Қазақстан Республикасының Ғылым және жоғары ғылым министрлігі

Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті

Математика және ақпараттық технологиялар факультеті

Математикалық талдау және дифференциалдық теңдеулер кафедрасы

 **Искакова Г.Ш.,** ф.-м.ғ.к.,қауымд.проф.

**«Дифференциалдық теңдеулер және есептеу математикасының**

**теориялық негіздері»**

пәні бойынша

**эдектрондық дәріс**

**Цикл** (базалық)

**Компонент** (таңдау)

**Сабақ түрі** (дәріс)

7М01501 – «Математика» білім беру бағдарламасы

Қарағанды 2023

1 дәріс тақырыбы.Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің шешімінің геометриялық және физикалық мағынасы. Изоклиналар. Коши есебі. Айнымалылары бөлектенетін дифференциалдық теңдеулер

**Жоспар**

1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің нормаль түрі.
2. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің геометриялық мағынасы. Интегралдық қисықтар.
3. Коши есебі. Жалпы шешу. Дербес шешу. Жалпы интеграл. Ерекше шешу
4. Айнымалылары бөлектенетін дифференциалдық теңдеулер.
5. 1 -ретті теңдеудің симметриялық түрі.
6. Біртекті теңдеулер. Біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеулер түрлері және оларды шешу .
7. Жалпыланған біртекті теңдеу және оны интегралдау.

**Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің нормаль түрі**

Координаттары  белгіленген декарттық тікбұрышты жүйесінің евклид жазықтығын  арқылы таңбалайық, ал  және   облысында берілген кейбір үзіліссіз функция болсын.

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді оқуды туындысы арқылы айқындалған

  (1)

теңдеуінен бастайық. Мұнда тәуелсіз айнымалы (яғни аргумент), ал тің белгісіз функциясы.

**1-Анықтама.** Тәуелсіз айнымалы , белгісіз функция және оның бірінші ретті туындысы  немесе ті байла-ныстырып тұратын қатынасты **бірінші ретті дифференциалдық теңдеу** деп атайды.

**2-Анықтама.** Егер дифференциалдық теңдеудегі белгісіз функция бір ғана тәуелсіз айнымалының функциясы болса, онда оны **жай дифференциалдық теңдеу** деп атайды.

Бұл тарауда негізінен бірінші ретті жай дифференциалдық теңдеулерді қарастырамыз. Оның жалпы түрі былайша жазылады:

  (2)

(1) теңдеуді **туындысы арқылы айқындалған не бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің нормаль түрі** деп атайды.

(2) теңдеудің шешуі жөнінде түсінік берейік:

Декарттық координаты  болатын  сандық түзудің кейбір аралығы  болсын.

**3-Анықтама.**  аралығында анықталған  функциясы (1) **теңдеудің шешуі** деп аталады, егер

1)  те

2) барлық  үшін 

3)  аралығында

.

Енді бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің симметриялық деп аталатын түріне тоқтала кетейік. (1) теңдеуді қарастырайық.

 

  (3)

(3) бірінші ретті теңдеудің симметриялық түрі деп аталады, бұдан тиісті операциялар арқылы (1) теңдеуді алуға болады.

 **Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің геометриялық мағынасы. Интегралдық қисықтар**

(1) теңдеудің  түріндегі шешуін табудың ылғи да сәті түсе бермейді, көпшілік жағдайда  түрінде айқындалмаған болып келеді. Жалпы (1) теңдеуді шешуін табу процесін оны интегралдау деп те атайды, (1) теңдеу шешуінің  облысындағы сәйкес қисығының графигі интегралдық қисықтар деп аталады.  жазықтықтағы тікбұрышты координаттар болсын. Онда, жоғарыда айтылғандай, (1) теңдеудің  шешуінің графигі ретінде оған бір қисық сәйкес келеді. Осы қисықты бұдан әрі интегралдық қисық деп атаймыз. Кейде осы интегралдық қисықтың өзін шешу деп қарастыруға болады. (1) теңдеудің сол жағы  осінің оң бағытымен  қисығына  нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың арасындағы бұрыштың тангенсі болатыны белгілі. Сондықтан  сияқты кезкелген нүктеде  облысында (1) теңдеу белгілі бір бағыт береді, яғни координаттары  әр нүктеде салынған векторлар пайда болады. Осы әр нүктеден салынған векторлар өріс бағытын береді. Бұл бағыт кезкелген  нүктесінде  теңдеуі арқылы анықталады.

Осы қасиеті арқылы интегралдық қисықтарды басқа толып жатқан қисықтардан ажыратып алуға болады (жазықтықтағы нүкте арқылы шексіз көп қисықтар жүргізуге болатынын ұмытпаңыз).

**Анықтама.** Егер интегралдық қисықтың әрбір нүктесінде (1) теңдеумен анықталатын өрістің көлбеу бағыты әрқашанда бірдей болса, онда оны **изоклина** деп атайды.

Изоклинаның теңдеуі

  (4)

мұнда тұрақты сан,  осімен интегралдық қисыққа жүргізілген жанама арасындағы бұрыш. Яғни (1) теңдеу өріс бағыттарының изоклинасы  облысының барлық нүктесінде өріс бағыттары бірдей  бұрыштық коэффициентіне тең қисықты айтады. Изоклина (1) теңдеу шешуін аналитикалық түрде таппай-ақ, оның интегралдық қисығының бейнесін алуға мүмкіндік береді.

***Ескерту:*** Дифференциалдық теңдеуді интегралдауды дифференциалдауға кері есеп деп қарастыруға болады. Мәселен, интегралдық есептеулерде берілген  функциясының анықталмаған интегралы (алғашқы функциясы) табылады. Мұны теңдеу арқылы былай жазуға болады; егер алғашқы функцияны  арқылы таңбалайтын болсақ  немесе

 . (5)

 , (6)

мұндағы -кез келген тұрақты. (6) теңдіктен белгісіз функция  бірмәнді болмайтындығы шығады, ал бұл (5) дифференциалдық теңдеудің шексіз көп шешуі болатынын көрсетеді. Егер шешуде  кез келген тұрақты болса, оны жалпы шешу деп атайды. Ал -ға белгілі бір мән берсек дербес шешу шығады. Практика жүзінде (5) теңдеудің шексіз көп шешулерінің бәрін қарастырудың қажеті болмайды, көпшілік жағдайда дербес деп аталатын шешулер қарастырылады.

**Коши есебі. Жалпы шешу. Дербес шешу. Жалпы интеграл.**

**Ерекше шешу**

 (1) теңдеу үшін Коши есебі былай қойылады:

(1) теңдеудің толып жатқан барлық шешулерінің ішінен берілген  сан мәні бойынша функцияның өзі  сан мәнін алатындай

  (7)

шешуін табу қажет, яғни

  , (8)

мұндағы  және  бастапқы берілгендер, ал (8) бастапқы шарт деп аталады. Коши есебін геометриялық тұрғыдан былай өрнектейміз: (1) теңдеудің толып жатқан барлық интегралдық қисықтарының ішінен жазықтықта берілген  арқылы өтетінін табу керек.

Егер  саны бар болып, осы сан үшін  аралығында  болатындай  шешуі анықталса, онда Коши есебінің тек бір ғана шешуі болады, басқа шешуі болуы мүмкін емес.

Егер Коши есебінің бір ғана емес бірнеше шешуі болса, онда  нүктесінде жалғыз ғана шешуінің бар болуы бұзылады деп есептеледі.

 **Жалпы шешу. Дербес шешу. Жалпы интеграл**

(1) теңдеудің шексіз көп шешулерінің  тұрақтыға байланысты болатын

  (9)

шешуі **жалпы шешу** деп аталады. Бұл геометриялық тұрғыдан  жазықтығында интегралдық қисықтар тобын өрнектейді. Осы жалпы шешуден бастапқы берілгендер  арқылы Коши есебінің шешуін алуға болады. (9) теңдікке  мәндерін қоямыз.

  (10)

(10) теңдікті (9) теңдікке қойып Коши түріндегі дербес шешуді алуға болады.  немесе

  (11)

Егер (1) теңдеудің шешуі арқылы айқындалмаған

  (12)

түрінде алынса, оны жалпы интеграл деп айтады. (12) теңдіктен

  (13)

алынса, ол канондық түрдегі жалпы интеграл деп аталады. Канондық жалпы интегралдың негізгі бір қасиеті: егер -тің орнына теңдеудің кез келген бір дербес шешуін қойсақ, (13)-тің оң жағы әрқашанда тұрақты шама береді. Мәселен, 

**Ерекше шешу**

Коши есебінің жалғыздық шарты бұзылатын әрбір нүктедегі шешу ерекше шешу деп аталады. Геометриялық тұрғыдан ерекше шешу теңдеу шешулерінің интегралдық қисықтар тобының құрамында болмайды, сондықтан да теңдеу жалпы шешуінің бар болатын облысында жатпайды.

 *Айнымалылары бөлектенетін дифференциалдық теңдеулер*

Айнымалылары бөлектенетін теңдеулер (3) симметриялық түріндегі теңдеуге ұқсас.

  (14)

  тің берілген үзіліссіз функциялары,  тің берілген үзіліссіз функциялары, айнымалылары бөлектенетін теңдеу деп аталады. Мұнда  облысында (14) теңдеудің ерекше нүктелері болмайды деп алынады. Егер

 болатын  табылса, онда  (14) теңдеудің шешуі болар еді, осыған ұқсас  болатын  табылса, онда  (14) теңдеудің шешуі болады.

Егерде  және  болса,  нүктесінің аймағында (14) теңдеу мына төмендегі теңдеумен пара – пар болар еді, себебі екі теңдеудің де шешулерінің жиыны бірдей.

  (15)

Бұл айнымалылары бөлектенген теңдеу. Практика жүзінде (14) теңдеудің екі жағын  өрнегіне бөліп (14) теңдеуден алуға болады. (15) интегралдау арқылы

  (16)

жалпы интегралын табамыз.  . (16) – да  және ,  (біруақытта нольге тең емес) деп алып  бастапқы берілгендерге сәйкес шешуін аламыз.

  (17)

**Біртекті теңдеулер. Біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеулер. Бірінші ретті теңдеудің симметриялық түрі**

Енді біртекті теңдеулердің кейбір қасиеттері қолданылатын сызықтық деп аталатын теңдеулерді қарастырайық.



теңдеуі берілсін. Бұдан  шығады. Екі жағын  функциясына көбейтейік, сонда



алсақ келесі теңдеу шығады.

