Қазақстан Республикасының Ғылым және жоғары білім министрлігі

Қарағанды Бөкетов университеті

Математика және ақпараттық технологиялар факультеті

Профессор Т.Ғ.Мұстафин атындағы алгебра, математикалық логика және геометрия кафедрасы

Базылжанова А.С., проф. Т.Ғ.Мұстафин атындағы алгебра, мат. логика және геометрия кафедрасының аға оқытушысы, жаратылыстану ғылымдарының магистры

Токмагамбетов Н.С., проф. Т.Ғ.Мұстафин атындағы алгебра, мат. логика және геометрия кафедрасының аға оқытушысы, PhD

**«Алгебралық жүйелер» пәні бойынша**

**Дәрістер курсы**

(10 сабақ)

«6В05401-Математика» білім беру бағдарламасы

Қарағанды 2023

**Дәріс №1**

**Тақырыбы: Бинарлық амалдар**

**Дәріс жоспары:**

1. Теорияның негіздері;
2. Орын ауыстырымдылық;
3. Нейтралдық элемент;
4. Симметриялық элемент;
5. Терімділік;
6. Үлестірімділік

Жалпы алгебра алгебарлық жүйелерді зерттейді. Кез келген мұндай жүйе:

* табиғаты кез келген болатын элементтердің негізгі жиынымен анықталалады, бұлар сандар, векторлар, матрицалар, функциялар (мысалы, көпмүшеліктер) және т.б.;
* осы элементтерден құралған алгебралық амалдар жиынтығымен анықталады, бұл амалдардың нәтижесінде негізгі жиынға тиісті жаңа элемент алынады. Осы амалға қатысқан әрбір элемент операнда деп аталады.

Мысалдар: (N, +) – қосу амалы бар натурал сандар жиыны, (N, ·) – көбейту амалы бар натурал сандар жиыны, (Z, +, ·) қосу, көбейту амалдары бар бүтін сандар жиыны.

Әрбір амал оған қатысатын операнданың санымен сипатталады. Көптеген амалдар үшін екі опреанда қатысады, мұндай амалдар бинарлық амал немесе екі орынды амал деп аталадың алайда унарлы немесе бір орынды амалдар немесе үш амалды амалдар да кездеседі. Үштен жоғары операнда қатысатын амалдар көп кездеспейді.

**Анықтама.** Жиынның белгілі бір ретпен алынған екі элементіне сол жиынның бір элементін сәйкес қою бинарлық амал деп аталады.

Операнданың кез келген мәніде амал анықталуы (орындалу) керек, басқаша айтқанда жиын осы амалға қарағанда тұйық болуы керек. Керісінше жағдайларда алгебралық жүйе қате берілген деп есептеледі. Алгебралық жүйелердің нақты мысалдарын қарастыру барысында тұйық болу заңы орын ауыстырымдылық (коммутативтілік) қасиетке дейін қарастырылуы керек.

Тұйық болу мәселесі қарастырылатын негізгі жиын шектелген болғанда қиын, мысалы, барлық бүтін сандар емес, тек жұп сандар деп, немесе барлық нақыт сандар емес, тек оң сандар деп қарастырғанда.

Ол амалды еркімізше атап, қалауымызша белгілейміз. Бірақ өзімізге ыңғайлы да таныс «қосу» және «көбейту» бинарлық амалдарын алып, сәйкес «+» және «·» белгілерін қолданамыз.

Кез келген бинарлық амалды ақырлы жиында Кели кестесі арқылы көрсетуге болады. Бұл кестенің әрбір жолы бірінші операнданың нақты мәніне сәйкес келеді, ол кестеде сол жақтағы бірінші бағанада орналасады, әрбір бағана – операнданың екінші мәні, ол кестеде бірінші жолда жазылады.

Мысалы, логикалық амалдар үшін Кэли кестесін мына түрде жазуға болады:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ˄ | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

1.1–кесте. Конъюнкция амалы

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ˅ | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

1.2 –кесте. Дизъюнкция амалы

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| → | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

1.3-кесте. Импликация амалы

Сонымен қатар, еркімізше алынған  амалына кейбір ақырлы жиында (тура осы сәтте ешқандай мағынасы жоқ болып көрінетін) Кели кестін құрастыралық. Ол ақырлы жиынды  десек, оның элементтерінің табиғаты белгісіз. Сонда Кели кестесі төмендегідей болады:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | e | a | b |
| e | e | a | b |
| a | a | b | e |
| b | b | e | a |

1.3-кесте. Еркізімізше алынған  амалы

2. **Орын ауыстырымдылық (Коммутативтілік).**

**Анықтама.** Егер негізгі жиынынан алынған кез келген екі  элементтері үшін  орындалса, онда  амалы орын ауыстырылымды амал деп аталады.

