dx_1^2} + \\ &+ \nu\frac{qh^2}{10} = -EJ\frac{d^2W}{dx_1^2} + N\frac{EJ}{GF}\frac{d^2W}{dx_1^2} + \nu\frac{h^2}{10}EJ\frac{d^4W}{dx_1^4} = \\ &= -EJ\left[\underbrace{1 - \frac{N}{EJ}\frac{EJ}{GF} + \nu\frac{k^2h^2}{10}}_{C_\beta}\right]\frac{d^2W}{dx_1^2}, \end{aligned} \tag{7.34}$$

мұнда N - бойлық күш; q - көлденең кернеу (қысым); C_β - иілу қатаңдығының параметрі.

Енді осы өрнекті тепе-теңдік теңдеуіне $\frac{d^2M}{dx_1^2} = -q$ қойсақ, онда мынандай теңдеу алынады (өлшемсіз түрде):

$$\begin{aligned} &\frac{d^4W_0}{dx^4} + \alpha\frac{d^2W_0}{dx^2} + \beta_0\cdot W_0 = q_0; \\ &W = W_0h;\ x_1 = x\cdot\ell;\ k_0^2 = \frac{N\cdot\ell^2}{EJ};\ g = \frac{EJ}{GF\cdot\ell^2}; \\ &\frac{d^2W}{dx^2} = -k^2\cdot W,\ k^2 = \frac{k_0^2}{\ell^2},\ \ \bar{k}^2 = k_0^2\left(\frac{h}{\ell}\right)^2 \\ &\alpha_0 = g\cdot k_0^4;\ \ \beta_0 = \frac{\nu}{10}\left(\frac{h}{\ell}\right)^2 k_0^6 \end{aligned} \tag{7.35}$$

Осы теңдеудегі параметрлер арқылы (6.1) тәуелділіктегі негізгі параметрлерді анықтаймыз

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{30}\frac{1}{\ell_0^2};\ \beta = \frac{\beta_0}{420}\frac{1}{\ell_0^4}, \tag{7.36}$$

мұнда α - көлденең сырғу; β - көлденең қысым параметрлері; k_0^2 - деформациялық күй параметрі (топсалы тірелген арқалықта $k_0^2 = \pi^2$ болады).

Сөйтіп, классикалық теориядағы ескерілмеген себептер (7.36) формуласымен табылды. Ақырлы элементті (6.1-сурет) (7.36) формуласы бойынша дәлденген элемент деп атауға болады. Негізгі тәуелділікті (6.1) α мен β параметрлерінің алдындағы таңбаны оң деп алып құрылыс механикасының күрделі есептеріне қолдануға болады. Бұл жағдайда негізгі матрицалар $\overset{o}{K}, \overset{v}{K}, \hat{K}$ (6.2) түрінде алынады.

Элементтің негізгі тәуелділігі (6.1) бойынша кез келген арқалықтың негізгі тәуелділігін алуға және оларды компьютерде бағдарлама құру арқылы оңай автоматтандыруға болады.

Негізгі әдебиеттер:

1. Ахажанов С.Б., Нурланова Б.М. Конструкция есебін автоматтандыру: оқу құралы. – Қарағанды: «Типография Арко» ЖШС баспасы, 2020. – 135 бет.

2. Тухфатуллин Б.А. Численные методы расчёта строительных конструкций: учебное пособие. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2017. – 100 с.

3. Трушин С.И. Строительная механика: метод конечных элементов: учебное пособие. – Москва: Изд-во НИЦ ИНФРА-М, 2019. – 305 с.

4. Андреев В.Б. Лекции по методу конечных элементов: учебное пособие. -М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова МАКС Пресс, 2010. - 2-е изд., испр. и доп. - 264 с.

5. Карпиловский В.С. Метод конечных элементов и задачи теории упругости. – Киев: «Софія А», 2022. – 275 с.

6. Тұрсынов К.А. Құрылыс механикасындағы ақырлы элементтер әдісі: оқу құралы.-Қарағанды: ҚарМУ,2004.-53 б.

7. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред.- М.: Недра, 1974. – 240 с.

8. Елешова А.Е. Ақырлы элементтер әдісі: оқу құралы.-Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 2010.-129 б.

Қосымша әдебиеттер:

1. Жадрасынов Н.Т., Винокуров Л.П. Құрылыс механикасы. - Қарағанды: ҚарМТУ, 2001. - 224 б.

2. Байнатов Ж. Құрылыс механикасы (ғимараттарды динамикаға, сейсмикаға және тұрақтылыққа есептеу). - Алматы: Республикалық баспа кабинеті, 1996. - 235 б.

3. Түсіпов А. Құрылыс механикасының негіздері. - Алматы: Қазақ ұлттық техникалық университеті, 1995. - 121 б.

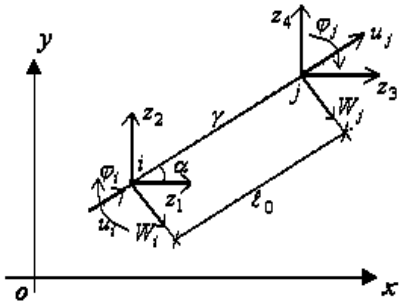
№8 дәріс. ***Жазықтықтағы және кеңістіктегі жалпыланған ақырлы элемент.***

Жоспар:

1. Жазықтықтағы жалпыланған ақырлы элемент.
2. Кеңістіктегі жалпыланған ақырлы элемент.

Жазықтықтағы жалпыланған ақырлы элемент

Өзектік жүйеден бір элементті бөліп оны xoy координаттық жазықтықта қарастырайық (8.1-сурет).



8.1-сурет. Жазықтықтағы ақырлы элемент

Бұл элементтің жергілікті жүйедегі жылжулары: $U_i, W_i, \varphi_i, U_j, W_j, \varphi_j$ ал жалпы координаттық жүйедегі жылжулары $z_1, z_2, \varphi_i, z_3, z_4, \varphi_j$ болып табылады. Элементтің өлшемсіз өстік момент инерциясы γ, ал ұзындығы ℓ_0.

Жергілікті координаттық жүйедегі негізгі тәуелділікті мына түрде қабылдаймыз:

$$\vec{F} = K \cdot \vec{V}$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} N_i \\ F_i \\ M_i \\ N_j \\ F_j \\ M_j \end{bmatrix}; \; K = \begin{bmatrix} K_{11}^0 & 0 & 0 & K_{12}^0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} & 0 & K_{13} & K_{14} \\ 0 & K_{12} & K_{22} & 0 & K_{23} & K_{24} \\ K_{12}^0 & 0 & 0 & K_{11}^0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{13} & K_{23} & 0 & K_{33} & K_{34} \\ 0 & K_{14} & K_{24} & 0 & K_{34} & K_{44} \end{bmatrix}; \vec{V} = \begin{bmatrix} U_i \\ W_i \\ \varphi_i \\ U_j \\ W_j \\ \varphi_j \end{bmatrix} \qquad (8.1)$$

$$K_{11}^0 = \frac{1}{\ell_0}; K_{12}^0 = -\frac{1}{\ell_0},$$

мұнда $\vec{F}, \vec{V}$ - түйіндік күштер және жылжулар векторы; $K_{11} \ldots K_{44}$ - қатаңдық матрицасының элементтері, олар (6.2) бойынша анықталады.

Элементтің ұзындығы және бағыттаушы косинустары түйіндер координаталары арқылы табылады.

$$\ell_0 = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}; \; \cos\alpha = \frac{x_j - x_i}{\ell_0}; \sin\alpha = \frac{y_j - y_i}{\ell_0} \qquad (8.2)$$

Ескі жылжулар жаңа жылжулармен былайша байланыста болады (8.1-сурет бойынша)

$$U_i = z_1 \cos\alpha + z_2 \sin\alpha;\ W_i = z_1 \sin\alpha - z_2 \cos\alpha;$$
$$U_j = z_3 \cos\alpha + z_4 \sin\alpha;\ W_j = z_3 \sin\alpha - z_4 \cos\alpha \qquad (8.3)$$

Векторлық түрде келесі түрде жазуға болады:

$$\vec{V} = C \cdot \vec{z};\ C = \begin{vmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};\ \vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \varphi_i \\ z_3 \\ z_4 \\ \varphi_j \end{bmatrix}, \qquad (8.4)$$

мұнда C - түрлендіру матрицасы; $\vec{z}$ - жалпы координаттық жүйедегі түйіндік жылжулар векторы, $c = \cos\alpha$; $S = \sin\alpha$.

Негізгі тәуелділікті (8.1) сол жағынан транспонирленген матрицаға C^T көбейтіп, оны жалпы координаттық жүйеде былайша жазамыз:

$$\vec{R} = S \cdot \vec{z};\quad \vec{R} = C^T \cdot \vec{F};\quad S = C^T \cdot K \cdot C, \qquad (8.5)$$

мұнда S - қатаңдық матрицасы.

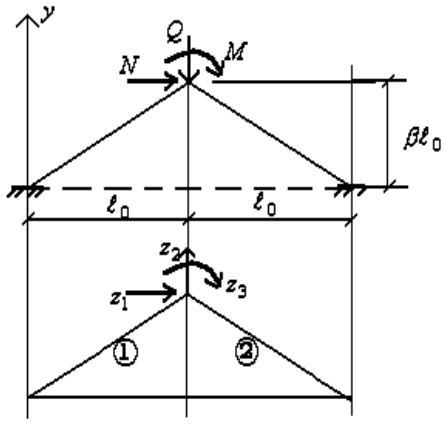
Бұл матрица жалпы жағдайда бұрышқа α және матрицаларға $\overset{o}{K}, \overset{\vee}{K}, \hat{K}$ тәуелді болмақ (олар 6.2 формуласы бойынша анықталады).

Енді осы матрицаның жалпы түрін анықтайтын формуланы көрсетейік.

$$S = \begin{bmatrix} C^2K_{11}^0 + S^2K_{11} & CS(K_{11}^0 - K_{11}) & SK_{12} & C^2K_{12}^0 + S^2K_{13} & CS(K_{12}^0 - K_{13}) & SK_{14} \\ CS(K_{11}^0 - K_{11}) & S^2K_{11}^0 + C^2K_{11} & -CK_{12} & CS(K_{12} - K_{13}) & S^2K_{12}^0 + C^2K_{13} & -CK_{14} \\ SK_{12} & -CK_{12} & K_{22} & SK_{23} & -CK_{23} & K_{24} \\ C^2K_{12}^0 + S^2K_{13} & CS(K_{12}^0 - K_{13}) & SK_{23} & C^2K_{11}^0 + S^2K_{33} & CS(K_{11}^0 - K_{33}) & SK_{34} \\ CS(K_{12}^0 - K_{13}) & S^2K_{12}^0 + C^2K_{13} & -CK_{23} & CS(K_{11}^0 - K_{33}) & S^2K_{11}^0 + C^2K_{33} & -CK_{34} \\ SK_{14} & -CK_{14} & K_{24} & SK_{34} & -CK_{34} & -CK_{44} \end{bmatrix} \qquad (8.6)$$

Бұл матрица бас диагоналға байланысты симметриялы матрица болып табылады. Оның элементтері жалпы жағдайда (6.2) формуласы бойынша анықталады ($K = \gamma \overset{o}{K} - \alpha \hat{K} - \beta \overset{\vee}{K}$). Мысал ретінде анықтап көрелік: $K_{12} = \gamma \cdot \frac{6}{\ell_0^2} - \alpha \cdot 3 - \beta \cdot 22 \cdot \ell_0^2$, тағы басқа элементтері ұқсас түрде табылады.

Мысал. Енді мысал ретінде мынандай раманы есептеп көрелік (8.2-сурет). Бұл раманың көлденең қималары бірдей болсын ($\gamma = 1$).



8.2-сурет. Рамалық конструкция

Есептеу ретін қарастырайық:

1. Раманы екі элементке бөліп, оның ұзындықтарын анықтаймыз.

$$\ell_1^0 = \ell_2^0 = \ell_0 \cdot \gamma_0;\ \gamma_0 = \sqrt{1+\beta^2}$$

2. Бағыттауыш косинустарын табамыз.