  (18)

осы теңдеу **бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің симметриялық түрі** деп аталады.

 **1-Анықтама.**  функциялары ** өлшемді біртекті функция** деп аталады, егер барлық  үшін

 , (19)

мұнда  деп алсақ,



немесе

  (20)

**2-Анықтама.** Егер (18) теңдеуде  функциялары бірдей  өлшемдес болса, онда ол теңдеу **біртекті дифференциалдық теңдеу** деп аталады. (18) теңдеуге (20) қолдансақ:



  (21)

Егер (18) теңдеу (21) түріне келтірілсе , онда ол біртекті теңдеу . Біртекті теңдеуді интегралдау үшін

  (22)

ауыстыруын қолданайық, мұнда  тің белгісіз жаңа функциясы, бұдан

  (23)

(22), (23)-ті (18) – ге қойсақ:



(20) – ға сүйенсек 

  (24)

айнымалылары бөлектенетін теңдеу.

; 

Егер  деп алсақ, онда

  немесе  (25)

жалпы интеграл

**Ерекше шешу:** Айнымалылары бөлектенетін теңдеу алу үшін (24) – ті  өрнегіне бөлгенде  теңдеуінің  түбірін жоғалтар едік. Сондықтан  () бас нүктеге жақындап келетін жартылай түзулер ерекше шешуге күдікті шешу. Егер  (21) теңдеудің жалпы шешуінің құрамында болса, ерекше шешу емес, ал егер болмаса-ерекше шешу. Қандайда болмасын шешуі болу үшін теңдеуді тепе-теңдікке айналдыру қажет.

***Ескерту:*** Біртекті теңдеу интегралдық қисықтарының өзіне тән бір қасиеттері бар. Мұны көрсету үшін (21) теңдеуді алайық. Бұл теңдеудің оң жағы бас нүктеден шығатын  () жартылай түзулердің барлық нүктелерінде тұрақты мәндер қабылдайды. Сондықтан олар (21) теңдеудің изоклинасы болады. Жартылай түзулерден басқа бас нүктеден шығатын интегралдық қисықты алып, оның барлық нүктелердегі радиус-векторларын бірнеше есе көбейтсек немесе азайтсақ, жанамаларының бағыты алынған қисықпен бірдей болар еді. Демек осылайша алынған қисық (21) теңдеудің интегралдық қисығы.

**Біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеулер**

 (26)

теңдеуі берілсін. Егер  болса, онда (26) біртекті теңдеу, сондықтан  және  нольге тең емес деп алынады. Мына төмендегі екі жағдайды қарастырайық.

* 1.  яғни коэффициенттері пропорционал емес. Жазықтықта  түзулерін қарастырайық.

Егер түзудің қиылысу нүктесі  болса, онда

  (27)

(27)-ні  бойынша дифференциалдасақ, яғни

 (28)

(27) және (28)-ді (26)-ға қойсақ



Біртекті теңдеу шығады.

* 1. яғни коэффициенттері пропорционал.



Демек, жазықтықтағы түзулер өзара параллель, cондықтан 

Ендеше (26) теңдеу



түріне келтіріледі де,  (29) сызықтық ауыстыруы арқылы одан айнымалылары бөлектенетін теңдеу аламыз.

Жоғарыдағы жағдайларды өзбеттеріңізбен дәлелдеңіздер.

***Ескерту:*** (21) теңдеу үшін  кез келген тұрақты, түрлендіру тобы қолданылады, өйткені



Бұл ұқсастық центрі координаттар жүйесінің бас нүктесінде болатын ұқсастық түрлендіру. Демек, бас нүкте арқылы өтетін әр түзулерінде жанама мен өріс бағыттары бірдей, сондықтан бұл түзулер изоклина болады.

**Жалпыланған біртекті теңдеулер және оларды интегралдау**

  (30)

теңдеуі берілсін.

**1-Анықтама.** Егер  аргументтерін сәйкес -өлшемдес деп алғанда, (13) теңдеудің сол жағы біртекті функция болса, онда ол **жалпыланған біртекті теңдеу** деп аталады, яғни

  (31)

орынды.

Жалпыланған біртекті (30) теңдеуді интегралдау үшін

 (32)

ауыстыруын қолданамыз, мұнда  жаңа тәуелсіз айнымалы, ал  жаңа белгісіз функция.

  (33)

(32)-нің екіншісін  бойынша дифференциалдап орнына қойсақ

  (34)

шығады. (22) теңдеуден

  (35)

Біртекті қасиетін еске алсақ



немесе

 (36)

теңдеуі шығады. Бұл  теңдеуі сияқты.

Егер  арқылы айқындалса, оңай интегралданады. Басқа жағдайларда параметр енгізу әдісін қолданамыз.

**2-Анықтама.** (18) симметриялық түріндегі 1-ретті дифференциалдық теңдеу жалпыланған біртекті деп аталады, егер бір  саны табылып,  ауыстыруы арқылы (18)  және  ға байланысты біртекті теңдеу болса.

Осыны өзбетіңізбен дәлелдеңіз.

***Ескерту:*** Мына төмендегі жалпы түрдегі

  (37)

қарастырайық.

 болғанда (37) теңдеу шығады. (37) –ні интегралдау үшін

  (38)

ауыстыруы қолданылады.





айнымалылары бөлектенген теңдеуге келтірілді.



мұнда  кез келген тұрақты.

1 -ретті сызықтық теңдеулер және оған келтірілетін теңдеулер. Риккати арнайы теңдеуі

**Анықтама.** Егер 1-ретті дифференциалдық теңдеу ізделетін белгісіз функция және оның туындысы  бойынша сызықты болып келсе, оны **сызықтық теңдеу** деп атайды.

Мәселен, 

 деп алып, теңдеудің екі жағын бөлейік, сонда



  (39)

Егер  болса, оны біртекті сызықтық, ал  болса, сызықтық емес 1-ретті теңдеу деп атайды.

Алдымен біртекті сызықтық теңдеуді интегралдайық.

  (40)

Бұдан әрі (40) теңдеуді (39) теңдеуге сәйкес біртекті теңдеу деп атайды, бұл айнымалылары бөлектенетін теңдеу.



  (41)

біртекті теңдеудің жалпы шешімі.

 ***Сызықтық теңдеудің жалпы қасиеттері***

10. Тәуелсіз айнымалы -ті  , мұнда  аралығында анықталған, әрі дифференциалдаланатын -ның функциясы арқылы ауыстырғаннан (39) теңдеудің сызықтық қалпы өзгермейді.

20. Іздеп отырған  функциясын сызықтық түрде



ауыстырғаннан (39) теңдеудің сызықтық қалпы өзгермейді, мұнда  белгісіз -тің жаңа функциясы, ал  (бұл қасиеттердің дұрыстығын өз беттеріңізбен дәлелдеңіздер).

 **Біртекті емес сызықтық теңдеулерді интегралдау әдістері**

(39) теңдеуді интегралдаудың негізгі үш әдісі бар:

тұрақтыны варияциалау әдісі (Лагранж әдісі), теңдеудің сол жағын толық туындыға келтіру (Эйлер әдісі) және Бернулли әдісі.

*10 . Тұрақтыны вариациялау әдісі. Лагранж әдісі.*

Бұл әдістің мәнісі мынада: (39) теңдеудің жалпы шешуі оған сәйкес біртекті теңдеудің (41) жалпы шешуі түрінде ізделеді, бірақ  тұрақтының орнына  –те үзіліссіз дифференциалданатын  функциясы алынады, яғни тұрақты шама вариацияланады.

Демек (39) теңдеудің жалпы шешуін

  (42)

түрінде іздейміз.

Енді  тің (39) теңдеуді қанағаттандыратын мәнін табуымыз қажет.

Ол үшін (42) ті  бойынша дифференциалдаймыз.

  (43)

(42) және (43)-ті (39)-ге қойсақ:



  (44)

(44)-ны (42)-ке қойып, теңдеудің жалпы шешімін табамыз, яғни

  (45)

*20. Эйлер әдісі.*Біртекті емес теңдеудің сол жағын толық туындыға келтіру немесе интегралдаушы көбейткіш әдісі.

(39) теңдеудің екі жағын  көбейтсек, сонда

 ;  интегралдасақ  осыдан

  (46)

(39) теңдеудің жалпы шешуі.

*30. Бернулли әдісі.*

(39) теңдеудің шешуін  (46), мұнда  анықталған, әрі дифференциалданатын функциялар түрінде іздейміз.

(46) ды  бойынша дифференциалдайық

  (47)

(46) және (47) (39) ге қойып және  функциясын

 теңдеуді қанағаттандыратындай етіп алайық, бұдан

  (48)



 интегралдасақ 

  (49)

жалпы шешу.

***Біртекті емес сызықтық теңдеу шешімінің құрылымы. Сызықтық біртекті емес теңдеудің дербес шешімін табу.***

**Теорема:** Егер  (39) теңдеудің бір дербес шешуі болып, ал  оған сәйкес (40) біртекті теңдеудің жалпы шешуі болса, онда (39) теңдеудің жадпы шешуі

  (50)



формуласы арқылы өрнектеледі.

**Нұсқау:** Теореманы дәлелдеу үшін  мұнда  -тің белгісіз жаңа функциясы, ауыстыруын  бойынша дифференциалдап, (39) теңдеуге қоямыз, содан -ті тауып қойсақ (50) шығады.

***Ескерту***: (46)формулада да жақшаны ашсақ:

  (51)

(50) пен (51) ті салыстырсақ

  (52)

шығады. (15) арқылы (1) теңдеудің бір дербес шешуін табамыз.

***Ескерту:*** Егер (39) теңдеудің және дербес шешулері белгілі болса, онда



орынды. Бұдан мүшелеп алып тастасақ, мынау шығады



Демек (40) біртекті теңдеудің жалпы шешуі  болар еді де, (39) біртекті емес теңдеудің жалпы шешуін теорема бойынша

;

**Қорытынды:** Егер теңдеудің  және  екі дербес шешуі белгілі болса, онда теңдеудің шешуін квадратурасыз табуға болады екен.

***Сызықтық теңдеуге келтірілетін теңдеулер. Оларды интегралдау үшін (сызықтық теңдеуге келтіру үшін) қолданылатын әдістер.***

  (53)

мұнда  нольден, бірден басқа кез келген тұрақты сан, түріндегі теңдеу Бернулли теңдеуі деп аталады.