Мысалы, 1) сандарды қосу, матрицаларды қосу, векторлады қосу, сандарды көбейту, көпмүшеліктерді көбейтуде орын ауыстырылымдық амал орынды; 2) конъюнкция, диъюнкция логикалық амалдары орын ауыстырылымды, ал импликация амал орын ауыстырылымды бола алмайды.

Тексеріңіз:

-Матрицаларды көбейту орын ауыстырылымды ма?

-Векторлардың векторлық көбейтідісі орын ауыстырылымды ма?

3. Нейтралды элемент.

**Анықтама.**  элементі  амалына қарағанда нейтралдық элемент деп аталады, егер кез келген  үшін  теңдігі орындалса.

Сандарды қосуда – 0, векторларды қосуда –  нольдік вектор, матрицаларды қосуда – өлшемі берілген матрицамен бірдей нольдік матрица нейтралдық элемент болады, ал сандарды және көпмүшеліктерді көбейтуде – 1 (көпмүшелікте дәрежесі нольге тең), квадрат матрицаларды көбейтуде – Е бірлік матрицасы, ауыстырмаларды көбейту амалына қарағанда теңбе-тең алмастыру нейтралдық элемент ретінде алынады. Логикалық конъюнкция амалы үшін – 1, дизъюнкция үшін – 0, ал импликация амалы үшін нейтралдық элемент жоқ, тек сол жақты нейтралды элемент бар, ол – 1, себебі  және .

Симметриялық элемент.

**Анықтама.** Кез келген  үшін  амалына қарағанда симметриялық элемент деп  шарты орындалатындай  элементін айтамыз. (Мұнда  нейтралды элементі бар деп есептеледі).

Сандарды қосу бойынша  элементіне симметриялық элемент  болады, мұнда .

Векторларды қосу бойынша  векторына симметриялық элемент  векторы болады, мұнда .

Сандарды көбейту бойынша  элементіне симметриялық элемент  болады, мұнда .  элементі тек қана  болғанда ғана орындалғандықтан негізгі жиынды дұрыстап анықтау керек. Айталық, нөлден өзгеше жиынын алсақ,  және  болғанда  болады. Сондықтан осы жиында  амалы дұрыс анықталды (жиын берілген амалға қарағанда тұйық) және  симметриялық элементі кез келген  элементі үшін бар болады.

Матрицаларды көбейту амалына қатысты нейтралдық элемент ретінде *Е* бірлік матрица, ал *А* матрицасына симметриялық матрица ретінде  кері матрицасы алынады (кері матрица берілген матрица ерекше емес болғанда ғана табылатынын ескереміз). Жақсы қасиеттерге ие алгебралық жүйелерді алу үшін негізгі жиынды осындай матрицалармен шектеу керек. Бұл жиын көбейту амалына қарағанда тұйық, себебі .

Ауыстырмаларды көбейту амалына қарағанда нейтралды элемент ретінде теңбе-тең ауыстырма (мысалы, ),  алмастыруына симметриялы ауыстырма болып  кері ауыстырма алынады, бұл ауыстырманы берілген  ауыстырмасындағы жолдардың орындарын ауыстырып жазады. Мысалы,  берілсе, онда оған кері ауыстырма  болады.

Логикалық амалдар конъюнкция үшін нейтралды элемент – 1, диъюнкция үшін нейтралды элемент – 0, ал осы амалдар үшін симметриялық элемент жоқ.

Терімділік (ассоциативтік).

**Анықтама.**  амалы терімділік амал деп аталады, егер кез келген  үшін  теңдігі орындалса. Тек осы жағдайда  түрінде жазуға болады. Ал егер үш мүшеден артық мүшелер қатысатын болса, онда  түрінде жазуға болады.