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \frac{\ell_0}{\ell_1^0} = \frac{1}{\gamma_0};\quad \sin\alpha_1 = \frac{\beta\ell_0}{\ell_2^0} = \frac{\beta}{\gamma_0} \\ \cos\alpha_2 &= \frac{\ell_0}{\ell_2^0} = \frac{1}{\gamma_0};\ \sin\alpha_2 = -\frac{\beta\ell_0}{\ell_2^0} = -\frac{\beta}{\ell_0} \end{aligned} \tag{8.7}$$

3. Түйіндік жылжулар векторын жасақтаймыз.

$$\left[\bar{z}^{(1)}\right]^T = \left|0 \quad 0 \quad 0 \quad z_1 \quad z_2 \quad z_3\right|;\ \left[\bar{z}^{(2)}\right]^T = \left|z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right|$$

4. Түйіндік тепе-теңдік теңдеулерін құрамыз.

а) $z_1 : \vec{R}_4^{(1)} + \vec{R}_1^{(2)} = N :\ S_4^{(1)}\bar{z}^{(1)} + S_1^{(2)}\bar{z}^{(2)} = N \cdot \ell_0^3 \cdot \gamma_0^3$

б) $z_2 : \vec{R}_5^{(1)} + \vec{R}_2^{(2)} = -Q :\ S_5^{(1)}\bar{z}^{(1)} + S_2^{(2)}\bar{z}^{(2)} = -Q \cdot \ell_0^3 \cdot \gamma_0^3$ (8.8)

в) $z_3 : \vec{R}_6^{(1)} + \vec{R}_3^{(2)} = M :\ S_6^{(1)}\bar{z}^{(1)} + S_3^{(2)}\bar{z}^{(2)} = M \cdot \ell_0^3 \cdot \gamma_0^3$

Осы теңдеулерді (8.6) матрицасын қолдану арқылы және $\overset{\circ}{K}$ матрицасы бойынша (6.2) ашып жазамыз:

а) $\left[\ell_0^2 c\alpha_1^2 + 12 S\alpha_1^2\right]z_1 + c\alpha_1 S\alpha_1\left(\ell_0^2 - 12\right)z_2 - 6\ell_0 S\alpha_1 z_3 + \left[\ell_0^2 c\alpha_2^2 + 12 S\alpha_2^2\right]z_1 +$
$+ c\alpha_2 S\alpha_2\left(\ell_0^2 - 12\right)z_2 + 6\ell_0 S\alpha_2 z_3 = N\ell_0^3\gamma_0^3$

б) $c\alpha_1 S\alpha_1\left(\ell_0^2 - 12\right)z_1 + \left[\ell_0^2 S\alpha_1^2 + 12 c\alpha_1^2\right]z_2 + 6\ell_0 c\alpha_1 z_3 + c\alpha_2 S\alpha_2\left(\ell_0^2 - 12\right)z_1 +$
$+ \left[\ell_0^2 S\alpha_2^2 + 12 c\alpha_2^2\right]z_2 - 6\ell_0 c\alpha_2 z_3 = -Q\ell_0^3\gamma_0^3$

в) $-6\ell_0 S\alpha_1 z_1 + 6\ell_0 c\alpha_1 z_2 + 4\ell_0^2 z_3 + 6\ell_0 S\alpha_2 z_1 - 6\ell_0 c\alpha_2 z_2 + 4\ell_0^2 z_3 = M\ell_0^3\gamma_0^3$

Бұл теңдеулер бағыттауыш косинустарды (8.7) ескергенде былайша жазылады:

а) $2\left(\ell_0^2 + 12\dfrac{\beta^2}{\gamma_0^2}\right)z_1 - 12\ell_0\beta z_3 = N\ell_0^3\gamma_0^3$

б) $2\left(\ell_0^2\beta^2 + \dfrac{12}{\gamma_0^2}\right)z_2 = -Q\ell_0^3\gamma_0^3$ (8.9)

в) $-12\ell_0\beta z_1 + 8\ell_0^2\gamma_0^2 z_3 = M\ell_0^3\gamma_0^3$

Осы теңдеулерден жылжуларды анықтаймыз

$$z_2 = -\frac{Q}{2}\frac{\ell_0^3\gamma_0^3}{\left(\ell_0^2\beta^2 + \dfrac{12}{\gamma_0^2}\right)};\ z_1 = \frac{N\ell_0^3\gamma_0^3 + \dfrac{3}{2}M\ell_0^2\beta\gamma_0}{\left(2\ell_0^2 + 6\dfrac{\beta^2}{\gamma_0^2}\right)};$$

$$z_3 = \frac{\dfrac{M}{4}\ell_0^3\gamma_0 + 3M\ell_0\dfrac{\beta^2}{\gamma_0} + \dfrac{3}{2}N\ell_0^2\beta\gamma_0}{\left(2\ell_0^2 + 6\dfrac{\beta^2}{\gamma_0^2}\right)} \tag{8.10}$$

Бұл жылжулар рама арқалыққа айналғанда ($\beta = 0, \gamma_0 = 1$) мынандай мәндер қабылдайды.

$$z_2 = -\frac{Q\ell_0^3}{24};\ z_1 = \frac{N\ell_0}{2};\ z_3 = \frac{M\ell_0}{8} \tag{8.11}$$

Енді (8.5) негізгі тәуелділікті қолдана отырып, элементтердің түйіндік күштерін анықтаймыз.

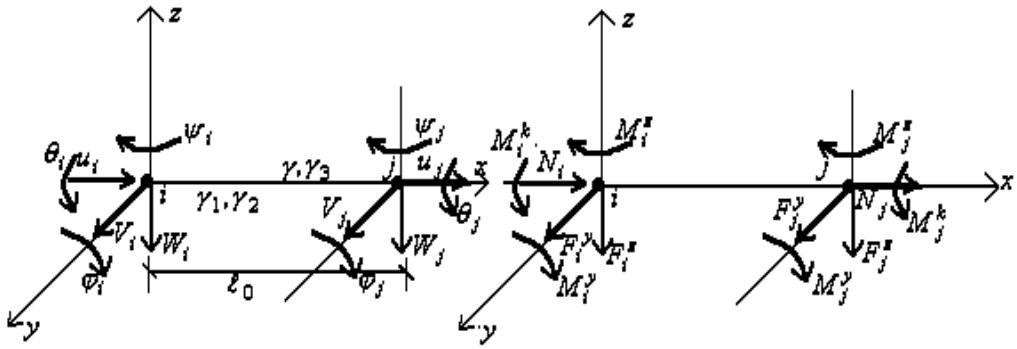
$$\left[\vec{R}^{(1)}\right]^T = \left| -\frac{N}{2}; \frac{Q}{2} + \frac{3}{4}\frac{M}{\ell_0}; \frac{Q\ell_0}{4} + \frac{M}{4}; \frac{N}{2}; -\frac{Q}{2} - \frac{3}{4}\frac{M}{\ell_0}; \frac{Q\ell_0}{4} + \frac{M}{2} \right| \tag{8.12}$$

$$\left[\vec{R}^{(2)}\right]^T = \left| \frac{N}{2}; -\frac{Q}{2} + \frac{3}{4}\frac{M}{\ell_0}; -\frac{Q\ell_0}{4} + \frac{M}{2}; -\frac{N}{2}; \frac{Q}{2} - \frac{3}{4}\frac{M}{\ell_0}; -\frac{Q\ell_0}{4} + \frac{M}{4} \right|$$

Алынған нәтижелер (8.11) және (8.12) екі шеті бекітілген (статикалық анықталмаған) арқалықтың деформациялық және кернеулік күйлерін анықтауға мүмкіндік береді. N, Q, M күштерінен пайда болған эпюраларды тұрғызуға болады. Айта кететін жәй: ақырлы элементтер әдісімен алынған нәтижелер жуық емес нақ (дәл) болады. Жазықтықтағы ақырлы элементті (8.1-сурет) қолдану арқылы кез келген өзектік жүйенің беріктілігін, орнықтылығын және еркін тербелісін есептеуге болады. Күрделі есептеуді компьютер арқылы жүргізген дұрыс болады.

Кеңістіктегі жалпыланған ақырлы элементэ

Енді кеңістіктегі ақырлы элементті қарастырып көрелік (8.3-сурет).



8.3-сурет. Кеңістіктегі ақырлы элемент

Бұл элементтің негізгі тәуелділігін бұрынғыша былайша жазылады.

$$\vec{F} = K \cdot \vec{V} \tag{8.13}$$

$$\vec{V}^T = \left| u_i \quad \theta_i \quad W_i \quad \varphi_i \quad V_i \quad \psi_i \quad u_j \quad \theta_j \quad W_j \quad \varphi_j \quad V_j \quad \psi_j \right|$$

$$\vec{F}^T = \left| N_i \quad M_i^k \quad F_i^z \quad M_i^y \quad F_i^y \quad M_i^z \quad N_j \quad M_j^k \quad F_j^z \quad M_j^y \quad F_j^y \quad M_j^z \right|,$$

мұнда $\vec{V}, \vec{F}$ - түйіндік жылжулар мен күштер векторлары, K - элементтің қатаңдық матрицасы.

Қатаңдық параметрлері:

$$EJ_y \to \gamma_1;\ EJ_z \to \gamma_2;\ EA \to \gamma;\ GJ_p \to \gamma_3, \tag{8.14}$$

мұнда EJ_y, EJ_z - иілу қатаңдықтары; EA, GJ_p - созылу және бұралу қатаңдықтары.

Өлшемсіз күштер былайша анықталады:

$$N = \frac{\hat{N}}{EA}; F^z = \frac{\hat{F}^z L^2}{EJ_0}; M^y = \frac{\hat{M}^y L}{EJ_0}, \tag{8.15}$$

$$M^K = \frac{\hat{M}^K}{GJ_P}; F^y = \frac{\hat{F}^y L^2}{EJ_0}; M^z = \frac{\hat{M}^z L}{EJ_0}$$

Қатаңдық матрицасы (K) бұрынғы алынған матрицалар бойынша анықталады.

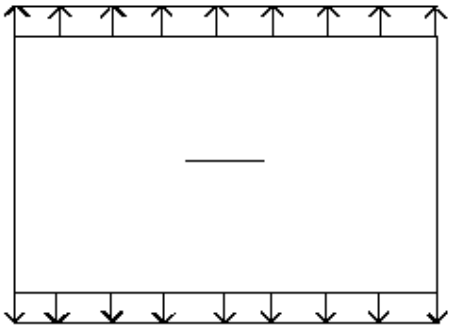
$$K=\frac{1}{\ell_0^3}\begin{vmatrix}
\gamma\ell_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma\ell_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \gamma_3\ell_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_3\ell_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 12\gamma_1 & 6\gamma_1\ell_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12\gamma_1 & 6\gamma_1\ell_0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 6\gamma_1\ell_0 & 4\gamma_1\ell_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6\gamma_1\ell_0 & 2\gamma_1\ell_0^2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 12\gamma_2 & 6\gamma_2\ell_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12\gamma_3 & 6\gamma_3\ell_0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 6\gamma_2\ell_0 & 4\gamma_2\ell_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6\gamma_2\ell_0 & 2\gamma_2\ell_0^2\\
-\gamma\ell_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma\ell_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -\gamma_3\ell_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_3\ell_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -12\gamma_1 & -6\gamma_1\ell_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12\gamma_1 & -6\gamma_1\ell_0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 6\gamma_1\ell_0 & 2\gamma_1\ell_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6\gamma_1\ell_0 & 4\gamma_1\ell_0^2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -12\gamma_3 & -6\gamma_2\ell_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12\gamma_2 & -6\gamma_2\ell_0^2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 6\gamma_3\ell_0 & 2\gamma_2\ell_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6\gamma_2\ell_0^2 & 4\gamma_2\ell_0^2
\end{vmatrix}$$

Бұл матрицаның элементтері бас диагональға сәйкес симметриялы болады және оның өлшемі 12×12 тең болады.

Ақырлы элементтің негізгі тәуелділігін (8.13) қолданып кез келген өзектік жүйенің негізгі тәуелділігін алуға болады. $\vec{F}\to P; K\to A; \vec{V}\to u$, мұнда $\vec{P}$ - өзектік жүйеге әсер ететін сыртқы күштер векторы; A - жүйенің жалпы қатаңдық матрицасы; $\vec{u}$ - оның түйіндік жылжулар векторы.