Бұл теңдеуді алғаш рет Яков Бернулли (1695ж) қолданған, ал шешуін тапқан інісі Иван Бернулли.  болғанда (53) теңдеу біртекті емес сызықтық теңдеу, ал  болғанда айнымалылары бөлектенетін теңдеу болатынын көрсету қиын емес. (16) теңдеуді интегралдау үшін, оның екі жақын  бөлейік:

 , (54)

мұнда теңдеудің бірінші мүшесі  қасындағы көбейткіштің бір тұрақты коэффицентке ғана айырмашылығы бар туындысы болып тұр. Сондықтан,

  (55)

мұнда -тің жаңа белгісіз функциясы, ауыстыруын қолданған қолайлы. (55) ді  бойынша дифференциалдасақ, сонда

  (56)

(54), (55)-ды (53) ге қойсақ:

  (57)

біртекті емес сызықтық теңдеу.

Демек, жалпы шешуі



Егер (18) еске алсақ

  (58)

(58) Бернулли теңдеуінің жалпы шешуі:

Ерекше шешу:  болғанда теңдіктің екі жағын  бөлгенде  шешуін жоғалтуымыз мүмкін, ал  болғанда  теңдеудің шешуі емес.  болғанда  (58) формула бойынша  болғанда шығады, ол дербес шешу, себебі  осінің нүктелері арқылы ешқандай интегралдық қисық өтпейді. Жоғарғы айтылғандарға байланысты  болғанда ғана ерекше шешу болуы мүмкін.

20. Дарбу теңдеуі

 , (59)

мұнда  және -өлшемді біртекті, ал -өлшемді біртекті функциялар, түріндегі теңдеуді Дарбу теңдеуі деп аталады.

Егер  болса, онда (59) теңдеу бірден біртекті теңдеу болар еді.

 (60), мұнда  -тің жаңа белгісіз функциясы, ауыстыруы арқылы (59) теңдеуді Бернулли теңдеуіне келтіруге болатындығын көрсетейік:

  (60)

  (61)

Алдымен, (59) теңдеуді біртекті функциялардың қасиетіне сүйеніп мына түрде жазамыз:



(59), (60), (61)-ге сүйеніп былай жазуға болады:



-ге қысқартып,  және  бойынша жинақтасақ



шығады. Теңдеудің екі жағын -ға бөлсек,



немесе

  (62)

Бұл Бернулли теңдеуі, мұнда  ауыстыруы арқылы (62) теңдеуді сызықтық теңдеуге келтіреміз.

Дарбу теңдеуінің ерекше шешуі  болуы мүмкін, мұнда  теңдеуінің түбірі ;

30. Риккати теңдеуі:

**Анықтама.** Егер  теңдеуінің оң жағы -ке байланысты квадрат үшмүшелік болса, яғни

  (63)

оны Риккати теңдеуі деп атайды, мұнда  және -те анықталған әрі үзіліссіз -тің функциялары, коэффициенттер.

Егер  болса, онда (63) теңдеу Бернулли теңдеуі, ал  болса біртекті емес сызықтық теңдеу болар еді, сондықтан  қарастырамыз.

**Теорема:** Егер (63) теңдеудің бір дербес шешімі  белгілі болса, оны Бернулли теңдеуіне келтіруге болады.

Дәлелдеу: Айталық (63) теңдеудің  шешімі белгілі болсын, онда

  (64)

орынды.

  (65)

-тің жаңа белгісіз функциясы. (65)-ті (64)-ке қойсақ



(64)-ті еске алсақ,

  (66)

Бернулли теңдеуі шығады.

(66)-ды

  (67)

ауыстыруы арқылы

  (68)

біртекті емес сызықтық теідеуге келтіріледі.

Практика жүзінде (68) және (67)-ді еске алсақ,

  (69)

ауыстыруы (63) теңдеуді бірден сызықтық теңдеуге келтіреді.

***Ескерту:*** 1) Егер Рикатти теңдеуінің екі дербес шешімі белгілі болса, онда оның жалпы шешуі бір ғана квадратура арқылы табылады (бір рет қана интегралданады).

Мәселен, Рикатти теңдеуінің  және дербес шешімдері болса, онда (69) бойынша  ауыстыру формуласы Рикатти теңдеуін сызықтық теңдеуге келтіріледі.

2) Егер Рикатти теңдеуінің үш дербес шешімі болса, ешбір квадратурасыз табылады (интегралдаудың қажеті жоқ). Мәселен, Рикатти теңдеуінің дербес шешімдері  болсын.

Онда  сызықтық теңдеудің шешімі болар еді. Демек,  немесе



Сызықтық теңдеудің жалпы шешуін осы арқылы ешбір квадратурасыз табуға болады.

Енді мына мәселеге тоқталайық.

Алғаш рет 1841 ж. Лиувилль Рикатти теңдеуінің жалпы (63) түріндегі теңдеуі ылғида квадратура арқылы интегралдана бермейтінін көрсеткен.

Сондықтан, Рикатти теңдеуінің практикада көп қолданылатынын еске ала отырып, квадратура арқылы интегралданатын түріне тоқталайық.

Рикатти теңдеуінің квадратура арқылы интегралданатын кейбір қарапайым түрлері:

1)  мұнда -кез келген тұрақтылар, айнымалылары бөлектенетін теңдеу болғандықтан квадратура арқылы интегралданады.

2)  мұнда  кез келген тұрақтылар. Бұлда айнымалылары бөлектенетін теңдеу.

3)  біртекті теңдеу.

4)  немесе 

 мұнда -тің жаңа белгісіз функциясы, ауыстыруы арқылы айнымалылары бөлектенетін теңдеуге келтіріледі.

5)  жалпыланған біртекті теңдеу.

 ауыстыруы арқылы айнымалылары бөлектенетін теңдеуге келтіріледі.

Рикатти арнайы теңдеуі

 дербес түрін қарастырайық. Мұнда  кез келген сандар. Бұл арнайы деп аталатын теңдеуді Рикаттидің өзі XVIII ғ. қарастырған.

10 Егер  болса,  айнымалылары бөлектенетін теңдеу.

20 болса, жалпыланған біртекті теңдеудің дербес түрі.

30 Арнайы Рикатти теңдеуі  саны мәнінің  бүтін сан болатын жағдайда квадратура арқылы интегралданады.

**2 дәріс тақырыбы. Дәрежелік қатарлар көмегімен сызықты дифференциалдық теңдеулерді шешу. Бессель теңдеуі. Шешімнің бастапқы мәндер мен параметрлерден тәуелділігі**

Жоспар:

1. Айнымалы коэффициенті бар 2-ретті сызықтық теңдеудің шешуін дәрежелік қатар арқылы табу.
2. Салыстыру және Штурм теоремалары
3. Шешімнің бастапқы мәндер мен параметрлерден тәуелділігі
4. ***Айнымалы коэффициенті бар 2-ретті сызықтық теңдеудің шешуін дәрежелік қатар арқылы табу.***

 (1)

теңдеуін қарастырайық.  және функциялары  –тің бүтін оң дәрежесі бойынша қатарға жіктеледі деп алайық, яғни

  (2)

Бұл жағдайда (2) теңдеудің шешуін төмендегі дәрежелі қатар түрінде іздейміз

  (3)

мәндерін (2)-ға қойсақ, сонда:

  (4)

Дәрежелік қатарларды өзара көбейтіп, ұқсастарын жинақтап және -тің әр дәрежесіндегі коэффициенттерін нольге теңесек мынау шығады:

 (5)

Мұнда  аргументтеріне байланысты 1-ші дәрежелі көпмүшелік.

Жоғарғы теңдеулерде  және  коэффициенттерін өзіміз таңдап аламыз, ал қалған келесі теңдеулерде ізделінетін бір коэффициентке артық болып отырады.

Мәселен, 1-теңдеуде сан мәндерін беріп –ні, 2-теңдеуден –ті т.с.с. табуға болады. Теңдеудің шешуін табу үшін жоғарғы әдіспен және –ні тауып (бұл теңдеу шешулері), олар арқылы  тұрақтылардың қатысуымен сызықтық комбинация жасау қажет.

Бір теореманы дәлелсіз келтірейік:

**Теорема:** Егер 

 мәнінде жинақы қатарлар болса, онда –тің осы мәндерінде жоғарғы әдіспен құрылған дәрежелі қатарда жинақы болады, әрі ол теңдеудің шешуі болады.

1. 2-ретті сызықтық теңдеулердің тербелмелі (құбылмалы) шешулері

Алдымен, мына төмендегі қарапайым теңдеулерді қарастырайық:

 (6(\*))

  (6(\*\*))

Бұл екі теңдеу шешулерінің қасиеттері әртүрлі. Мәселен, (6(\*)) теңдеуінің шешуі  аралығында ең көп болғанда бір рет қана ноль болуы мүмкін, ал (6(\*\*)) теңдеу шешуінің нольдері осы аралықта толып жатқан шексіз көп болуы мүмкін. Бұл қорытынды олардың жалпы шешулерінен белгілі.

Мәселен, (6(\*))-дің шешуі

;  аралығында  болатын бірақ мәні бар, ол болғанда ғана. (6(\*\*))–нің шешуі

 немесе  деп алсақ,  болады, мұның физикалық мәні тербелмелі қозғалысты (гармоникалық тербелістер) көрсетеді, мұнда -амплитуда, -жиілігі, периоды  болғандықтан аралығында шексіз көп рет нольге тең мәндері болады, ол нольдердің өзара қашықтағы , сондықтан  үлкен интервалда бір ноль, -дан үлкенде екі ноль кездесіп отырады.

**Анықтама.** Егер берілген аралықта дифференциалдық теңдеу шешуінің бір ғана нолі болса, оны тербелмейтін шешу деп, ал шексіз көп болса тербелмелі шешу деп атайды.(кейбір әдебиеттерде біріншісі сәйкес неосцилирующее решение, екіншісі осцилирующее решение деп аталады). Бұдан әзірше мынадай қорытынды жасауға болады: егер теңдеу шешунің бір ғана нолі болса, сол аралықта ал таңбасын бірақ рет өзгертеді, ал шексіз көп болса-таңбасын көп рет өзгертеді: (1, 2-сызбалар)

*у*



0

*х*

*+*

*-*

*х0*

1-сызба

0

*х*

*у*

*+*

*-*

*х0*

2-сызба

*х1*

*х2*

*х3*

*-*

*+*

*+*

Сонымен, егер

, (7)

мұнда  теңдеу шешуі тербелмейтін шешу болады, егер  болса, тербелетін шешу болады егер  болса. Енді (1) теңдеуді қарастырайық:

Бұл теңдеу  ауыстыруы бойынша  қарапайым түрге келтіріледі. Мұның инварианты  болатыны белгілі. Егер  тұрақты шама болса, шешуі оңай табылады. Ал егер  айнымалы шама болса мына теоремаларды қолданамыз.