Мысалы, векторлар қосу амалына қарағанда ассоциативті (векторлық алгебра курсында дәлелденген); матрицалар қосу амалына қарағанда ассоциативті, себебі сандарды қосу ассоциативті; матрицалар көбейту амалына қарағанда ассоциативті (өздгінен дәлелдеңіздер); көпмүшеліктерді қосу және көбейті ассоциативті, мұнда көпмүшеліктердің коэффициенттерін қосамыз және көбейтеміз; ауыстырмаларды көбейту ассоциативті, себебі ауыстырма ақырлы жиынды өзіне бейнелейтін функция болып табылады, сонда ауыстырмалардың көбейтіндісі – осы функицялардың композициясы; логикалық амалдар – коньюнкция және дизъюнкция ассоциативті, ал импликация амалы ассоциативті емес.

**Терімділік (дистрибутивтілік).**

**Анықтама.** Егер алгебралық жүйеде екі бинарлық амал анықталса, яғни «+» және «·» терімділік амалы деп аталады және бұл жағдайда маңыздысы – бұл амалдар өзара үйлесуі (өзара байланысу керек). Сонда бұл қосу амалына қарағандағы көбейтудің үлестірімділігі болады:

 – сол жақты үлестірімділік;

– оң жақты үлестірімділік.

Сандарды қосу, көпмүшеліктерді көбейту, матрицаларды көбейту, векторларды векторлық көбейту терімділік заңына бағынады.

Есептер қарастырайық.

Есеп 1. Алгебралық жүйелердің қасиеттерін (амалға қатысты жиынның тұйықтығы, орын ауыстырымдылығ қасиетін, нейтралдық элеменет пен симметриялық элементтердің бар не жоғын, терімділік қасиет) анықтаңыз.

1. 
2. 

Шешуі: Екі жиын да берілген амал бойынша тұйықталған, орын ауыстырымдылық және терімділік қасиеттер анықтамадан (үш санның ЕҮОБ және ЕКОЕ) шығады.

1. Егер  болса, онда  саны  санына бөлінеді. ЕҮОБ амалының  нейтралдық элементі үшін ,  болуы керек. Сондықтан,  саны кез келген  натурал санына бөлінуі керек. Алайда, ондай  саны жоқ екені белгілі. Сондықтан ЕҮОБ амалына қатысты симметриялық элементте жоқ.
2. ЕКОЕ амалы үшін  нейтралдық элементі кез келген  саны үшін  теңдігін қанағаттандыруы керек. Ондай сан бар және ол – 1. Сондай-ақ,  симметриялық  шартын қанағаттандыруы керек. Алайда кез келген  және  элементтері үшін  және  теңсіздіктері орындалады, яғни бұл жағдайда  және , бұл мүмкін емес себебі,  натурал элементі кез келген элемент болып тұр. Сонымен, ЕКОЕ амалына қатысты симметриялық элементтер жоқ.

Есеп 2.  алгебралық жүйесін қасиеттерін көрсетіңіз, мұнда  – үшөлшемді кеңістіктегігеометриялық векторлардың жиыны,  – векторлардың векторлық көбейтіндісі.

Шешуі: Жиынның тұйық болатыны айқын. Ал коммутативтілік қасиеттін орынды болатыны белгісіз, оның орнына антикоммутативтілік орынды: .

 нейтралдық элементі үшін  шарты орындалуы керек. Бірақ ондай  векторы болмайтыны белгілі, себебі  көбейтіндісі  және  векторларына ортогональ, сондықтан олардың біріне тең болуы мүмкін емес. Сонымен қатар, антикоммутативтіліктен  және  векторлары қарама-қарсы болатындығы шығады, ал егер олар  векторлар болса ғана өзара тең болады. Сондықтан,  амалына қарағанда симметриялық элемент болмайды.

Векторлық көбейтінді үшін терімділік қасиет орындалмайды. Дәлелдеу үшін қарсы мысал қарастырайық, яғни декарттық осьтердің  орттарының векторлық көбейтіндісін алайық:

.

Енді жақшаның орнын ауыстырайық:



теңдігін аламыз.

Есеп 3. Әзірге анықталмаған сандық жиында стандартты емес  амалын енгізейік.  амалының қасиеттерін зерттеңіз.

Шешуі. Егер жиын стандартты + және  амалдары үшін тұйықталған болса, онда ол  амалы үшін тұйықталған болады. Бұл амал үшін орын ауыстырымдылық (коммутативтілік) қасиет орынды. Енді терімділік қасиетті тексеру керек. Кез келген  үшін мына теңдікті жазайық:  және теңдіктің екі жақтағы жақшаларын екі қадаммен анықтамадағы амал бойынша ашамыз:





Олай болса,  амалы үшін терімділік қасиет орынды.