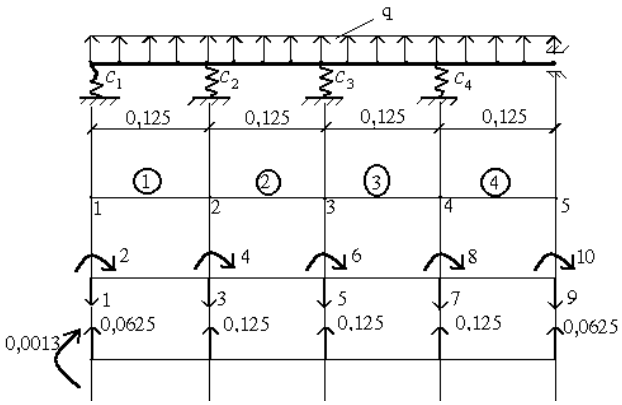
Осы негізгі тәуелділікті шешу арқылы $\vec{u}$ векторы анықталады да, ол бойынша жүйенің деформациялық күйі тұрғызылады. Өзектің элементтерінде пайда болатын ішкі күштер (8.13) тәуелділігі бойынша анықталады. Ақырлы элементтер әдісінің есептеу алгоритмін компьютерде бағдарлама құру арқылы оңай жүзеге асыруға болады. Бас бағдарламада есептің берілгені енгізілу керек: күштер; тіреулер; қатаңдықтар және т.б. Қосалқы программаларда жалпы матрица; күш векторлары және олармен жұмыс істеу қарастырылуы қажет. Құрылған бағдарламалар дұрыс қателігін тексеру үшін олар бойынша белгілі есептің шешімін алып тексеру жүргізілген дұрыс.

Мысал. Ақауы бар жазық элементті есептеу. Бізге ортасында кішкентай ақауы бар дене берілген (8.4-сурет). Бұл мысал жырық есебіне негізделген.



8.4-сурет. Жырық ақауы бар конструкция

Есептің негізгі мағынасы: денені екі жақтан сыртқы күшпен тартқан уақытта реакциялық күш және кернеудің өзгеруін анықтау. Есепті шығару үшін үстінгі жағын бөліп алып, оның жартысын арқалық түрінде қарастырамыз (8.5-сурет). Төменгі жағын серіппемен алмастырамыз.



8.5-сурет. Жырық ақауы бар конструкцияның есептеу үлгісі

Есептің берілгені: $q = 1\frac{kH}{м}$, $l_0 = 0{,}125м$, серіппенің қатаңдығы $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1500$. Арқалықтың иілу қатаңдықтарын $EI_1 = EI_2 = EI_3 = EI_4 = 1$ деп алайық.

Есепті шығару үшін бағдарлама құру керек. Ол үшін элементтерін, түйіндерін, жылжуларын белгілейміз. Таралған күштерді шоғырланған күштерге келтіреміз.

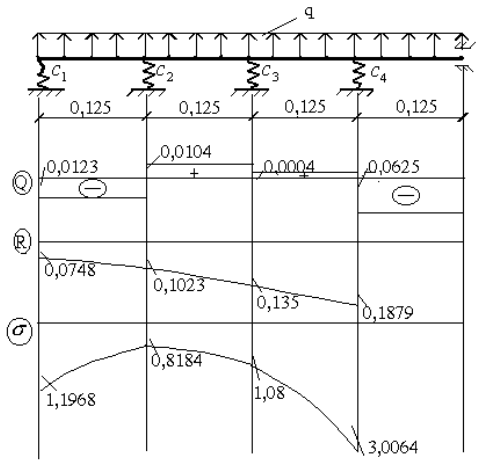
Есептің нәтиежесі төменде көрсетілген.

Түйіндер және жылжулар

1	-.0000499
2	-.0000968
3	-.0000682
4	-.0001631
5	-.0000900
6	-.0002143
7	-.0001252
8	-.0003499
9	-.0001573
10	.0000000

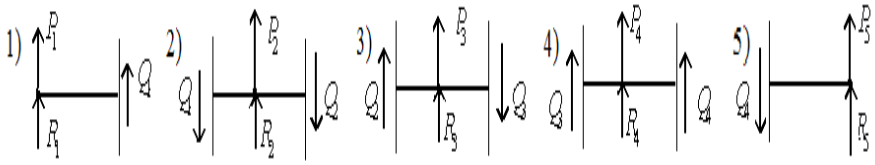
Ішкі күштер

1	.0123	.0013	-.0123	.0002
2	-.0104	-.0002	.0104	-.0011
3	-.0004	.0011	.0004	-.0011
4	.0625	.0011	-.0625	.0067



8.6-сурет. Арқалықтың эпюрасы

Жоғарыдағы эпюралар (8.6-сурет), яғни көлденең күш эпюрасы нәтиже арқылы салынды. Реакциялық күштің эпюрасын салу үшін, көлденең күш және сыртқы күштің мәндерін пайдаланамыз (8.7-сурет).



8.7-сурет. Әр қимадағы сыртқы және ішкі күштер

8.7-суретке қарап, келесі теңдеулер жүйесін құрып, реакциялық күштерді анықтаймыз:

1) $R_1 + Q_1 + P_1 = 0: \quad R_1 = -0{,}0748\,kH;$

2) $R_2 - Q_1 + P_2 - Q_2 = 0: \quad R_2 = -0{,}1023\,kH;$

3) $R_3 + Q_2 + P_3 - Q_3 = 0: \quad R_3 = -0{,}135\,kH;$

4) $R_4 + Q_3 + P_4 + Q_4 = 0: \quad R_4 = -0{,}1879\,kH;$

5) $R_5 - Q_4 + P_5 = 0: \quad R_5 = 0;$

Кернеулер былайша табылады.

1) $\sigma_1 = \dfrac{R_1}{0{,}0625} = -\dfrac{0{,}0748}{0{,}0625} = -1{,}1968\ q$

2) $\sigma_2 = \dfrac{R_2}{0{,}125} = -\dfrac{0{,}1023}{0{,}125} = -0{,}8184\ q$

3) $\sigma_3 = \dfrac{R_3}{0{,}125} = -\dfrac{0{,}135}{0{,}125} = -1{,}08\ q$

4) $\sigma_4 = \dfrac{R_4}{0{,}0625} = -\dfrac{0{,}1879}{0{,}0625} = -3{,}0064\ q$

5) $\sigma_5 = 0;$

Негізгі әдебиеттер:

1. Ахажанов С.Б., Нурланова Б.М. Конструкция есебін автоматтандыру: оқу құралы. – Қарағанды: «Типография Арко» ЖШС баспасы, 2020. – 135 бет.

2. Тухфатуллин Б.А. Численные методы расчёта строительных конструкций: учебное пособие. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2017. – 100 с.

3. Трушин С.И. Строительная механика: метод конечных элементов: учебное пособие. – Москва: Изд-во НИЦ ИНФРА-М, 2019. – 305 с.

4. Андреев В.Б. Лекции по методу конечных элементов: учебное пособие. -М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова МАКС Пресс, 2010. - 2-е изд., испр. и доп. - 264 с.

5. Карпиловский В.С. Метод конечных элементов и задачи теории упругости. – Киев: «Софія А», 2022. – 275 с.

6. Тұрсынов К.А. Құрылыс механикасындағы ақырлы элементтер әдісі: оқу құралы.-Қарағанды: ҚарМУ,2004.-53 б.

7. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред.- М.: Недра, 1974. – 240 с.

8. Елешова А.Е. Ақырлы элементтер әдісі: оқу құралы.-Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 2010.-129 б.

Қосымша әдебиеттер:

1. Жадрасынов Н.Т., Винокуров Л.П. Құрылыс механикасы. - Қарағанды: ҚарМТУ, 2001. - 224 б.

2. Байнатов Ж. Құрылыс механикасы (ғимараттарды динамикаға, сейсмикаға және тұрақтылыққа есептеу). - Алматы: Республикалық баспа кабинеті, 1996. - 235 б.

3. Түсіпов А. Құрылыс механикасының негіздері. - Алматы: Қазақ ұлттық техникалық университеті, 1995. - 121 б.

№9 дәріс. ***Рамаларды ақырлы элементтер әдісімен есептеу.***

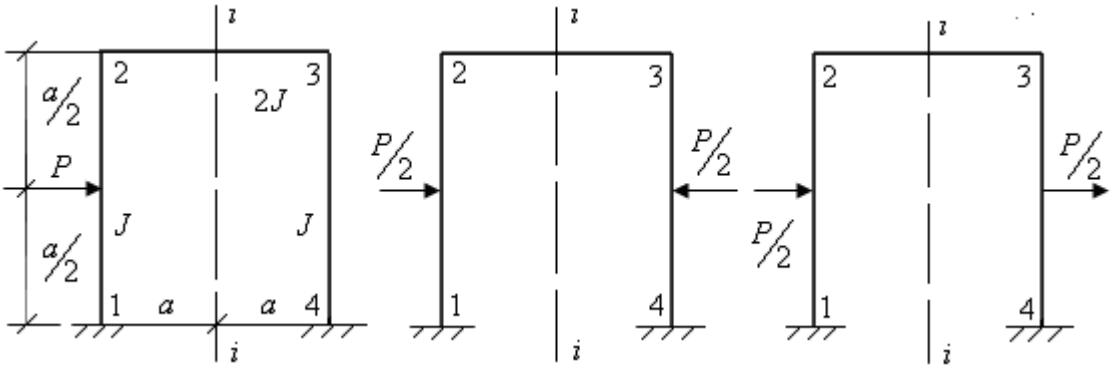
Жоспар:

1. Ақырлы элементтер әдісін рамаларға қолдану.
2. Сапыру әдісін қолдану.
3. Раманы ақырлы элементтер әдісімен есептеу.

Ақырлы элементтер әдісін рамаларға қолдану

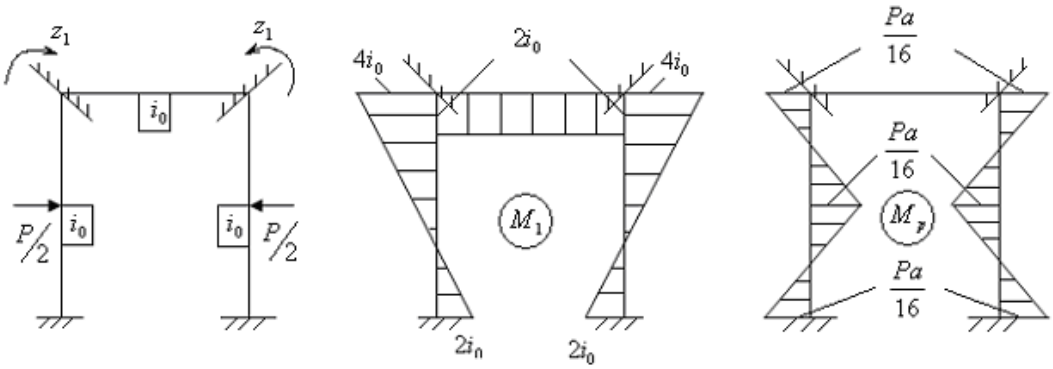
Кейбір есептерді шығару үшін күш және жылжу әдістерін бірінен соң немесе қатар қолданған жөн. Егер берілген раманың схемасы симметриялы болса, онда құрау әдісі қолданылады. Бұл жағдайда сыртқы күштер екі түрге жүктеледі: тура және кері. Симметриялы рамаға симметриялық күш әсер етсе жылжу, ал сол рамаға кері симметриялық күш әсер етсе, күш әдістері қолданылады. Енді құрау әдісімен мынандай есепті шығарып көрелік.

Мысал. Берілген симметриялы раманы (сурет 9.1) құрау әдісімен есептеу керек ($i-i$ түзуі симметрия өсі болып табылады). Сыртқы күштерді екі түрге жіктейміз: сурет 9.1,б,в-суреттері; сурет 9.1,б-суретіндегі рамаға жылжу әдісін қолдануымыз керек, себебі онда симметриялық деформация пайда болады.



Сурет 9.1 – Симметриялы рама

Түйіндер (2 және 3) көлбеу бағытта жылжымайтын болғандықтан, оларда тек бұрыштық жылжу пайда болмақ. Сол себепті жылжу әдісі бойынша тек қана бір белгісіз пайда болады. Негізгі рама және онда пайда болған эпюралар 9.2-суретте көрсетілген.