***Салыстыру және Штурм теоремалары***

**1.** Салыстыру **теоремасы**

  (8(\*))

  (8(\*\*))

 болатын теңдеулерді қарастырайық, онда (8(\*\*))теңдеу шешуінің кез-келген екі нолінің арасын (8(\*)) теңдеу шешуінің ең болғанда бір нолі бөліп тұрады.

Бұл теоремада керісінше жору әдісімен дәлелденеді.

**Салдар:**  теңдеуінің ешқандай шешуі  аралығында бір реттен артық ноль бола алмайды, егер  болса.

Теорема мен салдар

  (9)

  (10)

шешулерінің нольдерін салыстыруға мүмкіндік береді, басқаша айтқанда дифференциалдық теңдеу тербелмелі шешулерінің нольдерін төменгі және жоғарғы жағынан бағалауға болады.

Айталық  және болсын.

 (11)

теңдеу шешуінің қатар екі нолінің ара қашықтығы  шамасынан кіші болады.

 (12)

теңдеу шешуінің қатар екі нолінің ара қашықтығы  шамасынан үлкен.

**2. Штурм теоремасы**

(Штурм-француз математигі, бұл теореманы 1856 ж. дәлелдеген).

(1) біртекті теңдеудің сызықты тәуелсіз екі шешуінің нольдері бірін-бірі өзара бөліп тұрады. (3-сызба)

0

*у*

3-сызба

**

*х*

Айталық, (1) теңдеудің  және  сызықты тәуелсіз шешулері болсын. шешудің  екі нолі болсын дейік, яғни  аралығында  болатын жалғыз ғана нүктесі болатынын көрсетейік.

Теореманы дәлелдеу үшін керісінше жориық.  үшін  және  болсын дейік.

Осы аралықтың шеттерінде  олай болмаған жағдайда  болар еді, ал бұл  және  шешулерінің сызықтық тәуелсіз болатынына қайшы келеді.

Анық болу үшін  деп алайық

 –ден -ге дейін интегралдайық



Мұны сол жағы нольге тең, ал оң жағы оң сан, бұл мүмкін емес. Сондықтан біздің ұйғаруымыз дұрыс емес, олай болса  болатын  нүктесі бар болады.

***Шешімнің бастапқы мәндер мен параметрлерден тәуелділігі***

Қалыпты дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін келесі есепті қарастырамыз:

   (13)

бастапқы шарттары

  (14)

мұндағы  - жүйенің оң жақ бөлігіне кіретін,  параметрлерін сипаттайтын вектор.

Шешімнің бастапқы  және  мәндерінен тәуелділігін зерттеу жүйенің оң жағында шешімнің параметрден тәуелділігін зерттеуге әкеледі. Шындығында, (13) – ге

  (15)

ауыстыруын қолданып, - жаңа белгісіз функциясы үшін келесі теңдеуді жазамыз:

 

 (16)



  болғанда жаңа айнымалы  және  үшін бастапқы мәндер енді белгіленген:

 (17)

 параметрлерімен бірге  және  мәндері де параметрлер ретінде (4) –тің оң жағына кіреді. Сондықтан есеп,  функциясының ,  параметрлерінен тәуелділігін зерттеуге әкеледі. Кері тұжырым да орынды: шешімнің параметрден тәуелділігін шешімнің бастапқы мәндерінен тәуелділігінің дербес түрі ретінде қарастыруға болады. Шындығында, (13) – ші теңдеуде  параметрлері белгіленген және  мәндерін қабылдайтын болғандықтан, (14) – ші бастапқы шарттарымен берілген (13) – ші теңдеуге бастапқы шарттарымен берілген түріндегі теңдеуді қосуға болады. Сонда келесі жаңа жүйені аламыз:

    (18)

 Енді  шешімнің  параметрлерінен тәуелділігі жөніндегі сұрақ (6) есеп шешімінің бастапқы мәндерінен тәуелділігін зерттеуге әкеледі.

Төменде біз шешімнің параметрлерден тәуелділігін зерттейміз.

**2. Шешімнің параметрден тәуелділігі.**

Алдымен төмендегі скалярлы теңдеуді қарастырайық

 (19)

Бұл теңдеу  скалярлы параметрімен және белгіленген

 (20)

бастапқы мәндерімен берілген. Оң жақ бөлігі 



параллелепипедінде анықталған, айнымалылардың жиынтығы бойынша  облысында үзіліссіз болсын, сонымен қатар,  облысында  бойынша төмендегі Липшиц шартын қанағаттандырсын:

 (21)

мұндағы  - барлық  үшін кесіндісінен алынған бір ғана тұрақты. Әрбір белгіленген  мәнінде, шешімнің бар болуы жөніндегі теоремаға сәйкес,   кесіндісінде алғашқы (19), (20) есептің шешімі – интегралдық қисық анықталған.  ауыстыра отырып,  және  тұрақтыларының  параметрінен тәуелсіздігінің көмегімен  кесіндісінде анықталған  интегралдық қисықтар үйірін аламыз.

  функциясының  параметрінен тәуелділігін зерттейміз. Келесі теореманың әділдігін (орындалатынын) дәлелдейміз.

***Лемма 1. (дифференциалдық теңсіздіктер жөніндегі лемма)***

 функциясы үзіліссіз және  алынған жағдайда

, мұндағы  - оң тұрақтылар, (\*)

теңсіздігін қанағаттандыратын, бөлікті үзіліссіз туындыға ие болсын (туындының үзіліс нүктелерінде (\*) теңсіздігін, оның шектік мәндері қанағаттандырады). Олай болса келесі теңдік орындалады:



мұндағы  -  сызықты дифференциалдық теңдеу үшін алғашқы есептің шешімі.

**Теорема.**  *Айталық,  функциясы*  *облысында анықталған және үзіліссіз болсын, сонымен қатар,*  *айнымалысы бойынша* *(21) Липшиц шартын қанағаттандырсын. Онда*  *кесіндісінде анықталған (19), (20) есептің  шешімі*  *кесіндісінен алынған кез келген мәнінде*  *бойынша үзіліссіз болады.*

 **Дәлелдеуі**. Теорема дәлелденеді, егер кез келген  үшін  шамасы табылып,  болғанда  кесіндісінен алынған кез келген  және  үшін

 (22)

теңсіздігі орындалса. Дифференциалдық теңсіздіктер жөніндегі лемманы пайдаланамыз. Аламыз

  

 

Бір қатынастан екінші бір қатынасты шегере отырып,  айырымы үшін

 . (23)

теңдігін аламыз. ** функциясы аргументтерінің жиынтығы бойынша үзіліссіз және  болғандықтан  болғанда кез келген  үшін  орындалса, онда  теңсіздігі  аргументіне қатысты бірқалыпты болатындай  шамасы табылады. Осы фактіге және Липшиц шартына сүйене отырып

 (24)

теңсіздігін аламыз. Сондықтан лемма 1- ге және (21) формулаға сәйкес  болғанда, яғни  теңсіздігі орындалғанда,

 (25)

теңсіздігін аламыз. Теорема дәлелденді.

**3 дәріс тақырыбы. Ең жоғары туындылары бар шағын параметрі бар сызықты теңдеулер. Жүйелі түрде ауытқыған және сингулярлы ауытқыған теңдеулер.**

Жоспар:

1. Ең жоғары туындылары бар шағын параметрі бар сызықты теңдеулер.
2. Жүйелі түрде ауытқыған және сингулярлы ауытқыған теңдеулер.

*n*-ретті сызықты дифференциалды теңдеу үшін

 (1)

мұндағы  және- берілген функциялар  және кіші параметр үшін  Коши мәселесінің шешімінің дифференциалдық теңдеулерге кіретін параметрлерге тәуелділігін зерттеу нәтижелері келесі түрде қысқаша сипатталуы мүмкін.

Егер -  кесіндісінде үзіліссіз және   функциялары үзіліссіз болады, онда  Коши есебінің шешімі (1)-теңдеуі үшін  бойынша біркелкі Коши есебі  бойынша ауытқыған теңдеуге ұмтылады

 (2)

Егер (1) теңдеудің  коэффициенттері  бойынша,  және , *(n+1)* ретке дейін үзіліссіз дербес туындысы бар болса,



Бұл жағдайда  бойынша (1) ауытқыған теңдеу үшін Коши есебінің шешімін асимптоталық түрге келтіру дұрыс болады.



Мұндағы  жазуы  білдіреді, сонымен қатар c>0 саны -нан тәуелсіз сан.

**Анықтама.**

Жоғарыда көрсетілген (1)теңдеудің коэффициенттерінің үзіліссіздігі шарттарынан (1) теңдеуге  кіші параметрімен енгізілген ауытқу *регулярлы ауытқу* деп, ал (1) теңдеудің өзі *регулярлы ауытқыған теңдеу* деп аталады.

Бірақ кейбір қосымшаларда  кіші параметр (1) теңдеуге *регулярлы емес (сингулярлы)* түрде енгізілуі мүмкін, яғни (1) теңдеудің  коэффициенттері  үзіліссіз функция емес. Мұндай (1) теңдеулер *сингулярлы ауытқыған теңдеулер* деп аталады.

Бірінші ретті теңдеуге  бойынша  шағын параметрлі Коши есебінің сингулярлы ауытқыған теңдеуін қарастырайық

   (3)

мұндағы , - нөлдік емес сан және -  бойынша үзіліссіз дифференциалданатын функция

(3) Коши есебінің шешімін  арқылы белгілеп, ал егер  болса, онда (1) теңдеуді  арқылы белгілейміз. Егер  болса, онда  тәртібін зерттейік.  болса,  ұмтылады ма деген сұрақтың жауабын қарастырайық.

**Теорема 1.** Егер >0 болса, онда әрбір 



Егер  болса, онда (4) формуладан қорытылады



егер  мұндағы - өзіндік және белгіленген. Барлық  бірөлшемді ұмтылыс жоқ  .  маңайында  және  шешімдері жалпы жағдайда сәйкес келуі мүмкін емес болғандықтан, бұл нәтижені алдын ала болжауға болушы еді. (4) формуладан,  кезде,  болғанда  -ге ұмтылмайтыны көрініп тұр. Бұл құбылыстар (1) регулярлы ауытқыған теңдеулер үшін байқалмады.  болғанда (3) теңдеудің реті төмендейді, нақтырақ айтқанда, ақырлы теңдеуге айналады.