 нейтралдық элементі үшін кез келген болғанда  болуы керек, бұдан .  кез келген сан болғандықтан, .

 симметриялық элементі үшін  кез келген болғанда  шарты орындалуы керек, бұдан , онда  болады. Сонымен, негізгі жиында симмериялық элементтер болуы үшін бөлу амалы орындалуы керек деп қорытындылаймыз. (Сонда бұл жиын жоқ дегенде  рационал сандар жиыны болуы керек). Сонымен қатар бұл жиыннан 1 санын шығарып тастау керек. Маңыздысы  жиыны  амалына қарағанда тұйықталған.

Есеп 4. .Негізгі жиын – кейбір сандық өрісте берілген  өлшемді симметриялық матрицалар. Осы алгебралық жүйенің қасиеттерін анықтаңыз.

Шешуі: Біріншіден, симметриялық матрицалардың жиыны көбейту амалына қарағанда тұйықталған бола ма, жоқ па анықтау керек. Бұл егер және  көбейткіштері симметриялық болғанда  көбейтіндісі симметриялық болады ма деген сөз. Симметриялық матрицалар үшін  және  орынды. Транспонирлеу қасиеті бойынша . Бұл Шик теоремасын дәлелдегенмен бірдей.

Шик теормасы. Симметриялық матрицалардың көбейтіндісі симметриялық болады, сонда тек қана сонда, егер олар орынауыстырылымды болса.

Жалпы жағдайда симметриялық матрицалардың көбейтіндісі симметриялық емес, мысалы,

.

Сонымен  алгебралық жүйесі болмайды екен (Бірақ  жүйесі бар).

Есеп 5. *п*-ші ретті ерекше емес матрицалардың көбейтіндісі алгебралық амал болатынын көрсет. (Матрицаның анықтауышы нөлден өзгеше болса, онда *A* матрицасын ерекше емес матрица деп атаймыз.)

Шешуі. Айталық, *А* және *В* – *п*-ші ретті кез келген ерекше емес матрицалар болсын. (). Олардың көбейтіндісі *АВ* толығымен анықталған *п*-ші ретті матрица болып табылады: . Енді, *С* – матрицасы ерекше емес екенін көрсетейік.  болатыны белгілі, ендеше .  және болғандықтан ,яғни С матрицасы ерекше емес.

Осылайша, кез келген екі *п-*ші ретті ерекше емес матрицалардың көбейтіндісі *п-*ші ретті ерекше емес матрица болады. Ендеше *п-*ші ретті ерекше емес матрицалардың көбейтіндісі алгебралық амал болып табылады.

Ескерту: *п-*ші ретті ерекше емес матрицалардың қосындысы  болған жағдайда алгебралық амал болып табылмайды. Себебі екі ерекше емес матрицалардың қосындысы ерекше матрица болып шығуы мүмкін.

Негізгі әдебиеттер:

1. Ешкеев А.Р. Группалар теориясының элементтерінің кейбір жаттығуларының шешімдері мен мысалдары. Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 47 б., 2003.
2. Асенова А.Е., Әсен Е.Қ. Сандар теориясына кіріспе. «Болашақ» баспасы, Қарағанды 2007.
3. Сексенбаев Қ.С., Жетпісов Қ.Ж. Көпмүшеліктер сақинасы. Қарғанды, 2000. 130 б.

Қосымша әдебиеттер:

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. В трёх частях. − М.: МЦНМО, 2009.
2. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. СПб.: Лань, Физматкнига, 2007. 288 с.
3. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. Лань, 2009.

**Дәріс №2**

**Тақырыбы: Группалар**

**Дәріс жоспары:**

1. Анықтамасы және мысалдар
2. Группа туралы үш теорема
3. Ішкі группа
4. Группалардың изоморфизмі және гоморфизмі

Математикада қарастырылатын жиындардың элементтеріне әртүрлі амалдар жиі қолданылады. Мысалы, нақты [сандар жиынында сандарды қосу](http://engime.org/bolim-1v-racional-sandar-jene-olarfa-amaldar-oldanu-tairiptar.html), көбейту, квадраттау, ал бағытталған кесінділер 𝕊 [жиынында векторларды қосу](http://engime.org/sabati-tairibi--23-vektorlarfa-amaldar-oldanu-kni-04-03-2017-m.html), [нақты сандарға көбейту](http://engime.org/kobejtubolu-tairibin-ajtalau-sabafi-6-sinip-sabati-masati.html), векторлық көбейтінді сияқты амалдардың маңызы зор.