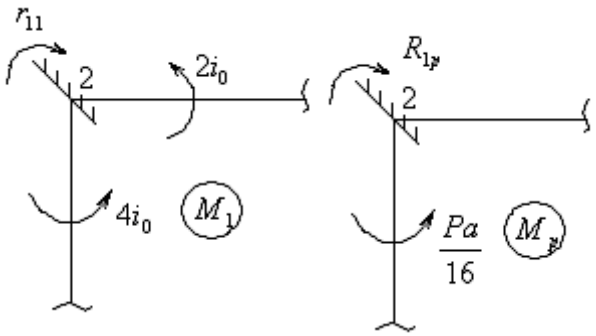


Сурет 9.2 – Негізгі рама және эпюрасы

Белгісіз жылжу z_1 канондық теңдеуден табылады.

$$r_{11}z_1 + R_{1p} = 0 \qquad (9.1)$$

Екінші немесе үшінші түйіндердің тепе-теңдік теңдеулерінен коэффициенттердің мәндерін анықтаймыз (сурет 9.3).



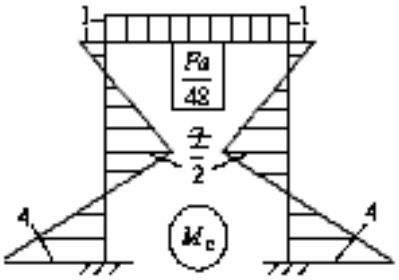
Сурет 9.3 – Түйіндердің коэфициенттерін анықтау

$$r_{11} = 6i_0 \qquad R_{1p} = \frac{Pa}{16} \qquad (9.2)$$

Енді канондық теңдеуді (9.1) шешіп, бұрыштық жылжудың мәнін анықтаймыз

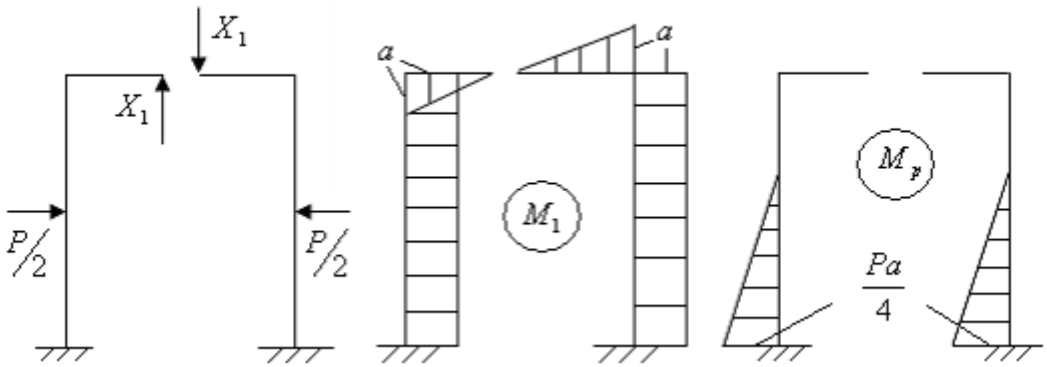
$$z_1 = -\frac{Pa}{16 \cdot 6i_0} \qquad (9.3)$$

Жүк эпюрасын жөнделген бірлік эпюрасымен қосып берілген симметриялық рамада (9.1,б-сурет) пайда болған эпюраны M_c аламыз (9.4-сурет).



Сурет 9.4 – Момент эпюрасы

Бұл эпюраның мәндерінің көбейткіші $\frac{Pa}{48}$ тең. Енді 9.1,в-суреттегі рамаға күш әдісін қолданамыз. Негізгі рама және онда пайда болған эпюралар 9.5-суретте көрсетілген.



Сурет 9.5 - Негізгі рама және онда пайда болған эпюралар

Канондық теңдеудің

$$\delta_{11}x_1 + \Delta_{1p} = 0 \tag{9.4}$$

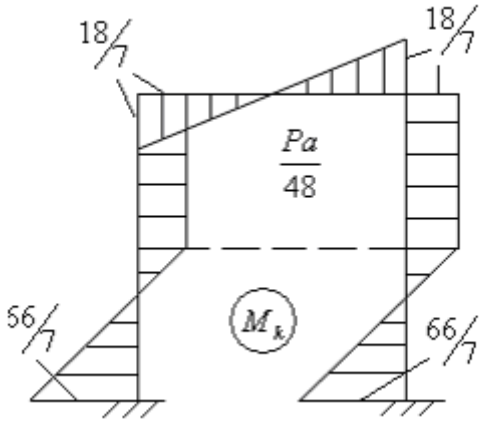
коэффициенттерін Мор формуласы бойынша анықтаймыз:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{11}}{2} &= \sum\int_0^l \frac{M_1^2}{EJ}dx = \frac{1}{EJ}a\cdot a\cdot a + \frac{1}{2EJ}\frac{1}{2}a\cdot a\frac{2}{3}a = \frac{7}{6}\frac{a^3}{EJ} \\ \frac{\Delta_{1p}}{2} &= \sum\int_0^l \frac{M_1 M_p}{EJ}dx = -\frac{1}{EJ}a\cdot\frac{a}{2}\frac{Pa}{8} = -\frac{1}{16}\frac{Pa^3}{EJ} \end{aligned} \tag{9.5}$$

Белгісіз күштің шамасын

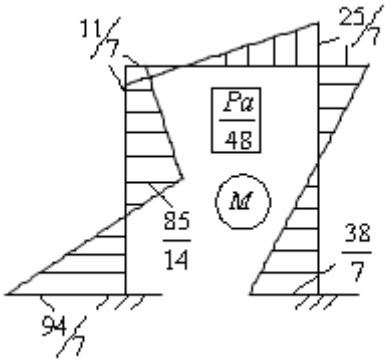
$$x_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{6}{16\cdot 7}P \tag{9.6}$$

ескере отырып, $M_k = M_p + M_1 X_1$ формуласы бойынша 9.1,в-суреттегі рамада иілу моментінің эпюрасын тұрғызамыз. (9.6-сурет).



Сурет 9.6 - Иілу моментінің эпюрасы

Бұл эпюраның мәндерінің көбейткіші $\frac{Pa}{48}$ тең. Енді $M = M_c + M_k$ формуласы бойынша берілген рамада (9.1,а-сурет) иілу моментінің эпюрасын тұрғызамыз (9.7-сурет). Бұл эпюраның мәндерінің көбейткіші жоғарғыдай $\frac{Pa}{48}$.



Сурет 9.7 - Иілу моментінің эпюрасы

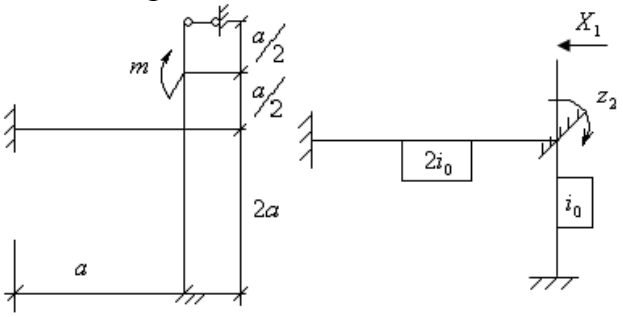
Қорыта айтқанда, құрау әдісі бойынша берілген раманың есебі екі бөліктен тұрмақ – бір бөлігінің есебі жылжу әдісімен орындалса, ал екіншісі күш әдісімен орындалмақ.

Бұл әдіс тек симметриялық рамаларға қолданылады және күш немесе жылжу әдістеріне қарағанда тиімді болып табылады.

Сапыру әдісін қолдану.

Сапыру әдісі деп әдістің белгісіздерінің бір бөлігі күш, ал екіншісі жылжу болған жағдайын атаймыз. Бұл әдістің маңызын түсіну үшін жәй (қарапайым) мысал қарастырайық.

Мысал. Берілген раманың (9.8-сурет) иілу моментінің эпюрасын сапыру әдісі бойынша тұрғызу керек. Бұл раманың бір бөлігіне күш, ал екіншісіне жылжу әдістерін қолданып көрелік.



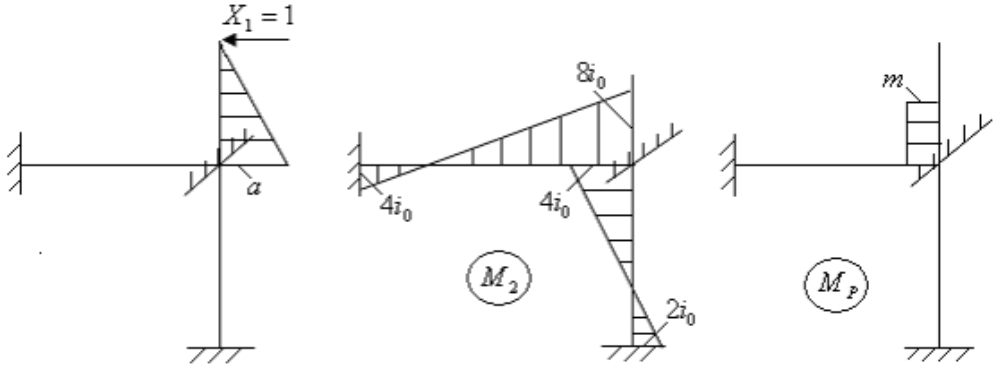
Сурет 9.8 – Рама

Сапыру әдісінің негізгі рамасы 9.8-суретте (оң жақта) көрсетілген. Белгісіздерді табу үшін канондық теңдеулер құрамыз

$$\begin{aligned} &\delta_{11}x_1 + \delta_{12}' z_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ &r_{21}' x_1 + r_{22} z_2 + R_{2p} = 0 \end{aligned} \qquad (9.7)$$

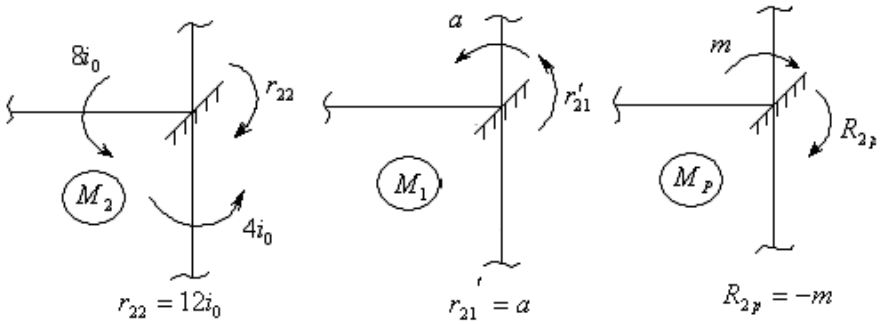
Мұнда $\delta_{12}' - z_2 = 1$ жылжудан пайда болған жылжу; $r_{21}' - x_1 = 1$ күшінен пайда болған реакция; $\delta_{12}' = -r_{21}'$ (реакция мен жылжудың өзара теоремасы бойынша).

Негізгі рамада иілу моменттерінің эпюраларын (9.9-сурет) тұрғызамыз.



Сурет 9.9 - Иілу моментінің эпюрасы

Канондық теңдеулердің коэффициенттерін анықтаймыз (9.10-сурет).



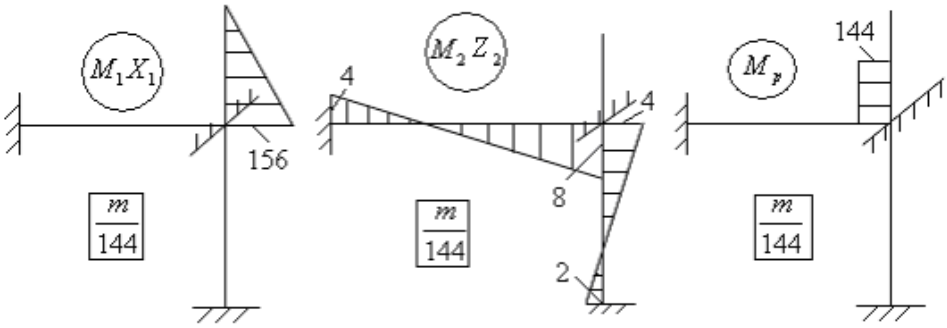
Сурет 9.10 – Түйіндерді кесу

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{M_1^2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ}\frac{1}{2}a \cdot a\frac{2}{3}a = \frac{1}{3}\frac{a^3}{EJ};$$
$$\Delta_{1p} = \sum \int_0^l \frac{M_1 M_p}{EJ} dx = -\frac{1}{EJ} m \frac{a}{2}\frac{3}{4} \cdot a = -\frac{3}{8}\frac{ma^2}{EJ} \qquad (9.8)$$
$$-\frac{\delta_{12}}{a} = 1 \quad (z_2 = 1); \quad \delta_{12}' = -a$$

Осы коэффициенттерді (9.7) теңдеулеріне қойып, белгісіздердің мәнін анықтаймыз

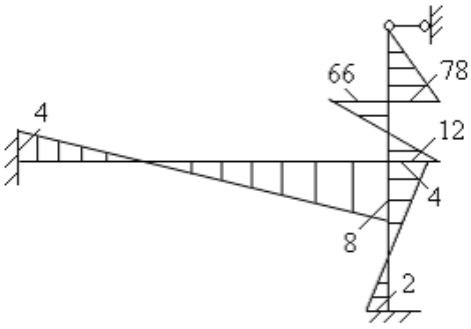
$$x_1 = \frac{156}{144}\frac{m}{a}; \quad z_2 = -\frac{1}{144}\frac{m}{i_0} \qquad (9.9)$$

Осы мәндер бойынша жөнделген эпюраларды (9.11-сурет) тұрғызамыз.