**Анықтама.** ,  кесіндісі  кіші параметрінде (3) Коши есебінің  шешімі -дің шешімінен қатты айырмашылығы бар, *шекаралық қабат* деп аталады.

Шекаралық қабаттың құбылыстары барлық жоғары туындылы кіші параметрлі теңдеулер үшін де тәуелді.

 шешімі  шешімінің, барлық  емес, тек әрбір кесіндісін асимптотикалық біқалыпты жуықталуы болып тұр.

Сингулярлы ауытқыған есептердің негізгі мақсаты  кезде осы есептердің, барлық  сегментінде бірқалыпты,  шешімдерінің асимптотикалық жуықталуы болып табылады. (4) формуладан баяуланған экспоненталар,  болғанда -де бірқалыпты  жуықтауын алуға мүмкіндік туғызатын -ке түзетулерді жұзеге асырады, сонымен қатар  шекаралық қатарда да. Бұл фактілер жоғары ретті теңдеулер үшін де байқалады.

Жоғары туындылы  бойынша екінші ретті сызықтық  шағын параметрі бар теңдеуді қарастырайық:

  (5)

мұндағы  және - берілген сандар, -  бойынша үзіліссіз дифференциалданатын функция. Бастапқы шарттарды ескере отырып,  болғандағы (5)-теңдеудің шығарылу тәртібін зерттейік:

,  (6)

(5)-теңдеуге  қойсақ, ауытқымаған Коши есебін аламыз:

  (7)

(5), (6) Коши есебінің шешімін  арқылы белгілейік, ал (7) Коши есебінің шешімін  арқылы белгілейік. Онда



**Теорема 2.** Егер  болса, онда   барлық  және  барлық .

2-теорема бойынша кез келген  үшін  кесіндісінде  шешімінің  туындысымен бірге  және  туындысына бірқалыпты ұмтылуы жоқ. Осындай бірыңғай талпыныс тек қана  бойынша кез келген  бар.  маңайында  қатты ерекшеленетін  аймағы табылады. Бұл аймақ шекаралық қабат есебі деп аталады. Егер  болса, онда  бойынша -ке ұмтылысы жоқ.

Ал енді,  болғандағы келесі шектік есептің шешімін қарастырайық

  ,

, ,  (8)

(8) шектік есепті  арқылы бейнелейік, ал Коши есебінің шешімін

, ,

 арқылы бейнелейік.

**Теорема 3:**  онда  болса (8) шектік есептің  шешімі жеткілікті аз, жалғыз және әрбір   егер . болғанда табылады. Сонымен қатар, барлық  мұнда , - тіркелген,  .



өрнегін аламыз.

Егер  болса, онда  бойынша  тәртібі тек соңғы алынған бағаға байланысты.  болса, онда әрбір  үшін  және әрбір  үшін , мұндағы  тіркелген.

3 теорема бойынша  жағдайында шекаралық қабат әрбір   үшін (8) шектік есеп болады.

**Ескерту:** Егер  және - Коши есебінің шешімі

 ,

Онда   әрбір  және осылай барлық   үшін орнатуға болады. Демек, бұл жағдайда әрбір  шекаралық қабат есебі болады.

*Негізгі әдебиеттер:* [1] – [8].

**4 дәріс тақырыбы. Якоби теңдеуі. Дербес сызықтық теңдеулер. Якоби теңдеуінің интегралдану ережесі.**

Жоспар:

1. Якоби теңдеуі
2. Дербес сызықтық теңдеулер
3. Якоби теңдеуінің интегралдану ережесі.

**Анықтама.** *Якоби теңдеуі* деп келесі түрде жазылған теңдеуді айтамыз:

*(Ax+By+C)dx+( А'х + В'у + С')dy+( А"х+В"у + С")(xdy-ydx)*=0, (1)

мұндағы A,B,…, *С"*— тұрақтылар.

Якоби теңдеуін зерттеу үшін жаңа айнымалылар енгізген ыңғайлы. Аналитикалық геометриядағы біртекті координаталар бойынша:



Онда





Айнымалылар мен дифференциалдарды (1) теңдеуге қоя отырып, оны келесі түрде жазамыз:

, (2)

Мұндағы,,  салыстырмалы біртекті координаттардың сызықтық формалары болып табылады. .

Декарттық координаттарға оралу үшін жеткілікті.

Бастапқы координаттарымен сызықтық түрлендірулермен байланысты:, жаңа координаттар еңгіземіз.



 (3)



Мұнда — анықталған тұрақты =0*,* а  —  кез-келген

 x және y координаттарының түрлендіруі жаңа координаттарының сызықтық бөлшек өзгеруіне тең

,

 Осындай түрлендіру кезінде Якоби теңдеуі сол типті теңдеуге ауысады.

Ең алдымен  = 1 берілсін . Теңдіктің сол жағында орналасқан анықтауышты,  анықтауышына көбейту арқылы(жол жолмен), анықтауыштың бірінші жолындағы, яғни , , екінші жолындағы , үшінші жолындағы – үш сызықтық негіз, , сызықтық негізге турленеді 

, нәтижесінде

.

Якоби теңдеуін аламыз.

***Якоби теңдеуі жеке сызықты интегралдарды қарастырады. Якоби теңдеуін интегралдау ережесі.*** Біртекті координаттарды қарастырмасақ, онда Якоби теңдеуін интегралдау ережесін келесі түрде жазуға болады. Теңдеудің бір сызықты интегралын табамыз (2):

=0.

Жаңа айнымалыларды енгіземіз:

;

айнымалыларына түрлендірілген теңдеулер біртекті болады..

*Негізгі әдебиет:* [1] – [8].

*Қосымша әдебиет:* [12] – [17].

**5 дәріс тақырыбы. Пфаффа теңдеуі. Пфаффа теңдеуінің интегралдануының қажетті және жеткілікті шарты.** **Толық интеграданатын Пфаффа теңдеуі үшін интеграл көпмүшесі.**

**Жоспар:**

1. Пфаффа теңдеуі.
2. Пфаффа теңдеуінің интегралдануының қажетті және жеткілікті шарты.
3. Толық интеграданатын Пфаффа теңдеуі үшін интеграл көпмүшесі.

**Анықтама.** *Пфаффа теңдеуі* дегеніміз

, (1)

мұндағы -  облысының  шарттарын қанағаттандыратын функция.

Алдымен теңдеудің геометриялық мағынасың қарастырайық (1). Қарастырылып жатқан облыстың әрбір нүктесінде векторы берілген. (1) теңдік кез-келген көпмүшеге көбейтілетін болган соң жазықтықтың бағыты нөлден өзгеше.  теңдігінің ешбір нүктеде бірмәнді орны болмауы мүмкін (, нүктесі ерекше).

(1) теңдеуден байқағанымыз,  облысында мәнге ие бола алмайды, себебі тәуелсіз,  облысында   шартқа қарсы болатын еді. Осыдан, осы айнымалылардың арасында кем дегенде бір қатынас бар, ал (1) теңдеуге сәйкес келетін мәндердің жиынтығы (белгілі бір шектеулерге байланысты) өлшемдер санының (интегралдық алуандылық) түрлілігі болып табылады.

Осыдан, (1) теңдеу келесі шешімді қанағаттандыратыны анық

,

(- тұрақтылар). Алынған шешімд дұрыс деп санаймыз және төменде қарастырмаймыз.

Осылайша, интегралдың өлшемдер саны  болады. Теңдеу (1) өз кезегінде, нүктеден интегралдық алуан бойымен шексіз жылжудың векторлық өріс бағытына перпендикуляр болып табылатындығын көрсетеді (яғни, әр алуан бағыт бойынша әр түрлі сызық тиісті векторға перпендикуляр). Теңдеулердің интегралдық алуан түрін табу мәселесі (1) екі өлшемді немесе бір өлшемнің біртұтас алуан түрін іздейтінімізге қарамастан тақырыпқа байланысты әртүрлі аналитикалық сипатқа ие болады. **2.** Алдымен, қажетті көпфункция екі өлшемді деп алайық. Мысалы, нүктенің маңында келесі түрде яғни, ұсынылуы мүмкін: Сонда қажетті функция болады, және екі тәуелсіз айнымалылар. (1) формуласынан дифференциалға арналған өрнек аламыз:



(деп аламыз). Бір жағынан, функцияның жалпы дифференциалын білдіру үшін бізде келесі өрнек бар:

.

Осы екі жәнетеңдігінен, дифференциалдардың тәуелсіздігімен байланысты келесі өрнек пайда болады.

 , . (2)

Жалпы айтқанда, бұл жүйенің шешімі жоқ, яғни. Пфаффа теңдеуі (1) екі өлшемнің интегралды әртүрлілігін қабылдамайды. Егер мұндай топ болса, онда Пфаффа теңдеуі толық біріктіріледі немесе бір қатынас арқылы интегралданатын деп айтылады. Осындай топтың болуы үшін екі өлшемді интегралдық алуандардың келесі шартты қанағаттандыру қажет:

 (3)

(3) Шарттың бірдей орындалуы үшін Пфаффа теңдеуі бір қатынас арқылы біріктіріледі. Бұл шарт қажетті және жеткілікті. Керісінше, бір параметрдің беттерінің әрбір топтың (тиісті туындылардың болуы жағдайында) кейбір толықтай интегралданған Пфаффа теңдеуінің жалпы шешімі болып табылады.

Әр топты келесі түрде жазып аламыз:

 (4)

(4) қатынасты дифференциалдау арқылы төмендегі теңдік пайда болады:

.

Соңғы теңдеу ерікті функция арқылы көбейтуді қанағаттандырады; Осылайша, (4) - (1) Пфаффтық теңдеу үшін формула болып табылады және интеграл келесі теңдікті қажет етеді:

 (5)

Толық интегралданатын Пфаффа теңдеуінің тұрақты шешіміне қатысты теңдеуді шешу () оны (4) түрге дейін қысқартуға болады. Демек, (5) қарым-қатынас әрқашан белгілі болады. Әйтпесе, оларды келесідей қайта жазуға болады:

 , , , (6)

 (1) теңдікті  ға көбейту арқылы келесі түрге ие болады:

, (1’)

немесе

.

Осылайша, толық интегралданатын Пфаффа теңдеуі үшін сол жақта үш айнымалы функцияның жалпы дифференциалына айналатын көбейткіш бар. Алдыңғы жағынан, керісінше, егер теңдеудің интеграторлық коэффициенті бар болса (1) болса, онда ол (1 ') формаға дейін төмендейді және  қатынаспен біріктіріледі.