Осы мысалдардағы амалдардың үш ерекшелігіне көңіл аударалық. [Біріншіден](http://engime.org/azastan-tarihin-filimi-kezederge-bolu-meselesi.html), бұл амалдар қарастырылған жиындардың кез келген элементері үшін анықталған. [Екіншіден](http://engime.org/stohastika-elementterin-oldanip-esepter-shifaru.html), бұл амалдардың [нәтижесі бір мәнді анықталған](http://engime.org/pen-algoritmdeu-jene-bafdarlamalau-negizderi-teueldi-jene-teue.html), ал үшіншіден, ол нәтиже қарастырылған жиында жатады.

Бірақ, бұл шарттар кез келген шарттар үшін орындалмайды. Мысалы, нақты сандар ℝ жиынында теріс сандардың квадрат түбірі [анықталмаған](http://engime.org/saba-jospari-cabati-tairibi-alfashi-funkciya-jene-anitalmafan-v2.html), ал кез келген оң санның түбірі анықталғанымен, оның нәтижесі бір мәнді емес. Ал 𝕊 жиынында екі векторды скаляр көбейту амалының нәтижесі нақты сан (вектор емес!), сондықтан ол 𝕊 жиынына жатпайды.

Бізге G жиыны берілсін.

**Анықтама.** Егер жиынында екі орынды алгебралық амал анықталса, онда G жиынын группоид деп атаймыз.

Мысалы,

1. N натурал сандар жиыны қосу амалына қарағанда группоид болады.
2. Барлық Q рационал сандар жиыны көбейту амалына қарағанда группоид болады.

«» – бинарлық амалы берілсін.

**Анықтама.** G жиынында қандай болмасын  бинарлық амал қарағанда мына:

1.  үшін  – терімділік (ассоциативтік) қасиет;
2.  үшін  табылып, , мұндағы  – бірлік немесе нейтралдық элемент;
3.  үшін  табылып, , мұндағы  – -ға

симметриялық элемент (кері элемент деп те атайды);

түріндегі осы үш аксиома орындалса, онда G жиыны группа деп аталады.

Ескерту. Кез келген  элементтен  симметриялық элементке өту осы негізгі жиынды анықталған  амалына қатысты бір орынды (унарлы) амал ретінде қарасытруға болады.

**Анықтама.** Осы группадағы элементтердің саны осы группаның реті деп аталады.

**Анықтама.** Егер G группасында бинарлық амалдың орын ауыстыру заңы орындалса, онда оны абельдік немесе коммутативтік группа деп атаймыз.

**Анықтама.** Егер G жиынында  үшін  – терімділік (ассоциативті) қасиет орындалса, ол жартылай группа деп аталады.

**Анықтама.** G жартылай группасында  үшін  табылып,  (мұндағы  – бірлік немесе нейтралдық элемент) орындалса, онда ол моноид деп аталады.

Олай болса, группаның анықтамасын мына түрде беруге болады.

**Анықтама.** Егер G жиынында бинарлық алгебралық амал анықталып, осы амалға қарағанда G жартылай группа болса және бір ғана бірлік элементі, онымен бірге әрбір элментіне сәйкес бір ғана кері элементі болса, онда G жиынын *группа* деп атаймыз.

Группа туралы үш теорема.

**Теорема 1.**  бірлік немесе нейтралдық элемент тек жалғыз болады.

**Теорема 2.** Кез келген  элементіне  симметриялық элемент жалғыз болады.

**Теорема 3.**  және  теңдеулерінің әрқайсысы бірмәнді шешілімді. Мұнда  және  – негізгі жиынға тиісті параметрлер

Кэли кестесімен жазылған шекті группа үшін 3-ші теоремаға сәйкес мына түрдегі салдар шығады:

**Салдар 1.** Кестедегі кез келген жолдың элементтерінің барлығы әртүрлі.

**Салдар 2.** Әрбір жолда тек бір реттен барлық элементтер болады.

Тура осы тұжырымдарды бағаналарға да қатысты айтуға болады.