Сурет 9.11 - Жөнделген эпюра

Енді осы эпюраларды бір-бірімен қосып $M = M_p + M_1 x_1 + M_2 z$ берілген рамада иілу моментінің эпюрасын (9.12-сурет) тұрғызамыз.

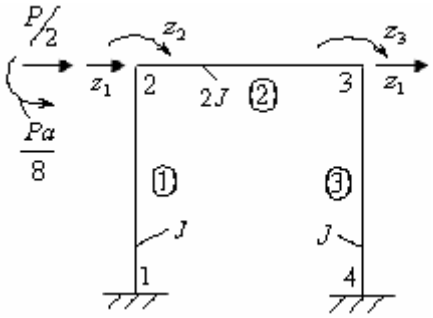


Сурет 9.12 - Иілу моментінің эпюрасы

Бұл эпюраның көбейткіші $m/14$. Сапыру әдісі басқа әдістерге қарағанда үстем болмақ, егер раманың бір бөлігінде артық байланыстар көп және түзу жылжулар аз болса, ал екінші бөлігінде басқаша болса. Сапыру әдісінде күш және жылжу әдістері бір уақытта қолданылады.

Раманы ақырлы элементтер әдісімен есептеу

Ақырлы элементтер әдісінің мәнісін түсіну үшін 9.1,а-суретте көрсетілген раманы есептеп көрейік. Бұл рама үш элементтерден тұрады. Аралық түйіндерде үш жылжу пайда болады. Сыртқы күштерді түйіндерге түсіріп, шектелген элементтер әдісінің негізгі жүйесін таңдап аламыз (9.13-сурет).



Сурет 9.13 - Рама

Екінші және үшінші түйіндердің түзулік жылжулары бір-біріне тең. Жылжуларды табу үшін 1.3 тармақта алынған тәуелділікті қолданамыз

$$\vec{F} = K \cdot \vec{V} \tag{9.10}$$

мұнда $\vec{F}$ -түйіндер күштерінің векторы; K -қатаңдық матрицасы; $\vec{V}$ - түйіндер жылжуларының векторы.

9.13-сурет бойынша элементтердің жылжуларының векторларын анықтаймыз

$$\vec{V}_{(1)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \\ z_2 \end{vmatrix}; \qquad \vec{V}_{(2)} = \begin{vmatrix} 0 \\ z_2 \\ 0 \\ z_3 \end{vmatrix}; \qquad \vec{V}_{(3)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \\ z_3 \end{vmatrix} \tag{9.11}$$

Негізгі тәуелділікті (9.10) қолдана отырып, жылжулар бағытындағы тепе-теңдік теңдеулерін құрамыз:

$$
\begin{aligned}
z_1: &\quad K_3^{(1)} \cdot \vec{V}_{(1)} + K_3^{(3)} \cdot \vec{V}_{(3)} = \frac{P}{2} \\
z_2: &\quad K_4^{(1)} \cdot \vec{V}_{(1)} + K_2^{(2)} \cdot \vec{V}_{(2)} = -\frac{Pa}{8} \\
z_3: &\quad K_4^{(2)} \cdot \vec{V}_{(2)} + K_4^{(3)} \cdot \vec{V}_{(3)} = 0
\end{aligned} \tag{9.12}
$$

Мұнда $K_3^{(1)}$ - бірінші элементтің қатаңдық матрицасының үшінші жолы; $\vec{V}_{(2)}$ - екінші элементтің түйіндерінің жылжулар векторы.

Қатаңдық матрицаның жолдарын $(\tilde{\beta} = 0)$ векторларға (9.11) көбейтіп, (9.12) теңдеулерін былайша жазамыз

$$
\begin{aligned}
z_1: &\quad EJ\left(\frac{12}{a^3} z_1 - \frac{6}{a^2} z_2\right) + EJ\left(\frac{12}{a^3} z_1 - \frac{6}{a^2} z_3\right) = \frac{P}{2} \\
z_2: &\quad EJ\left(-\frac{6}{a^2} z_1 + \frac{4}{a} z_2\right) + 2EJ\left(\frac{4}{2a} z_2 + \frac{2}{2a} z_3\right) = -\frac{Pa}{8} \\
z_3: &\quad 2EJ\left(\frac{2}{2a} z_2 + \frac{4}{2a} z_3\right) + EJ\left(-\frac{6}{a^2} z_1 + \frac{4}{a} z_3\right) = 0
\end{aligned} \tag{9.13}
$$

Олар ұқсас мүшелері жиналған соң мына түрге келтіріледі.

$$
\begin{aligned}
&\frac{4}{a} z_1 - z_2 - z_3 = \frac{Pa^2}{12EJ}; \\
&-z_1 + \frac{4}{3} a \cdot z_2 + \frac{a}{3} z_3 = -\frac{Pa^3}{48EJ}; \\
&-z_1 + \frac{a}{3} z_2 + \frac{4}{3} a \cdot z_3 = 0
\end{aligned} \tag{9.14}
$$

Осы системаны шешіп, жылжулар мәндерін анықтаймыз

$$
z_1 = \frac{17}{48 \cdot 14} \frac{Pa^3}{EJ}; \quad z_2 = -\frac{1}{48 \cdot 14} \frac{Pa^2}{EJ}; \quad z_3 = \frac{13}{48 \cdot 14} \frac{Pa^2}{EJ} \tag{9.15}
$$

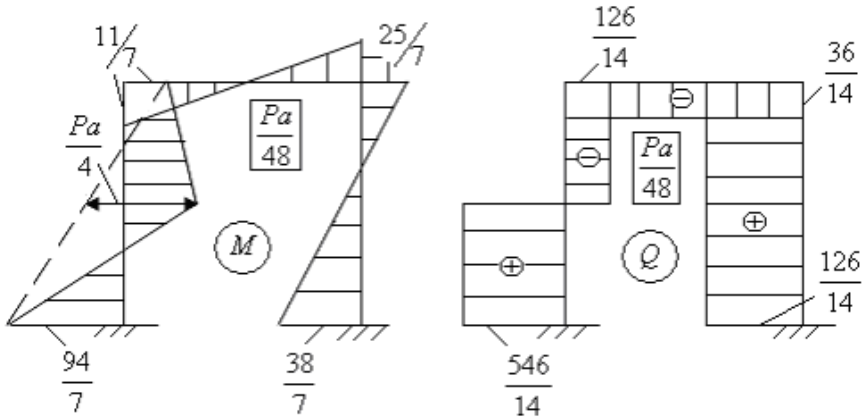
Енді тәуелділік (9.10) бойынша элементтер түйіндерінің күштер векторларын аламыз

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{(1)} &= \begin{vmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{vmatrix} = \frac{P}{14 \cdot 48} \begin{vmatrix} -210 \\ -104a \\ 210 \\ -106a \end{vmatrix} \\
\vec{F}_{(2)} &= \begin{vmatrix} F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{vmatrix} = \frac{P}{14 \cdot 48} \begin{vmatrix} -126 \\ -76a \\ 126 \\ -50a \end{vmatrix} \\
\vec{F}_{(3)} &= \begin{vmatrix} F_4 \\ M_4 \\ F_3 \\ M_3 \end{vmatrix} = \frac{P}{14 \cdot 48} \begin{vmatrix} -126 \\ -76a \\ 126 \\ -50a \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{9.16}
$$

Енді түпкі эпюраларды тұрғызу үшін жөнделген мәндерді анықтаймыз

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_1 &= -\frac{P}{2} + F_1 = -\frac{546}{14 \cdot 48P} \\
\tilde{M}_1 &= -\frac{Pa}{8} + M_1 = -\frac{188}{48 \cdot 14Pa} \\
\tilde{F}_2 &= -\frac{P}{2} + F_2 = -\frac{126}{48 \cdot 14P} \\
\tilde{M}_2 &= \frac{Pa}{8} + M_2 = -\frac{22}{14 \cdot 48Pa}
\end{aligned} \tag{9.17}
$$

Осы мәндер арқылы берілген рамада (9.13-сурет) иілу моментінің (M) және көлденең күш эпюраларын тұрғызамыз (9.14-сурет).



Сурет 9.14 – Иілу моменті мен көлденең күш

Бұл суреттегі иілу моментінің эпюрасы 9.7-суреттегі эпюрасымен тең болады. Айта кететін жәй: 9.13-суреттегі сыртқы күштер екі жағы бекітілген арқалықтың реакциялары (теріс таңбамен алынған) болып табылады.

Негізгі әдебиеттер:

1. Шеин А.И. Курс строительной механики: учебник. — Пенза: ПГУАС, 2014. — 312 с.

2. Поляков А.А. Строительная механика: учебное пособие. – Екатеринбург: УрФУ, 2014. – 424 с.

3. Трушин С.И. Строительная механика: метод конечных элементов: учебное пособие. – Москва: Изд-во НИЦ ИНФРА-М, 2019. – 305 с.

4. Жадрасынов Н.Т., Винокуров Л.П. Құрылыс механикасы. - Қарағанды: ҚарМТУ, 2001. - 224 б.

5. Тұрсынов К.А. Құрылыс механикасындағы ақырлы элементтер әдісі: оқу құралы.-Қарағанды: ҚарМУ, 2004.-53 б.

6. Буланов В.Е. Строительная механика: в 2 ч.: учебное пособие. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – Ч. 1. – 80 с.

Қосымша әдебиеттер:

1. Шакирзянов Р.А. Краткий курс лекций по строительной механике: учебное пособие. – Казань: КГАСУ, 2010. – 115 с.

2. Байнатов Ж. Құрылыс механикасы (ғимараттарды динамикаға, сейсмикаға және тұрақтылыққа есептеу). - Алматы: Республикалық баспа кабинеті, 1996. - 235 б.

3. Түсіпов А. Құрылыс механикасының негіздері. - Алматы: Қазақ ұлттық техникалық университеті, 1995. - 121 б.

4. Старцева Л.В., Архипов В. Г., Семенов А.А. Строительная механика в примерах и задача: учебное издание. – М.: Изд-во АСВ, 2013. – 224 с.

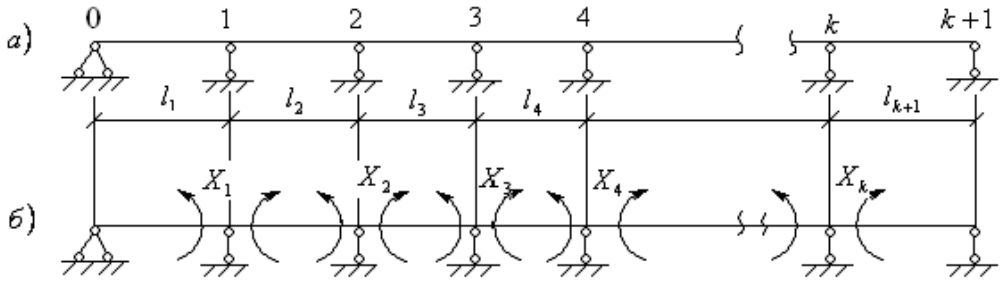
№10 дәріс. ***Арқалықты сандық әдістермен есептеу.***

Жоспар:

1. Үш моменттер теңдеулерін қолдану түрлері.
2. Моменттер теңдеулері және олардың негізгі қатынастары.
3. Арқалықты есептеуде сандық әдістерді қолдану.

Үш моменттер теңдеулерін қолдану түрлері

Екі немесе одан да көп аралықты жабатын және еш жерде топса немесе кесінді арқылы үзілмейтін арқалық деп аталады. Оның кесілген арқалықтан айырмашылығы кез келген аралықта түсіп тұрған күш барлық аралықты иілдіреді. Кесілмеген арқалықты есептеу үшін күш немесе жылжу әдістерін қолдануға болады. Берілген кесілмеген арқалыққа (10.1,а-сурет) күш әдісін қолданып көрелік.