**Ескертпе** **1.** (4) Толық интеграцияның күйін геометриялық түсініктеме түрінде бере аламыз. алуан нүктеден бастауға және бойымен нүктеге дейін алайық; онда біз келесі теңдікті аламыз:

;

содан,  нүктесінен нүктесіне өтеміз. Интегралдық көпмүшеліктен бөлінбей  тиісті түрленеді:



Егер, біз алдымен  нүктеге дейінгі интегралдық түрлену , содан кейін нүктеге дейін түрлену алсақ, сәйкес келетін мән:



(4) шарттар осы мәндердің (екіншіден жоғары шексіз шағын белгіге дейін) бірдей екенін білдіреді. шексіз жақын нүктедегі функциялардың мәні осы нүктеге келген жолға байланысты емес.

**Ескертпе 2.** Егер теңдеудің интегралданатын коэффициенті (1) бар болса және бұл теңдеудің жалпы шешімі болса, онда интегрирленген фактордың ең жалпы формасы , демек, ерікті функция болып табылады.

**Ескертпе 3.** Пфаффа теңдеуіне қатысты (1) түрдегі симметрияны ескере отырып, оны үш түрдің кез келгеніне дейін өзгертуге болады:

1)  2)  3) 

Демек, толық интегралдану жағдайында, дифференциалдық теңдеулердің үш жүйеснің кез келгеніне дейін төмендейді:

 1)   2) 

3)  

Қарапайым теңдікті таңдау арқылы бұл тәсілді есеп шығарғанда қолдануға

**6 дәріс. Лаплас түрлендірулері арқылы дифференциалдық теңдеулерді шешу**

Жоспар:

1. Негізгі түсініктер
2. Бейнелеу арқылы бастапқы бейнесін анықтау.
3. Лаплас интегралының қатынасы.
4. Меллин формуласы.
5. Лаплас түрленуінің қызметтерінің орындалу ережесі.
6. Лаплас түрлендірулері арқылы теңдеулерді шешу
7. Лаплас түрлендірулері арқылы теңдеулер жүйесін шешу

**Анықтама.** Функция түпнұсқасы келесі шарттарды қанағаттандыратын шынайы айнымалы мәндегі кешенді бағаланатын функция болып табылады:

1)  осьтің кез-келген соңғы интервалында интеграциялануы мүмкін (жергілікті түрде интеграцияланатын);

2) барлықушін

**Анықтама.**  облысына жататын  және берілсін және Лаплас теңдеуі орындалсын

. (1.3)

**Анықтама.** F(p) функциясын **бойынша Лаплас бейнеленуі деп немесе Лаплас түрленетін функциясы деп атайды.

**Анықтама.**  бастапқы бейнесіне немесе F(p) бейнелеуіне жататын түрленуді Лаплас түрлендіруі деп атаймыз

**Ескерту.** және F(p) функцияларының Лаплас теңдеуі арқылы байланысы келесі түрде жазылады.

 или .

**Бейнелеу арқылы бастапқы бейнесін анықтау. Лаплас интегралының қатынасы.**

**Меллин формуласы.**

**Теорема 1.** Егер функция бастапқы куйде болса, ал F (p) - оның кескіні, онда t кез келген нүктесінде түпнұсқа үздіксіз болса,

, (1.4)

кез келген түзу сызықтағы интеграл  функция мен интегралдың өсуін көрсетеді, яғни,

.

**Анықтама.** Берілген кескіндегі есеп келесі (1.3) формуламен көрсетіледі

 (1.3)

*Лапластың тік өзгеруі* деп аталады.

Кескінның бастапқы формасын анықтау Meллин формуласына негізделген (1.4)

 (1.4)

Лапластың кері түрленуі немесе Лапластың интегралының қатынас формуласы деп атайды.

**Лаплас түрленуінің қызметтерінің орындалу ережесі.**

 **I ереже (сызықтық туралы теорема).** Егер , то



**II ереже (мәндес теоремасы).** Егер то

.

**III ереже (бастапқы шарт теоремасы).** Егер то

 **IV ереже (бастапқы шарттың орындалу теоремасы).** Егер то



,  мәндері бар есептерін шығаруда осы ереже қолданылады.

**V ереже (бастапқы шарттың болмау немесе ауысу теоремасы ).**

Егер онда әр комплекстік сан үшін 

( бастапқы шарт болмау теоремасы )

(кескіннің аутықу теоремасы ).

**VI ереже (бастапқы шартты дифференциалдау теоремасы ).**

Мысалы, ең жоғары туынды үшін туындысы t> бар және кесіндісі бар болса , онда



…



**VII ереже (кескіннің дифференциалдау теоремасы).**

Кескін әрқашан аналитикалық функция болғандықтан, барлық туындыларға ие. Онда

, то





…

.

**VIII ереже (бастапқы шартты интегралдау теоремасы).**

Егер , онда .

 **IX ереже(кескінді интегралдау теоремасы).**

Айталық,  кескін деп. Егер , то .

**Анықтама.** Функция  икемді ункция деп аталады и 

**X ереже (икемділік теоремасы).**

Егер ,

 , то



**XI ереже ( Дюамеля формуласы).**

 - негіздер болсын,

, айталық да негіз болсын. Сонда теңдік

Бұл теңдік Дюамель формуласы деп аталады.

 Тұрақты коэффицентті сызықты дифференциалдық теңдеулерді шешуді қарастырамыз.

 Екінші ретті сызықты біртекті емес теңдеудің

бастапқы шарттары

қанағаттандыратын шешімін табу керек.

 Осындай есепті шешудің операциялық әдісі ізделінді және функцияларының түпнұсқалары деп, (2.1.1) теңдеуден олардың бейнелерін байланыстырушы теңдеуге көшуден тұрады. Ол үшін түрнұсқаны дифференциалдап және сызықтық теоремасын қолданып, (2.1.1) теңдеуді бейнелерге көшіреміз:

 Осыдан бейнесі бойынша алгебралық теңдеуге көшеміз. Оның шешімін анықтасақ

 Ізделінді шешімнің бейнесіөрнектелді. Осыдан кестені немесе кері түрлендіру теоресмасын қолданып түпнұсқаны, яғни ізделінді шешімді аламыз.

 Бастапқы шарттар біртекті болса

шешім бейнесі

-ші ретті теңдеу болса

Лаплас түрлендіруі нәтижесінде келесі теңдікті аламыз

немесе

-дәрежесі -ден аспайтын, коэффиценттері-ден тәуелді көпмүшелік.

Егер болса, онда

(2.1.9) формуладан (2.1.10) кері түрлендіруге көшіп, түпнұсқаларды, яғни ізделінді шешімдерді табамыз.

Мысал 2.1.1.: Теңдеудің

Нольдік бастапқы шартын орындайтын шешімін табу қажет.

Шешімі: түрлендіреміз

 функциясын анықтаймыз

Түрлендіру кестесіне келтіру мақсатында коэффиценттерді анықтау әдісін қолданамыз

Түрлендіру кестесін (Кесте 1.3.1) қолданып түрнұсқа, яғни ізделінді шешім анықталады

Мысал 2.1.2: Теңдеудің шешімін бастапқы шаттармен табыңыз

Шешімі: болғандықтан, теңдеу келесі түрге келеді

осыдан

Кесте 1.3.1-ді қолданып түпнұсқаға көшсек: болады, сонда

Демек теңдеудің шешімі

Мысал 2.1.3.: Есептің шешімін табыңыз

бастапқы шарттары болса.

Шешімі: Операторлық теңдеуі

онда Полюстердегі шегерінділер комплекс түйіндес сандар болғандықтан, нүктесіндегі шегеріндіні ғана есептейміз,

Екі еселенген нақты бөлігі шешімін береді:

Мысал 2.1.4: Теңдеудің шешімін тап.

1. Түпнұсқаны дифференциалдау қасиеті және кесте 1.3.1-ді кері қолданып түпнұсқадан бейнелеуге көшеміз:
2. Операторлық теңдеуді келесі түрде жазып оның шешімін табамыз:

белгісіз коэффиценттер әдісін қолданамыз:

Осыдан

1. Енді функциясы үшін кері түрлендірулерді қолданып түпнұсқа ( ізделінді шешімді) аламыз:

Демек

Мысал 2.1.5: Есептің шешімін Дьюмель интегралымен жаз.

Шешімі: теңдеуінен бастап қарастырамыз.

Осыдан

Лаплас түрлендірулері арқылы теңдеулер жүйесін шешу

 Сызықты тұрақты коэффицентті дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу жоғарыда көрсетілген әдістермен орындалатынын көрсетеміз. Осы жағдайда да шешім түпнұсқа болып табылады деп алып, бейнелерге көшеміз, яғни Лаплас түрлендірулерін қолданып, шыққан алгебралық теңдеулер жүйесін шешеміз. Ізделінді шешімді (түпнұсқаны) алу үшін Лапластың кері түрлендіруін қолданамыз.

Мысал 2.2.1.: Есептің шешімін табу керек:

Шешімі: , деп аламыз. Онда теңдеулер жүйесі келесі түрге келеді:

Шыққан алгебралық теңдеулер жүйесін шешеміз:

Түпнұсқаны анықтау мақсатында Лапластың кері түрлендіруін қолданамыз:

Мысал 2.2.2.: Есептің шешімін табыңыз:

Шешімі: , деп алынады. Онда теңдеулер жүйесі келесі түрге келеді:

Түпнұсқаны табу үшін белгісіз коэффиценттерді табу әдісін және кесте 1.3.1-ді қоланамыз:

Мысал 2.2.3.: болатын теңдеулер жүйесін шеш.

Шешімі: десек,,

Онда бейнелеуші жүйе:

Оның шешімі:

Коэффиценттерді анықтасақ,

Лапластың кері түрлендіруі арқылы есептін шешімін өрнектесек:

**7 дәріс тақырыбы.**

**Коши мәселесінің шешімнің болуы және жалғыз жағдай шарты. Сәйкес жуықтау әдісі.**

Жоспар:

1. Пикар теоремасы
2. Сәйкес жуықтау әдісі
3. Пеано теоремасы
4. Шешімнің бар болу және жалғыздығы

 Біз Коши мәселесінің шешімінің болуы және жалғыз жағдай жеткілікті шарты:

 (1)

**Пикар теоремасы.**

F (x, y) функциясы тіктөртбұрышта үздіксіз болсын.