Мысалдар: 1) – бүтін сандардың аддитивтік группасы. Бұл жердегі «аддитивтілік» термині осы группаның қасиеттері туралы емес, тек группандағы амалды көрсеті үшін берілді («additio» латын тілінен аударған «қосу» деген мағынаны білдіреді). Тура осы сияқты  аддитивті рационалдар сандар жиыны,  аддитивті нақты сандар жиыны,  аддитивті комплекс сандар жиыны группаны құрайды. Осы аталған жиындардың барлығында нейтралдық элемент – 0, кез келген  элементі үшін  симметриялық элемент болады. Бұл группалар коммутативті.

Керісінше,  жүйесі группа болмайды, ол нейтралды элемені бар (бірлік элементі бар жартылай группа) коммутативтік жартылай группа, мұнда симметриялық элементтер 1 және -1 (өздері) болады.

2)  – нөлден өзгеше рационалдар сандардың мультпликативтік группасы. Мұндағы «мультипликативтілік» группаның қандай да бір қасиетін көрсетпейді, ол тек группадағы амалды анықтайды, себебі «multiplicatio» латын тілінен аударғанда «көбейту» дегенді білдіреді.

Сонымен қатар,  нөлден өзгеше нақты сандар жиыны,  нөлден өзгеше комплекс сандар жиыны мультпликативті группа болады. Бұл группалардың барлығында нейтралдық элемент – 1 саны, ал кез келген  элементі үшін  симметриялық элемент болады. Алынған жиындарды 0 санын шығарып тастауға тура келді, себебі  болмайды.

Сонда, керісінше , ,  жиындары группа бола алмайды, себебі 0 элементі үшін симметриялық элемент табылмайды, сондықтан бұл коммутативтік жартылай группа болады.

1.  - оң рационалдар жиыны мультипликативтік группа болады. Сонымен қатар  оң нақы сандар жиыны да группа болады. Бұл мультипликативтік группаларда нейтралды элемент – 1 саны болса, кез келген  элементі үшін  симметриялық элемент болады.
2.  – элементтері F өрісінен алынған, m жолдар мен n бағаналардан тұратын матрицалардың аддитивті группасы. Мұнда нейтралды элемент 0дік матрица алынады, ал кез келген X матрицасы үшін симметриялық элемент ретінде –Х матрицасы (элементтері қарама-қарсы таңбамен алынған матрица) алынады.

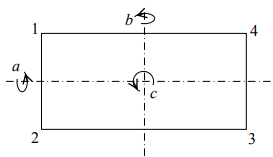
Сонымен қатар,  – векторды санға көбейту амалын алып тастаған векторлық кеңістігі, мұнда тек векторларды қосу амалы ғана орынды.

Егер  болғанда матрица арифметикалық жол-вектор, ал  болғанда матрица арифметикалық бағана-вектор болады.

1.  – толық сызықтық группа. Бұл F сандық өрісінде берілген n өлшемді ерекше емес квадраттық матрицалардың мультипликативтік группасы. Мұнда нейтралдық элемент – Е бірлік матрица, ал кез келген ерекше емес Х квадраттық матрицасы үшін симметриялық элемент ретінде  кері матрицасы алынады.

Барлық матрицалардан, оның ішінде ерекше матрицалардан тұратын жүйе көбейту амалына қарағанда группа бола алмайды. Бұл бірлік элементі бар коммутативтік емес жартылай группа, себебі ерекше матрицалар үшін симметриялық матрица табылмайды.

1.  – жазықтықтағы немесе үшөлшемді геометриялық кеңістіктегі геометриялық векторлардың (бағытталған кесінділердің) аддитивтік группасы. Мұнда нейтралдық элемент –  (нөлдік вектор), кез келген  вектор үшін симметриялық элемент ретінде оған қарама-қарсы  векторы алынады.
2. Фигуралардың симметрия группасы – бұл фигураны өзіне көшіретін барлық қозғалыстардың жиыны, осы группадағы амал – композиция (қозғалыстардың бірінен кейін бірі орындалуы). Квадраттан өзгеше тікбұрыш үшін симметрия группасы болып симметрия осінің айналасындағы  және  айналымынан (жазықтықтан шығады) тұрады және симметрия центрі айналасындағы  айналымынан (жазықтықтан шықпайды) тұрады. Мұнда  нейтралды элемент – «ешқандай қозғалыс жоқ» (яғни тікбұрыш қозғалмайды) (1-сурет).