Сурет 10.1 – Кесілмеген арқалық

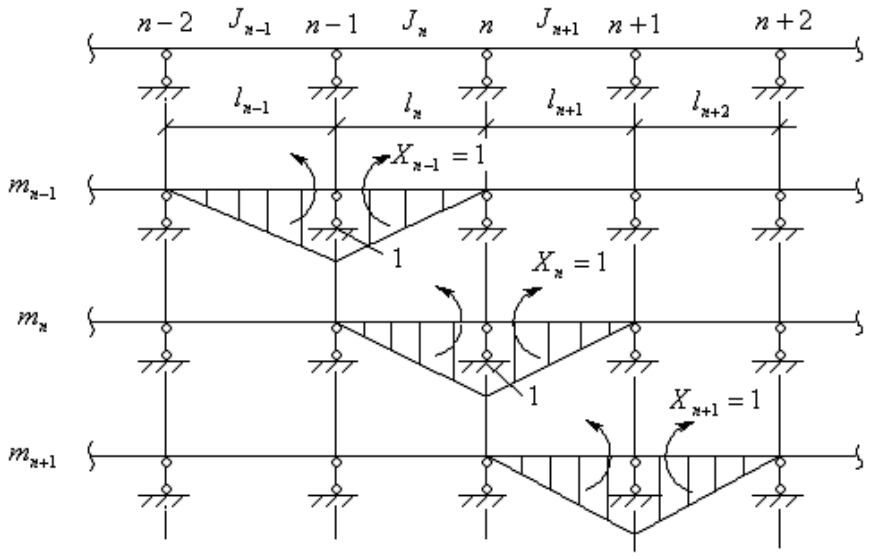
Бұл арқалықтың артық байланыстар саны К-ға тең. Аралық тіреулерге топса қосу арқылы оның негізгі жүйесін (10.1,б-сурет) таңдап аламыз. Негізгі жүйе жәй топсалы арқалықтардан тұрады. Негізгі белгісіздер қатарына $X_1 \ldots X_k$ тіреулер кесіндісінде пайда болатын иілу моменттері жатады. Олар арқалықтың төменгі жағын созады деп болжамдаймыз. Енді n тіреуінің кесіндісі өзара айналуы нөлге тең деген шарттан мына теңдеуді аламыз

$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \ldots + \delta_{nk}X_k + \Delta_{np} = 0 \qquad (10.1)$$

Мұнда $\delta_{n1}X_1$ - бір-біріне шамасы тең, ал таңбалары қарама-қарсы моменттерден X_1 пайда болған өзара айналу бұрышы (серпімділік түзуінің үзіліс бұрышы). 10.1,б-суретке талдау жасай отырып мынандай шешімге келеміз: X_1 моментінен тек 1 және 2 аралықтарда X_2 моментінен 2 мен 3 аралықтарында иілу моменттерінен эпюралары пайда болмақ. Сондықтан осы шешім арқылы (10.1) теңдеуін былайша жазуға болады

$$\delta_{n1n-1}X_{n-1} + \delta_{nn}X_n + \delta_{n1n+1}X_{n+1} + \Delta_{np} = 0 \qquad (10.2)$$

Бұл теңдеу үш мүшелі немесе үш моменттер теңдеуі деп аталады. Оның коэффициенттерін анықтау үшін негізгі жүйеде $X_{n-1} = 1, X_n = 1, X_{n+1} = 1$ моменттерінен пайда болған эпюралар тұрғызамыз (10.2-сурет).



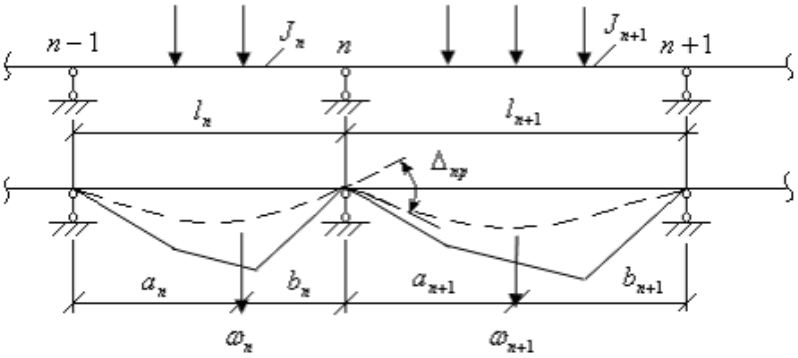
Сурет 10.2 – Момент эпюралары

Мор формуласы бойынша коэффициенттерді анықтаймыз:

$$
\begin{aligned}
EJ_0\delta_{n1n-1} &= \sum\int_0^l \frac{m_n m_{n-1} J_0}{J}\,dx = \frac{1}{6}\frac{J_0}{J_n}l_n = \frac{l'_n}{6};\\
EJ_0\delta_{n1n} &= \sum\int_0^l m_n^2\,\frac{J_0}{J}\,dx = \frac{1}{3}\left(l'_{n+1} + l'_n\right);\\
EJ_0\delta_{n1n+1} &= \sum\int_0^l m_n m_{n+1}\,\frac{J_0}{J}\,dx = \frac{l'_{n+1}}{6};\\
l'_n &= \frac{J_0}{J_n}l_n; \quad l'_{n+1} = \frac{J_0}{J_{n+1}}l_{n+1}
\end{aligned}
\tag{10.3}
$$

Мұнда l'_n, l'_{n+1} - келтірілген аралықтар (n және $n+1$ аралықтарының ұзындықтары); J_0 - негізгі өстік момент инерциясы.

Бос мүшені Δ_{np} табу үшін негізгі жүйеде сыртқы күштер әсерінен пайда болған иілу моментінің эпюрасын m_p (жүк эпюрасын) тұрғызамыз (10.3-сурет).



Сурет 10.3 – Иілу моменті эпюрасы

Бос мүшені Δ_{np} Мор формуласы бойынша анықтаймыз

$$EJ_0\Delta_{np} = \sum\int_0^l m_n m_p \frac{J_0}{J}dx = \frac{J_0}{J_n}\frac{a_n}{l_n}\omega_n +$$

$$+\frac{J_0}{J_{n+1}}\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\omega_{n+1} = \frac{J_0}{J_n}B_n^{ж} + \frac{J_0}{J_{n+1}}A_{n+1}^{ж} \qquad (10.4)$$

$$B_n^{ж} = \frac{a_n}{l_n}\omega_n; \quad A_{n+1}^{ж} = \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\omega_{n+1}$$

Мұнда ω_n, ω_{n+1} - эпюралардың аудандары; $B_n^{ж}$ - n аралығының оң жалған тіреу реакциясы; $A_{n+1}^{ж}$ - $n+1$ аралығының сол жалған тіреу реакциясы.

(10.3) және (10.4) өрнектерін (10.2) теңдеуіне қойып үш моменттер теңдеулерін аламыз

$$l_n' X_{n-1} + 2(l_n' + l_{n+1}')X_n + l_{n+1}' X_{n+1} =$$

$$-6\left(\frac{J_0}{J_n}B_n^{ж} + \frac{J_0}{J_{n+1}}A_{n+1}^{ж}\right) \qquad (10.5)$$

Практикада жиі кездесетін күштерден пайда болған жалған реакциялардың мәндері кесте бойынша анықталады.

Үш моменттер теңдеулері күш әдісінің канондық теңдеулері ьолып табылады. Осы теңдеулерден белгісіздер анықталған соң берілген кесілмеген арқалықта иілу моментінің эпюрасы мына формула бойынша тұрғызылады

$$M = m_p + \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot X_i \qquad (10.6)$$

Егер көлденең сырғу есептеуде ескерілетін болса, онда үш моменттер теңдеулерінің коэффициенттері көлденең сырғу параметріне тәуелді болады.

$$\beta = \frac{3}{l^2}\frac{EJ}{\mu G'F} \qquad (10.7)$$

Коэффициенттерді анықтау үшін негізгі жүйеде бірлік моменттерінен $(X_{n-1} = 1; X_n = 1; X_{n+1} = 1)$ және сыртқы күштерден пайда болған көлденең күш эпюралары тұрғызылады. Мор формуласы бойынша олардың мәндері табылады

$$EJ_0\delta_{n,n-1} = \frac{l_n'}{6}(1 - 2\beta_n);$$

$$EJ_0\delta_{n,n} = \frac{1}{3}(l_n' + l_{n+1}')(1 + \beta_{n,n+1}); \qquad (10.8)$$

$$EJ_0\delta_{n,n+1} = \frac{l_{n+1}'}{6}(1 - 2\beta_{n+1});$$

$$EJ_0\Delta_{np} = \frac{J_0}{J_n}B_n^{ж}\left(1 + \underbrace{\frac{J_n}{B_n^{ж}}\frac{EJ_n}{\mu G'F_n}}_{\tilde{y}_n}\right) +$$

$$+\frac{J_0}{J_{n+1}}A_{n+1}^{ж}\left(1 - \underbrace{\frac{J_{n-1}}{A_{n+1}^{ж}}\frac{EJ_{n+1}}{\mu G'F_{n+1}}}_{\tilde{y}_{n+1}}\right)$$

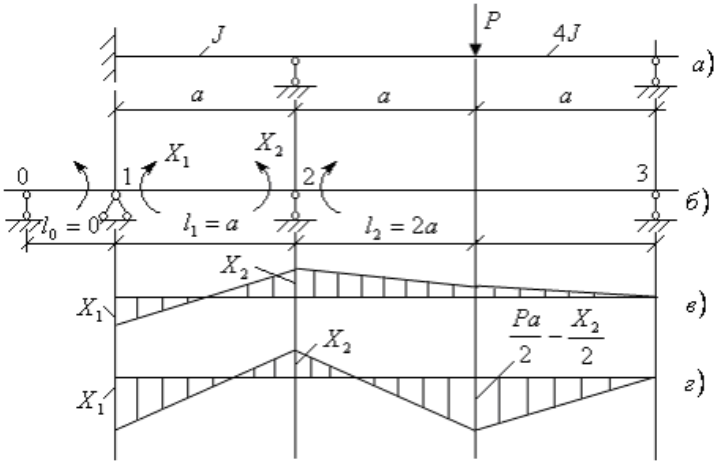
$$\beta_n = \frac{3}{l_n^2}\frac{EJ_n}{\mu G' F_n}; \quad \beta_{n+1} = \frac{3}{l_{n+1}^2}\frac{EJ_{n+1}}{\mu G' F_{n+1}};$$
$$\beta_{n,n+1} = \frac{l'_n \beta_n + l'_{n+1}\beta_{n+1}}{(l'_n + l'_{n+1})}$$

Мұнда β_n - n аралығының көлденең сырғу параметрі; y_n - n аралығында тұрғызылған көлденең күш эпюрасының (сыртқы күш әсерінен) ортаңғы ординатасы; y_{n+1} - $n+1$ аралығындағы көлденең күш эпюрасының ортаңғы ординатасы; (10.8) өрнегін (10.2) теңдеулеріне қойып, үш моменттер теңдеулерін былайша жазуға болады

$$\begin{aligned} & l'_n(1-2\beta_n)X_{n-1} + 2(l'_n + l'_{n+1})(1+\beta_{n,n+1})X_n \\ & + l'_{n+1}(1-2\beta_{n+1})X_{n+1} + 6\frac{J_0}{J_n}B_n^{ж}(1+\tilde{y}_n) + \\ & + 6\frac{J_0}{J_{n+1}}A_{n+1}^{ж}(1-\tilde{y}_{n+1}) = 0 \end{aligned} \tag{10.9}$$

Егер көлденең сырғуды ескермейтін болсақ, онда $\beta_n = \beta_{n+1} = \beta_{n,n+1} = \tilde{y}_n = \tilde{y}_{n+1} = 0$. Бұл жағдайда (10.9) теңдеуі бұрын алынған (10.5) теңдеуімен тең түседі.