және x қатысты бірдей Липшица жағдайын қанағаттандырады, яғни,



барлық

.

Онда

.

Содан кейін Коши мәселесі (1) интервалда бірегей шешімге ие.

**Сәйкес жуықтау әдісі.**

Пикар теоремасы жағдайында Коши мәселесінің шешімі, қайталану қатынасымен анықталған функциялардың біркелкі тізбегі үшін лимит ретінде анықталуы мүмкін.

.

нақты жақындау арқылы дәл шешімін ауыстыру жолымен алынған қате бағалау теңсіздік арқылы анықталады.

.

**Пеано теоремасы.**

F (x, y) функциясы Π тіктөртбұрышында үздіксіз болып табылады делік

.

Содан кейін аралықтағы Коши мәселесі кем дегенде бір шешімге ие.

**Ескерту.**

Жиі Коши есебінің шешімі алдыңғы теорияларда көрсетілген интервалда ғана емес, сонымен қатар үлкен аралықта да бар. Егер f (x, y) функциясы Пикар теоремасының Π төртбұрышындағы шарттарын қанағаттандырса, онда кез келген шешімі төмендегідей болады.



П тіктөртбұрыштың шекарасына дейін кеңейтілуі мүмкін.

Егер функция f (x, y) берілгенде болса, онда



үздіксіз және келесі теңсіздікті қанағаттандырады

,

мұндағы, a(x) және b(x) – үзіліссіз функциялар, онда (1) теңдеудің кез келген шешімін барлық интервалына жалғастыруға болады.

**Шешімнің бар болу және жалғыздығы**

**1. Коши есебінің бірінші ретті теңдеу үшін шешімінің бар болуы және жалғыздығы туралы теоремасы, туындыға қатысты рұқсат етілген**

 (1)

 бастапқы шартымен.

R

тұйы облысында f және  үзіліссіз болсын.

Онда кейбір



кесіндісінде



бастапқы шарттарын қанағаттандыратын (1) теңдеудің жалғыз шешімі бар.

Сонымен қатар d=min алуға болады, мұндағы, a және b жоғарыда көрсетілген, а – R-де кез келген .

y ,

формулалармен анықталған тізбектік жүуықтауы көрсетілген кесіндіде шешіміне ұмтылады.

**Ескерту.** Шешімінің бар болуы үшін f(x,y) функциясының R облысында үзіліссіз болуы жеткілікті, бірақ сонымен қатар шешім жалғыз болуы мүмкін.

**2. Дифференциалдық теңдеулер жүйесі нормалды түрде**

 (2)

векторлық белгілеулерде былай жазылады:

 (3)

мұндағы, y= және f=-векторлар.

F вектор-функциясының үзіліссіздігі барлық  функцияларының үзіліссіздігін білдіреді, ал  орнына , I, k=1,….,n дербес туындыларынан тұратын матрица қарастырылады.

**Ескерту.**  Шешімнің бар болуы және жалғыздығы туралы теорема және п.1. параграфтағы барлық тұжырымдар (3) түрде жазылған жүйе үшін орындалады. Сонымен қатар,  белгіленуі у векторының ұзындығын білдіреді: 

**3. n-ретті теңдеу үшін шешімінің бар болуы мен жалғыздығы туралы теорема, туындыға қатысты рұқсат етілген**

. (4)

D облысында f функциясы және оның бірінші ретті дербес туындылары  бойынша үзіліссіз, D нүктесі D-ның ішінде жатады.

Онда



бастапқы шарттарында (4) теңдеудің жалғыз шешімі бар.

**Ескерту.** (4) теңдеуді (2) түрдегі жүйеге келтіруге болады, егер келесі формула бойынша белгісіз функцияларды енгізетін болса



Онда (4) теңдеу келесі жүйеге келтіріледі

,

егер келесі түрде белгісіз функцияларды енгізетін болсақ, (2) жүйенің дербес жағдайына айналады:



Онда (4) теңдеу келесі жүйеге сәйкес келеді:

,

бұл жүйе (2) жүйенің дербес жағдайы және п.2. барлық тұжырымдары орындалады.

**4. Шешімдердің жалғасы.**

Көп жағдайда (1) теңдеудің және (2) жүйенің шешімдері п.1. көрсетілген кесінділерде ғана емес, үлкен кесінділерде де бар болады.

Егер (1) теңдеу немесе (2) жүйе тұйық шенелген облыста бар болу теоремасын қанағаттандырса, онда кез келген шешімді осы облыстың шекарасынан шығуға дейін жалғастыруға болады.

Егер (1) теңдеудің немесе (3) теңдеудің оң жағы  және шекті немесе шексіз болуы мүмкін) облысында үзіліссіз және



теңсіздігін қанағаттандырады және a(x) және b(x) үзіліссіз, онда кез келген шешімді интервалына дейін жалғастыруға болады.

*Негізгі әдебиеттер:* [1] – [8].

*Қосымша әдебиеттер:* [12] – [17].

**№ 8 лекция тақырыбы. *Параметрлі теңдеулерді шешудің сандық әдістері.* *Жоғары туынды кезінде екінші ретті кіші параметрлі сызықтық теңдеу үшін фундаменталды шешімдер жүйесінің асимптотикасын құру***

Жоспар:

1. Кіші параметр әдісі
2. Жоғары туынды кезінде екінші ретті кіші параметрлі сызықтық теңдеу үшін фундаменталды шешімдер жүйесінің асимптотикасын құру

**Кіші параметр әдісі.**

Көптеген тәжірибелік есептерде *оң жақ бөлігінде кіші сызықтық емес қосылғышы бар, диффериенциалдық теңдеудің* периодты шешімін табу туралы сұрақ туындайды*:*

, (1)

мұнда  - кіші параметр.

Егер



қосылғышты шығарсақ, яғни (1) теңдеуде

*=0*,

деп есептесек, онда *туғызушы* деп аталатын  (1) теңдеу үшін сызықтық теңдеуді аламыз.

Кіші сызықтық емес пен (1) сызықтық емес тербеліс теңдеулерінің периодты шешімдерін табуға бірден-бір тиімді әдіс А. Пуанкаре және А.М. Ляпуновпен әзірленген, қазіргі уақытта тәжірибелік есептерді шешуде кең қолданылатын, кіші параметр дәрежесі қатары бойынша жіктеу әдісі болып табылады.

(1) теңдеуді шешімдері  параметрінен аналитикалық функциялар болады, егер *f(t)* функциясы үзіліссіз, ал  функциясы, *t* бойынша үзіліссіз болса, қалған аргументтерге аналитикалық тәуелді болады.

Бұл шарттар орындалды деп, келесі қатардың қосындысы ретінде периодты шешімін іздейміз



Бұл қатарды мүшелеп екі рет дифференциалдаймыз және (1) теңдеуге қоямыз, онда



функциясы алдын ала дәрежелері бойынша жіктелген

 и .

-дің бірдей дәрежелеріндегі теңдеудің оң және сол жағындағы коэффициенттерін салыстыра отырып, келесіні аламыз:

 (2)

Осы сызықтық теңдеулердің біріншісі туғызушы теңдеумен сәйкес келеді. Оны интегралдар және табылған  шешімді екінші теңдеуге қоя отырып,  анықтауышы үшін тағы да сызықтық теңдеу аламыз және т.б.

(1) теңдеудің периодты шешімін келесі түрде табу үшін

 (3)

(2) теңдеудің  пероидты шешімдерін табу керек.

**Жоғары туынды кезінде екінші ретті кіші параметрлі сызықтық теңдеу үшін фундаменталды шешімдер жүйесінің асимптотикасын құру**

Тербеліс теориясы, кванттық механика және т.б. есептерінің қатарында келесі түрдегі

, (1)

Сингулярлы ауытқыған есептердің шешімінің асимтотикасын құрудың жалпы алгоритмінің талаптарын қанағаттандырмайтын сингулярлы ауытқыған теңдеулер кездеседі.

(1) типіне, дербес жағдайда, маятниктің үйкеліс жоқ болған жағдайдағы, яғни  қозғалыс теңдеуі жатады.

Маятниктің қозғалыс теңдеуі, орнықтылық шарты орындалтын, жоғары туынды кезіндегі бірінші ретті кші параметрлі дифференциалдық теңдеулер жүйесінің нормалды формасына келуі үшін  нөлден өзге болуы керек.

Егер , онда теория жарамсыз. Бұл жағдайда, маятниктің қозғалыс теңдеуінің шешімі тербелістің сипатта болады ( аздығына байланысты жиілігі өте үлкен болады).

(1) теңдеудің сызықтылығын пайдаланып, асимптотиканы құруды, алдыңғы пунктте жасалғандай бастапқы шарттар қарастырылғандай, қосымша шарттарды тапсырмасымен байланыстырмаймыз. Ал, әртүрлі қосымша шарттармен анықталған шешімнің асимптотикасын алуға мүмкіндік туғызатын шешімдердің фундаменталды шешімдерінің асимптотикасын құру мақсатында қоямыз.

 сегментінде  деп есептейміз және үш рет үзіліссіз дифференциалданатын фунция болып табылады (анықтылық үшін  деп санаймыз)

, где . (2)

деп алып, (1) теңдеуде жаңа белгісіз *u* функциясына көшеміз.

*Q=const* болғанда, *v*



айналатынын байқаймыз және *y=uv*, мұндағы *u=const*, өрнегі жай ғана нақты шешім болып табылады.

(1)-ге көрсетілген ауыстыруды қоя отырып

,

аламыз. Ол келесі жүйе түрінде жазылады:

, . (3)

Формальді түрде қойып, келесіні аламыз

, ,

бұдан



Осы теңдеудің дербес шешімін аламыз:

. (4)

Алдыңғыдан белгілі бір сегментте (6) оң бөліктің жеткілікті тегістігі болған жағдайда, (6) есепті шешу асимптотикалық көпмүшелік дәрежеде ұсынылатыны белгілі. Алайда,математикалық физиканың бірқатар мәселелерін шешкен кезде t өзгерісінің кездейсоқ үлкен интервалында шешімді зерттеу керек, мысалы, t~ үшін. Бұл жағдайда сипатталған әдістер қолданылмайды.

Бұл жағдай, әрине, тұрақты емес бұзылулар класына жатады. Айнымалыларды ауыстыруға назар аударайық



 айнымалысының өзгеруіне келеді, бірақ теңдеу

.

түріне келеді.