1-сурет. Симметрия группасы

Әрбір қозғалыс тікбұрыштың төбелерін көрсететін сандар жиыныннан тұратын сәйкес ауыстырмамен сипатталады:

, , , 

Бұл группа Клейннің төрттік группасы деп аталады.

Группа теориясында негізгі ұғымдардың бірі – *ішкі группа.*

**Анықтама.** Айталық,  – кейбір группасы берілсін. Онда  группасын  группасының *ішкі группасы* деп атайды, мұнда . Олай болса  ішкі группа. Сонда группа мен оның ішкі группасындағы амал да, екеуіндегі нейтралдық элемент те, симметриялық элементті құру әдісі де бірдей болады. Әрбір группаде кем дегенде екі ішкі группасы болады, яғни өзі және негізгі жиыны бір ғана  элементінен тұратын бірлік ішкі группа. Бұл ішкі группалар өзіндік емес ішкі группалар деп аталады, ал қалғандары (егер олар бар болса) – өзіндік болады.

Шекті (ақырлы) гуппалар мен олардың ішкі группалары үшін Лагранж теоремасының рөлі үлкен.

**Лагранж теоремасы.**Кез келген ішкі группаның реті сол группаның өзінің бөлгіші болып табылады.

**Онда бұл теоремадан шығатын салдар**: егер группаның реті жай сан болса, онда сол группаның өзіндік ішкі группалары болмайды.

Мысалдар: 1)  бүтін сандардың аддитивті группасы  рационал сандардың аддитивті ішкі группасы болады, ал  рационал сандардың аддитивті группасы  нақты сандардың аддитивті группасының ішкі группасы болады, ал бұл өз алдында  комплекс сандардың аддитивті группасының ішкі группасы болады. Бұл группалардың барлығында нейтралды элемент – 0 саны, кез келген  саны үшін симметриялық элемен соның таңбасына қарама-қарсы  саны болады.

Символдық түрде оны мына түрде көрсетуге болады:

.

Мұнда барлық «ішкі» белгісі қатаң және барлық ішкі группалар өзіндік.

2)  нөлден өзгеше рационал сандардың мультпликативтік группасы,  нөлден өзгеше рационал сандардың мультипликтивтік группасының ішкі группасы болады, ал бұның өзі  нөлден өзгеше комплекс сандардың мультпипликативтік группасының ішкі группасы болады.

Символдық түрде



деп жазылады. Мұнда да барлық «ішкі» белгісі қатаң және барлық ішкі группалар өзіндік.

1.  оң рационал сандардың мультипликативтік группасы  нөлден өзгеше рационал сандадың мультипликативтік группасының өзіндік ішкі группасы болады: .
2.  оң нақты сандардың мультипликативтік группасы  нөлден өзгеше нақты сандадың мультипликативтік группасының өзіндік ішкі группасы деп болады: 
3.  жұп бүтін сандардың аддитивтік группасы  бүтін сандардың аддитивті группасының өзіндік ішкі группасы болады: .

Бір группаның екі ішкі группасының қиылысуы да ішкі группа болады.

**Маңызды ескерту.** Группадағы және ішкі группадағы  амалы бірдей. Яғни кейбір  группа үшін  ішкі жиынын және жаңа  амалын алайық. Осы мал арқылы  группасын құрып (мүмкін болса) көрелік, онда бұл группа  болса да G группасының ішкі группасы бола алмайды.

Айталық, кейбір n ретті квадрат матрицалардың аддитивті группасын + амалымен алайық, және содан кейін n-ші ретті ерекше емес матрицалардың ішкі группасын алып, сонда  амалымен мультпликативтік группаны құрсақ, онда бұл группа алғашқы алынған аддитивті группаның ішкі группасы болмайды.

Сонда « алгебралық жүйесі  группасының ішкі группасы болуы үшін  ішкі жиынының қандай қасиеттерін зерттеу керек?», - деген сұрақ туындайды.

Бастысы – ішкі жиын  амалына қарағанда тұйық болуы керек. Сонымен қатар, бұл ішкі жиынға группаның нейтралдық элементі тиісті болуы керек және де егер  болса, онда  симметриялық элементі де  жатуы керек.