Мысал. Берілген кесілмеген арқалықты (10.4-сурет) үш моменттер теңдеулері арқылы есептеу керек. Бұл арқалықтың сол шеті бекітілген, ал оң шеті тірелген. Оны статикалық анықталған түрге келтіру үшін, екі артық байланыстардан арылу (құтылу) керек. Екі топса қосу арқылы негізгі жүйені таңдап аламыз (10.4,б-сурет). Мұнда X_1, X_2 тіреулер моменттері болып табылады. Бекітілген байланысты жәй арқалықпен алмастырамыз. Бұл арқалықтың ұзындығы (аралығы) $l_0 = 0$. Енді келтірілген аралықтардың мәндерін анықтаймыз $(J_0 = 4J)$



Сурет 10.4 – Кесілмеген арқалық

$$l'_0 = \frac{J_0}{J_0}l_0 = 0; \quad l'_1 = \frac{J_0}{J_1}\cdot a = 4\cdot a;$$
$$l'_2 = \frac{J_0}{J_2}\cdot 2a = 2a \tag{10.10}$$

Көлденең сырғу параметрлерінің мәндерін табамыз

$$\beta_1 = \frac{3}{a^2}\frac{EJ}{\mu G'F}; \quad \beta_2 = \frac{3}{4a^2}\frac{EJ}{\mu G'F} = \frac{\beta_1}{4}; \tag{10.11}$$
$$\tilde{y}_0 = \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 0; \quad \beta_0 = \infty; \quad \beta_{0,1} = \beta_i; \quad \beta_{1,2} = \frac{9}{12}\beta_1$$

Кесте бойынша жалған реакцияларды анықтаймыз

$$B_0^{ж} = A_1^{ж} = 0; \quad 6B_1^{ж} = 0; \quad 6A_2^{ж} = \frac{3}{2}Pa^2 \tag{10.12}$$

(5.9) теңдеуі бойынша тіреулер түйіндеріне (1 және 2) теңдеулер құрамыз

$$\begin{aligned} & l_0'(1-2\beta_0)X_0 + 2(l_0' + l_1')(1+\beta_{0,1})X_1 \\ & + l_1'(1-2\beta_1)X_2 + 6\frac{J_0}{J_0}B_0^{ж}(1+\tilde{y}_0) + 6\frac{J_0}{J_1}A_1^{ж}(1-\tilde{y}_1) = 0 \\ & l_1'(1-2\beta_1)X_1 + 2(l_1' + l_2')(1+\beta_{1,2})X_2 + l_2'(1-2\beta_2)X_3 \\ & + 6\frac{J_0}{J_1}B_1^{ж}(1+\tilde{y}_1) + 6\frac{J_0}{J_2}A_2^{ж}(1-\tilde{y}_2) = 0 \end{aligned} \tag{10.13}$$

Коэффициенттердің мәндерін және $X_0 = X_3 = 0$ ескере отырып (10.13) теңдеулерін былайша жазуға болады

$$\begin{aligned} & 2\cdot 4a(1+\beta_1)X_1 + 4\cdot a(1-2\beta_1)X_2 = 0; \\ & 4a(1-2\beta_1)X_1 + 2(4a+2a)\left(1+\frac{9}{12}\beta_1\right)X_2 + \frac{3}{2}Pa^2 = 0 \end{aligned} \tag{10.14}$$

Осы теңдеулерді шешіп, тіреулер моменттерін анықтаймыз

$$X_1 = \frac{3(1-2\beta_1)Pa}{4(10\cdot 29\beta_1 + \beta_1^2)}; \quad X_2 = -\frac{3}{2}\frac{(1+\beta_1)Pa}{(10+29\beta_1+\beta_1^2)} \tag{10.15}$$

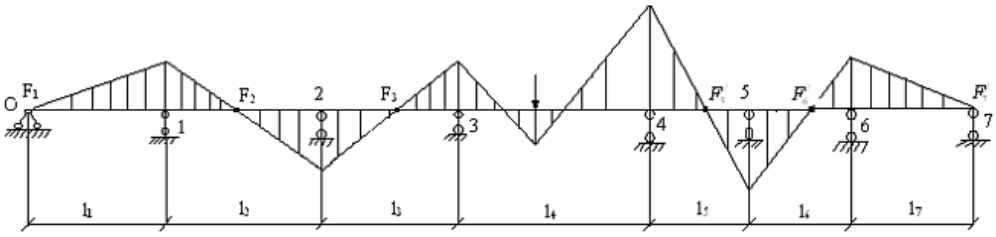
Осы мәндер арқылы тіреулер моменттерінің эпюрасын тұрғызамыз (10.4, в-сурет). Осы эпюраға жәй арқалықтың эпюрасын (шоғырланған күштен) қосып түпкі иілу моментінің эпюрасын аламыз (10.4, г-сурет). Егер есептеуде көлденең сырғу ескерілмесе, онда тіреу моменттерінің мәндері былай анықталады: $\beta_1 = 0$

$$X_1 = \frac{3}{40}Pa; \qquad X_2 = \frac{3}{20}Pa \tag{10.16}$$

Иілу моменттерінің эпюрасы $|M|$ бойынша көлденең күш эпюрасын $|Q|$ тұрғызуға болады. Осы эпюра бойынша тіреулер реакциялары табылып, олар арқылы берілген кесілмеген арқалықтың тепе-теңдігі тексеріледі.

Моменттер теңдеулері және олардың негізгі қатынастары.

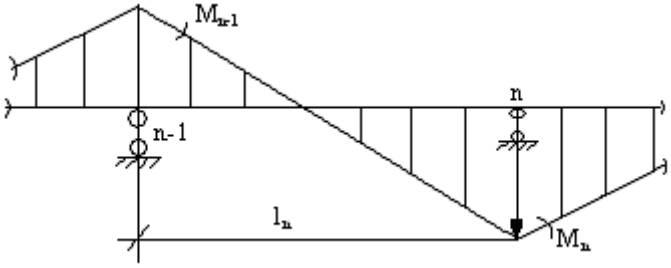
Егер берілген кесілмеген арқалықтың тек бір ғана аралығы жүктелген болса, онда иілу моментінің эпюрасының түрі 10.5-суреттегідей болмақ.



Сурет 10.5 - Иілу моментінің эпюрасы

Бұл эпюраның бір қасиеті; әрбір жүктелмеген аралықта момент эпюрасы еңкейген түзу бойымен өзгереді де нөл нүктесі арқылы өтеді. Олар суретте былайша белгіленген: солдық $|F_1, F_2, F_3|$ және ондық $|F_5^{/}; F_6^{/}; F_7^{/}|$.

Егер кесілмеген арқалықтың сыртқы күштері аралықтың оң (сол) жағына түсіп тұрса, онда аралықтың сол (оң) моменттік фокусы деп, осы аралықтың момент эпюрасының нөл нүктесін айтамыз.



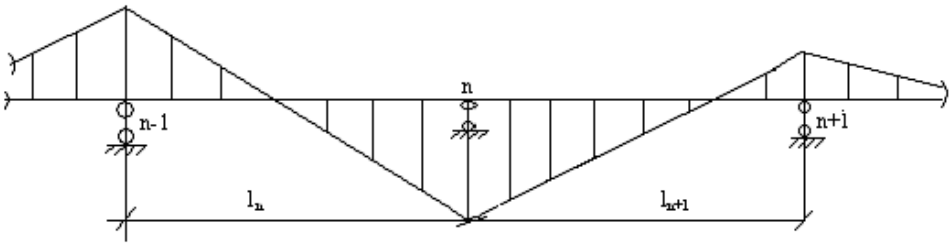
Сурет 10.6 - Арқалықтың фокустары

Момент фокусының қатынасы деп, кез келген аралықтың ұштарының иілу моменттерінің өзара қатынасының авсалюттік шамасын айтамыз. Фокустық қатынастары екі түрге (оң және сол) бөлінеді. 10.6-суретте көрсетілген арқалықтың фокустық қатынастары былайша анықталады:

$$k_n = -\frac{M_n}{M_{n-1}}$$

$$k_n^{/} = -\frac{M_{n-1}}{M_n} \qquad (10.17)$$

Мұнда k_n - сол фокустық қатынас; $k_n^{/}$ -n аралығының оң фокустық қатынасы. Осы фокустық қатынастардың рекурренттік формуласын алу үшін, 10.7-суретте көрсетілген арқалықтың n тіреуіне үш моменттер теңдеуін (10.9) құру қажет.



Сурет 10.7 - Арқалық

$$l_n^{/}(1-2\beta_n)\cdot M_{n-1} + 2\left(l_n^{/} + l_{n+1}^{/}\right)\left(1+\beta_{n,n+1}\right) M_n + l_{n+1}^{/}\left(1-2\beta_{n+1}\right) M_{n+1} = 0 \qquad (10.18)$$

Осы теңдеуді M_n-ге бөліп, (10.17) өргені бойынша былай жазуға болады.

$$-l_n^{/}\left(1-2\beta_n\right)\frac{1}{k_n} + 2\left(l_n^{/} + l_{n+1}^{/}\right)\left(1+\beta_{n,n+1}\right) - l_{n+1}^{/}\left(1-2\beta_{n+1}\right)k_{n+1} = 0 \qquad (10.19)$$

Осы өрнектен сол фокустық қатынастың рекурренттік формуласын аламыз.

$$k_{n+1} = 2\frac{(1+\beta_{n,n+1})}{(1-2\beta_{n+1})} + \frac{l_n^{/}}{l_{n+1}^{/}}\left[2\frac{(1+\beta_{n,n+1})}{(1-2\beta_{n+1})} - \frac{(1-2\beta_n)}{(1-2\beta_{n+1})}\frac{1}{k_n}\right] \qquad (10.20)$$

Егер (10.18) теңдеуін M_n-ге бөліп, оң фокустық қатынасын (10.17) бойынша ескерсек, онда оң фокустық қатынастың рекурренттік формуласы алынады.

$$k_n^{/} = 2\frac{(1+\beta_{n,n+1})}{1-2\beta_n} + \frac{l_{n+1}^{/}}{l_n^{/}}\left[2\frac{(1+\beta_{n,n+1})}{(1-2\beta_n)} - \frac{(1-2\beta_{n+1})}{(1-2\beta_n)}\frac{1}{k_{n+1}^{/}}\right] \qquad (10.21)$$

Жоғарыдағы алынған формулаларды (10.20) және (10.21) қолдану үшін шеткі аралықтардың фокустық қатынастары белгілі болу керек.

Егер аралықтың сол (оң) шеті топсы тіреумен жалғасса, онда бірінші n-ші аралықтың сол (оң) фокустық қатынасы былайша анықталады.

$$k_1 = -\frac{M_1}{M_0} = -\frac{M_1}{0} = \infty$$

$$k_n^{/} = -\frac{M_{n-1}}{M_n} = -\frac{M_{n-1}}{0} = \infty \qquad (10.22)$$

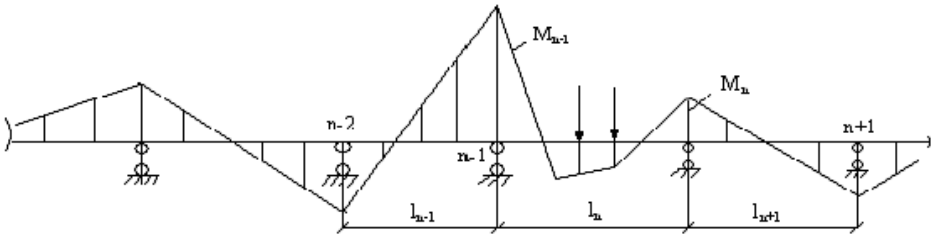
Егер осы арқалықтың сол (оң) шеті бекітілген болса, онда осы байланысты жәй арқалықпен алмастырып (ұзындықтары) $l_0 = 0$; $l_{n+1} = 0$ (10.20) және (10.21) формулаларын қолдана отырып, мынадай мәндер алуға болады.

$$k_n = 2\frac{(1+\beta_{0,1})}{(1-2\beta_1)} = 2\frac{(1+\beta_1)}{(1-2\beta_1)};$$

$$k_n^{/} = 2\frac{(1+\beta_{n,n+1})}{(1-2\beta_n)} = 2\frac{(1+\beta_n)}{(1-2\beta_n)} \qquad (10.23)$$

Егер көлденең сырғу есептеуден ескерілмейтін болса, $(\beta_1 = \beta_n = 0)$. Бұл жағдайда (10.23) формуласы классикалық түрге келтіріледі (белгілі оқулықтарда көрсетілген).

Берілген арқалықтың n аралығында жүк түсіп тұр деп санап (10.8-сурет), осы аралықтың тіреулерінің моменттерін анықтап көрейік.