Орташалау әдісін беретін асимптотиканы құру ережесін формулаға жазамыз. Функция құрамыз

, (7)

нақты кіретін айнымалы t үшін оң бөліктің орташа мәні болып табылады. Бұл операциядағы  айнымалы тұрақты деп саналады.

**Ескерту.** t бойнша шенелген периодты болған жағдайда ( периодпен)

.

Шынында,  және

р шешімдері үшін жуықталған (асимптотикалық мағынада) көрсетулер алынады. Оны  деп атаймыз.  арқылы  комплексті түйіндес шешімін белгілейміз.

**Теорема 1.*** функциясы  сегментінде үш рет үзіліссі дифференциалданады.*

*Онда  (1) теңдеудің келесідей фундаменталды шешімдер жүйесі бар:*

*,* (5)

**

*мұндағы, .*

**Ескерту.**Келесі теңдеу үшін осыған ұқсас нәтижені алуға болады:

,

(5)-те *i-ді* бірмен, сол айырмамен, ауыстыру керек.

*Негізгі әдебиеттер:* [1] – [8].

*Қосымша әдебиеттер:* [12] – [17].

**9 дәріс тақырыбы.**

**Асимптотикалық әдістер түсінігі. Ораташалау әдісі**

Жоспар:

1. Негізгі түсініктер.

2. Орташалау әдісі

**Орташалау әдісі**

. (1)

теңдеуін қарастырайық.

Алдыңғыдан белгілі, кейбір  сегментінде (1) теңдеудің оң жағының тегіс болу шарты жеткілікті болғанда (1) есептің  дәрежесі бойынша асимптотикалық көпмүше түрінде көрсетіледі. Бірақ математикалық физиканың сұрақтарының қатарын шешу барысында кез келген *t-*ның үлкен өзгеріс аралығында зерттеуге тура келеді, мысалы, *t~* үшін. Бұл жағдайда, сипатталған әдістер жарамсыз.

Бұл жағдайды, әлбетте, регулярлы емес ауытқығандар классына жатқызуға болады. Айнымалыларды ауыстыру



 өзгеріс аралығының шекті өзгеруіне әкелетініне назар аударайық, бірақ онда теңдеу келесі түрде болады:

.

Бұл формада ауытқудың регулярлы еместігі ерекше белгілі боп көрінеді.

Орташалау әдісін беретін, асимптотиканың құру ережелерін пішіндейік. Келесі функцияны енгіземіз

, (2)

Бұл функция айқын енгізілген *t* айнымалысы бойынша оң жақтың *орташа мәні* болып табылады.  айнымалысы осы амал бойынша тұрақты.

**Ескерту.** *t* бойынша периодты шенелген функциялар (периоды ) болғанда

.

Шынымен,  және

.

(2) шектік қатынастардан бөлек, келесі қатынастар да орындалады деп болжайық

, (3)

яғни  туындысының орташа мәні  орташа мәнінен алынған туындымен сәйкес келеді.

(1) теңдеуге келесі, (2)-ге қарағанда қарапайымдау орташаланған теңдеу деп аталатын, теңдеуді сәйкес қоямыз:

. (4)

**n ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу үшін:**

 (5)

Мұндағы,  және - берілген функциялар,  және  кіші параметрі. Зерттеудің нәтижесін дифференциалдық теңдеулерге енетін параметрлерден Коши есебінің шешімінен тәуелді келесі түрде қысқаша сипаттауға болады.

Егер   аралығында үзіліссіз және  функциялары үзіліссіз болып табылады



онда (1) теңдеу үшін



болғанда, Коши есебінің шешімі  бойынша келесі ауытқымаған теңдеу үшін  Коши есебінің шешіміне бірқалыпты ұмтылады:

 (6)

Егер



(6) теңдеудің коэффициенттері  бойынша (n+1) ретке дейін,  және  үзіліссіз дербес туындыларға ие болса, онда  болғанда



Бұл жағдайда  бойынша (1) ауытқыған теңдеу үшін Коши есебінің шешімінің бірқалыпты асимптотикалық көрсетілуі орындалады:

 ,

осында және бұдан әрі қарай  деген жазу  білдіреді, сонымен қатар, c>0-  тәуелді емес қандай да бір сан.

**Анықтама*.*** Жоғарыда көрсетілген (6)теңдеудің коэффициенттерінің үзіліссіздігі шарттарынан (6) теңдеуге  кіші параметрімен енгізілген ауытқу *регулярлы ауытқу* деп, ал (6) теңдеудің өзі *регулярлы ауытқыған теңдеу* деп аталады.

Бірақ кейбір қосымшаларда  кіші параметр (6) теңдеуге *регулярлы емес (сингулярлы)* түрде енгізілуі мүмкін, яғни (6) теңдеудің  коэффициенттері  үзіліссіз функция емес. Мұндай (6) теңдеулер *сингулярлы ауытқыған теңдеулер* деп аталады.

Төменде қарапайым мысалдарда (6) берілген бастапқы және шекаралық шарттар бойынша сингулярлы ауытқыған теңдеулердің шешімі (1) ауытқыған теңдеулерден түбегейлі өзгеше қасиеттерге ие болатыны көрсетіледі.

Алдымен  кіші параметрімен  бойынша бірінші ретті теңдеу үшін сингулярлы ауытқыған теңдеу үшін Коши есебін қарастырамыз:

  (7)

мұндағы, - нөлдік сан и -  аралығында берілген үзіліссіз дифференциалданатын функция.

(3) Коши есебінің шешімін  арқылы, ал (1) теңдеудің  болғандағы шешімін  арқылы белгілейік.  ұмтылғандағы -дің өзгерістерін зерттейміз. Бізді бұл кезде  -ке ұмтылады ма екені қызықтырады.

**Теорема 3.** Егер >0, онда әрбір  үшін



(14) формуладан  ұмтылғанда, егер 



аламыз, мұндағы - кез келген және тұрақталған. Барлық  үшін -тен -ке бірқалыпты ұмтылуы жоқ.

 маңайында  және  шешімдері жалпы жағдайда сәйкес келуі мүмкін емес болғандықтан, бұл нәтижені алдын ала болжауға болушы еді. (4) формуладан,  кезде,  болғанда  -ге ұмтылмайтыны көрініп тұр. Бұл құбылыстар (1) регулярлы ауытқыған теңдеулер үшін байқалмады.  болғанда (3) теңдеудің реті төмендейді, нақтырақ айтқанда, ақырлы теңдеуге айналады.

**Анықтама.** ,  кесіндісі  кіші параметрінде (3) Коши есебінің  шешімі -дің шешімінен қатты айырмашылығы бар, *шекаралық қабат* деп аталады.

Шекаралық қабаттың құбылыстары барлық жоғары туындылы кіші параметрлі теңдеулер үшін де тәуелді.

 шешімі  шешімінің, барлық  емес, тек әрбір кесіндісін асимптотикалық біқалыпты жуықталуы болып тұр.

Сингулярлы ауытқыған есептердің негізгі мақсаты  кезде осы есептердің, барлық  сегментінде бірқалыпты,  шешімдерінің асимптотикалық жуықталуы болып табылады. (4) формуладан баяуланған экспоненталар,  болғанда -де бірқалыпты  жуықтауын алуға мүмкіндік туғызатын -ке түзетулерді жұзеге асырады, сонымен қатар  шекаралық қатарда да. Бұл фактілер жоғары ретті теңдеулер үшін де байқалады.

 іші параметрлі  үлкен туындылы екінші ретті сызықтық теңдеуді қарастырамыз:

  (8)

мұндағы  және - берілген сандар, -  сегментінде үзіліссіз дифференциалданатын берілген функция. Келесі бастапқышарттарда  кезде (8) теңдеудің шешімінің өзгерістерін зерттейміз:

 ,  (9)

(5) теңдеуде  деп алып,

  (10)

ауытқымаған Коши есебінің шешімін аламыз. (8), (9) Коши есептерінің шешімдерін , ал (7) Коши есебінің шешімдерін  арқылы белгілейміз. Онда



**Теорема 4.** Егер , онда болғанда, барлық  қ  және, барлық  

4-теоремадан кез келген   кесіндісінде  шешімінің оның  туындысымен бірге  шешіміне және  туындысына бірқалыпты ұмтылуы жоқ. Мұндай бірқалыпты ұмтылу кез келген  үшін  кесіндісінде ғана бар болады.  маңайында -тің -ден қатты айырмашылғы болатын облыс бар. Бұл облыс есепті шекаралық қабаты деп аталады.  және  болғанда -ден -ке ұмтылу жоқ.

 кезінде келесі шекаралық есептің шешімінің өзгерістерін зерттейміз:

 , , , (11)

(11) шекаралық есептің шешімін  арқылы белгілейміз, ал ,  Коши есеебінің шешімін  арқылы белгілейміз.

**Теорема 5.**  болсын, онда жеткілікті аз  үшін (10) шекаралық есептің шешімі  бар, жалғыз және әрбір  үшін  . Одан басқа, барлық  мұндағы , - тұрақталған,  .

Ізінше,



аламыз.

Егер ,   болғанда өзгерісі, өзін-өзі ұстауы алынған бағалаудың соңғы қосылғышынан ғана тәуелді.  болғанда  әрбір  үшін және  барлық  үшін, мұндағы  және тұрақталған.

5-теоремадан  болған жағдайда (10) шекралық есептің шекаралық қабаты әрбір   болып шығады.

**Ескерту:** Егер  және - Коши есебінің шешімі  , онда ұқсас тәсілмен  болғанда , әрбір үшін және барлық  үшін  . Яғни, әрбір  осы жағдай үшін есептің шекаралық қабаты болып табылады.

**Негізгі әдебиеттер:**

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: ФМ, 1959.

2. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.- М.: Наука, 1984.

3. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.- Минск: Вышэйш. школа, 1974.

4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.- М.: Наука, 1969.

5. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления.- Москва-Санкт-Петербург: ФМ, 2001.

6. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1985.

7. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа 1995.

8. Касымов К.А. Линейные сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения второго порядка. А.-А.: КазПИ, 1981.

9. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1992..

10. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: ВШ, 1978.

11. Самойленко А.И., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи.- Киев: Вища школа, 1984.

**Қосымша әдебиеттер:**

12. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1982

13. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости.- М.: Наука, 1971.

14. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. - М.: Наука, 1987.

15. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. – М.: Наука, 1981.

16. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М: Наука, 1969.

17. Лопатинский Я.Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Киев «Вища школа», 1984.

18. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.,1967.

19. Векуа Н.П. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений и приложение в механике. М.: Наука, 1991.

20. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – М.: Наука, 1965.