Сурет 10.8 - Арқалық

Үш моменттер теңдеуін (10.9) қолданып, (n-1) және (n) тіреулеріне екі теңдеу құрамыз:

$$\begin{aligned} & l_{n-1}^{/}(1-2\beta_{n-1})M_{n-2} + 2(l_{n-1}^{/} + l_n^{/})\cdot(1+\beta_{n-1,n})M_{n-1} \\ & + l_n^{/}(1-2\beta_n)\cdot M_n + 6\frac{z_0}{z_n}A_n^{ж}(1-\tilde{y}_n) = 0 \\ & l_n^{/}(1-2\beta_n)\cdot M_{n-1} + 2(l_n^{/} + l_{n+1}^{/})(1+\beta_{n,n+1})M_n \\ & + l_{n+1}^{/}(1-2\beta_{n+1})M_{n+1} + 6\frac{z_0}{z_n}B_n^{ж}(1-\tilde{y}_n) = 0 \end{aligned} \qquad (10.24)$$

Осы теңдеулерге фокустық қатынастардың мәндерін және (10.20), (10.21) өрнектерін қолдана отырып, оларды былай жазуға болады.

$$M_{n-2} = -\frac{M_{n-1}}{k_{n-1}}; \qquad M_{n+1} = -\frac{M_n}{k_{n'+1}} \tag{10.25}$$

$$k_n l_n' M_{n-1} + l_n' M_n = -6\frac{z_0}{z_n} A_n^{ж} \frac{(1-\tilde{y}_n)}{(1-2\beta_n)}$$

$$l_n' \; M_{n-1} + l_n' \; k_n' \; M_n = -6\frac{z_0}{z_n} B_n^{ж} \frac{(1+\tilde{y}_n)}{(1-2\beta_n)} \tag{10.26}$$

Осы теңдеулерді шешіп, тіреулер моменттерін табамыз:

$$M_{n-1} = -6\frac{\left[A_n^{ж} \cdot (1-\tilde{y}_n)k_n' - B_n^{ж}(1+\tilde{y}_n)\right]}{l_n\left(k_n k_n' - 1\right)(1-2\beta_n)};$$

$$M_n = -6\frac{\left[B_n^{ж} \cdot (1+\tilde{y}_n)k_n - A_n^{ж}(1-\tilde{y}_n)\right]}{l_n\left(k_n k_n' - 1\right)(1-2\beta_n)} \tag{10.27}$$

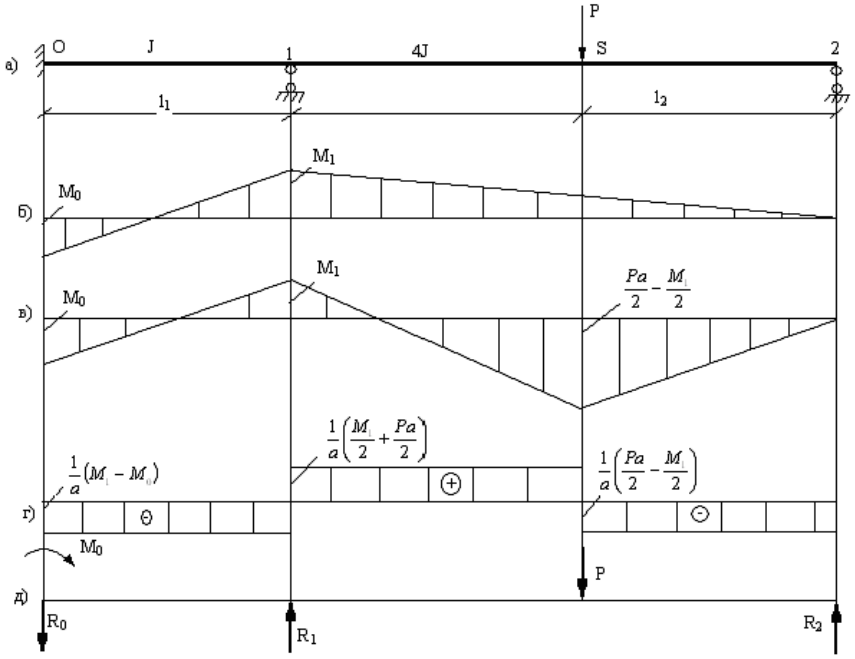
$$\tilde{y}_n = \frac{B_n y_n l^2}{3B_n^{ж}}$$

Мұнда β_n (10.7) формуласы бойынша табылатын көлденең сырғу параметрі; $B_n^{ж}$, $A_{n-n}^{ж}$ аралығының кесте бойынша табылатын оң және сол жалған реакциялар; жүктелген аралықтың тіреулер моменттерінен фокустық қатынастар арқылы арқалықтың басқа тіреулер моменттерін табуға болады.

Арқалықты есептеуде сандық әдістерді қолдану.

1. Солдан оңға қарай арқалықтың тіреулерін (нөлден), аралықтарын (бірден) бастап белгілеу керек.
2. Арқалықтың келтірілген аралықтарын және оның көлденең сырғу параметрін анықтау керек.
3. Шеткі аралықтырдың (сол және оң) фокустық қатынастарын табу керек.
4. Рекурренттік формулалар бойынша арқалықтың ортаңғы аралықтарының (сол және оң) фокустық қатынастырын анықтау керек.
5. Жүктелген аралықтың жалған реакцияларын және оның тіреулерінің моменттерін анықтау керек.
6. Фокустық қатынастар бойынша басқа тіреулердің моменттерін табу керек.
7. Тіреулер моменттерінің эпюрасын тұрғызу керек.
8. Тіреулер моменттеріне жәй аралықтың моменттерін қосу арқылы берілген кесілмеген аралықтың иілу моментінің эпюрасын тұрғызу керек.
9. Иілу моментінің эпюрасы бойынша көлденең күш эпюрасын тұрғызу керек.
10. Көлденең күш эпюрасынан арқалықтың реакцияларын табу керек.
11. Берілген арқалықтың тепе-теңдік қалпын тексеру керек.

Мысал. 10.4 а-суретте көрсетелген арқалықты фокустық қатынастар әдісімен есептеу керек. Бұл арқалықтың үш тіреуі және екі аралығы бар 10.8 а-суретте көрсетілген.



Сурет 10.8 - Арқалық

Келтірілген аралықтарды және олардың көлденең сырғу параметрлерін анықтаймыз $[z_0 = 4;\ l_0 = 0]$.

$$l_0^{/} = \frac{z_0}{J_0} l_0 = 0; \quad l_0^{/} = \frac{z_0}{J_1} \cdot a = 4a; \quad \beta_0 = \infty.$$
$$l_2^{/} = \frac{z_0}{J_2} \cdot 2a = 2a; \quad \beta_1 = 3 \cdot \frac{EJ}{\mu G^{/} F}; \quad \beta_2 = \beta_1 / 4 \tag{10.28}$$
$$\beta_{0,1} = \beta_1; \quad \beta_{1/2} 9 \beta_1 / 12; \quad \tilde{y}_0 = \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 0$$

Шеткі аралықтардың сол және оң фокустық қатынастарын анықтаймыз

$$k_1 = 2\frac{1+\beta_1}{(1-2\beta_1)}; \qquad k_2^{/} = \infty \tag{10.29}$$

Рекурренттік формулалар (10.20; 10.21) бойынша басқа аралықтардың фокустық қатынастарын анықтаймыз

$$k_2 = \frac{(10+29\beta_1+\beta_1^2)}{(2-\beta_1)(1+\beta_1)}; \quad k_1^{/} = \frac{(12+9\beta_1)}{4(1-2\beta_1)}. \tag{10.30}$$

Кесте бойынша екінші аралықтың жалған реакцияларын және оның тіреу моменттерін (10.27) табамыз.

$$6A_2^{ж} = 6B_2^{ж} = \frac{3}{2}Pa^2; \quad M_2 = 0$$
$$M_1 = -\frac{3}{2}\frac{(1+\beta_1)\cdot Pa}{(10+29\beta_1+\beta_1^2)} \tag{10.31}$$

Фокустық қатынас $M_1 = -k_1 \cdot M_0$ бойынша бекітілген тіреудің моментін анықтаймыз

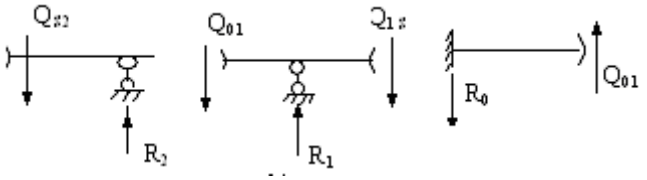
$$M_0 = \frac{3}{4}\frac{(1-2\beta_1)}{(10+29\beta_1+\beta_1^2)} \cdot Pa \tag{10.32}$$

Табылған моменттер (10.31) және (10.32) бойынша тіреулер моменттерінің эпюрасын тұрғызамыз (10.4, б-сурет).

Осы эпюраға жәй топсалы тірелген арқалықтың эпюрасын қосып, иілу моментінің эпюрасын тұрғызамыз (10.4, в-сурет). Иілу моментінің эпюрасынан көлденең күштер мәндерін анықтаймыз.

$$Q_{s2} = -\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{Pa}{2} - \frac{|M_1|}{2}\right); \quad Q_{1s} = \frac{1}{a}\left(\frac{|M_1|}{2} + \frac{Pa}{2}\right) \tag{10.33}$$
$$Q_{01} = -\frac{1}{a}(|M_0| + |M_1|)$$

Осы мәндер бойынша көлденең күш эпюрасын тұрғызамыз (10.4, г-сурет). Көлденең күш эпюрасынан реакциялардың мәндерін анықтаймыз (10.9 сурет).



Сурет 10.9 - Көлденең күш және реакциялар бағыттары

Арқалықтың тепе-теңдік қалпын тексереміз (10.8, д-сурет).

$$\sum Y = 0 \quad -R_0 + R_1 - P + R_2 = -Q_{01} + Q_{01} + Q_{1s}$$
$$-P + Q_{s2} = \frac{1}{a}\left(\frac{M_1}{2} + \frac{Pa}{2}\right) - P + \frac{1}{a}\left(\frac{Pa}{2} - \frac{M_1}{2}\right) \equiv 0$$
$$\sum M_0 = 0. \quad M_0 - R_1 a + P\cdot 2a - R_2\cdot 3a$$
$$= M_0 - a(Q_{01} + Q_{1s}) + 2aP - 3aQ_{s2} =$$
$$= M_0 - \left(M_0 + M_1 + \frac{M_1}{2} + \frac{Pa}{2}\right) + 2aP \tag{10.34}$$
$$-3a\frac{1}{a}\left(\frac{Pa}{2} - \frac{M_1}{2}\right) \equiv 0$$

Бұл теңдеулердің орындалуы есептің дұрыс шыққанын көрсетеді. Фокустық қатынастар әдісімен алынған нәтиже (10.8, в-сурет), үш моменттер теңдеулерін қолданғанда пайда болған нәтижелер (10.4,г-сурет) бірдей болғандығы есептеудің дұрыс болғандығын көрсетеді.

Негізгі әдебиеттер:

1. Шеин А.И. Курс строительной механики: учебник. — Пенза: ПГУАС, 2014. — 312 с.

2. Поляков А.А. Строительная механика: учебное пособие. – Екатеринбург: УрФУ, 2014. – 424 с.

3. Трушин С.И. Строительная механика: метод конечных элементов: учебное пособие. – Москва: Изд-во НИЦ ИНФРА-М, 2019. – 305 с.

4. Жадрасынов Н.Т., Винокуров Л.П. Құрылыс механикасы. - Қарағанды: ҚарМТУ, 2001. - 224 б.

5. Тұрсынов К.А. Құрылыс механикасындағы ақырлы элементтер әдісі: оқу құралы.-Қарағанды: ҚарМУ, 2004.-53 б.

6. Буланов В.Е. Строительная механика: в 2 ч.: учебное пособие. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – Ч. 1. – 80 с.

Қосымша әдебиеттер:

1. Шакирзянов Р.А. Краткий курс лекций по строительной механике: учебное пособие. – Казань: КГАСУ, 2010. – 115 с.

2. Байнатов Ж. Құрылыс механикасы (ғимараттарды динамикаға, сейсмикаға және тұрақтылыққа есептеу). - Алматы: Республикалық баспа кабинеті, 1996. - 235 б.

3. Түсіпов А. Құрылыс механикасының негіздері. - Алматы: Қазақ ұлттық техникалық университеті, 1995. - 121 б.

4. Старцева Л.В., Архипов В. Г., Семенов А.А. Строительная механика в примерах и задача: учебное издание. – М.: Изд-во АСВ, 2013. – 224 с.