 амалының ассоциативтілігін тексеріп қажет емес, себебі  группа болғандықтан, ассоциативтілік қасиет М жиынының барлық элементтері үшін орынды, онда ол  ішкі жиынының элементтері үшін де орынды.

Маңызды ұғымдардың бірі – группалардың изоморфизмі.

Айталық,  және  екі әртүрлі жиында, әртүрлі амалдармен анықталған группалар берілсін.  және группалары изоморфты, егер

1.  биекциясы (өзара бірмәнді) бар болса;
2. Кез келген  үшін  орындалса, яғни амалды сақтайтын биекция болса.

Группалардың изоморфизмі  түрде белгіленеді.

Мысалдар: 1) Айталық,  оң нақты сандардың мультипликативтік группасы мен  нақты сандардың аддитивтік группасы.  бейнелеуін кез келген негіздегі логарифмдік функцияның көмегімен анықтайық, сонымен қатар бұл жерде натурал логарифмдерді алуға болады, яғни . Бұл бейнелеу – өзара бірмәнді, кері бейнелеу  формуласымен беріледі.  белгілі. Сондықтан бұл екі группа изоморфты: .

2) Группа өзінің ішкі группасына изоморфты болуы мүмкін, мысалы, .  бейнелеуі  формуласымен беріледі.

Изоморфизм ұғымы – группаны зерттеудегі мықты құрал. Есімізге 1-дәрістегі  жиынында еркімізше алынған  амалына құрылған кестені еске түсірелік. Бұл жиында орын ауыстырымдылық (коммутативтілік) қасиетін, нейтралдық элемент пен симметриялық элементтің барын кестеде арқылы көре алдық. Алайда, терімділік (ассоциативтілік) қасиетін көрсету қиын. Сондықтан бұл қасиетін орындалатындығын өзге жолмен көрсетелік. Ол үшін  алгебралық жүйесі мен 3 модулі бойынша қалындылардың аддидивтік группасының арасында изоморфизм орнатайық, яғни  мен  арасындағы изоморфизм, мұндағы .

 бейнелеуін енгізейік. Сонда , , . Енді  орындалатынын тексерелік. Өрнектің сол жағындағы 1.3-кестеге сәйкес  , ал бұдан . Ал, оң жақта . Осы түрде 1.3-кестенің барлығын тексерсек, бұл екі жүйенің өзара изоморфты екеніне көз жеткізуге болады. Онда мына түрдегі қорытынды жасауға болады:  алгебралық жүйесі группа, сондықтан  амалы үшін терімділік қасиет орындалады.

Группаның өз-өзіне изоморфизмі – автоморфизм. Кез келген  үшін  болғанда әрқашанда тривиалды автоморфизм болады. Біздің мысалдағы автоморфизм тривиалды емес.

Мысалы, 3)  аддитивті группасы үшін  бейнелеуін алайық. . Бұл тривиалды емес автоморфизм. , ,  группаларының автоморфизмі тура осындай бейнелеуді береді.

Изоморфизм ұғымына жақын ұғым –  және *группаларының гомоморфизмі*.

**Анықтама.** Егер изоморфизм ұғымындағы өзара бірмәнді бейнелеуді алып тастап, бірақ  сақтаса, онда гоморфизм шығады. Бұл жағдайда  группасы  группасының *гомоморфты бейнесі* деп аталады.

 гомоморфизм ядросы – группасының нейтралдық элементіне көшетін  группасы элементтерінің жиыны. Группаның ядросы  группасының ішкі группасы болады.

Мысалы, 1)  және , , .  амалды сақтайды. Мұнда  –  группасының ішкі группасы, екі группада да амал бірдей, ол – нақты сандарды көбейту амалы.

**Анықтама.** Группаның өз ішіне гоморфизмі – эндоморфизм деп аталады.

2) , , ,  – модулі бойынша 1-ге тең комплекс сандардың жиыны:

.

Негізгі әдебиеттер:

1. Ешкеев А.Р. Группалар теориясының элементтерінің кейбір жаттығуларының шешімдері мен мысалдары. Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 47 б., 2003.
2. Асенова А.Е., Әсен Е.Қ. Сандар теориясына кіріспе. «Болашақ» баспасы, Қарағанды 2007.
3. Сексенбаев Қ.С., Жетпісов Қ.Ж. Көпмүшеліктер сақинасы. Қарғанды, 2000. 130 б.

Қосымша әдебиеттер:

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. В трёх частях. − М.: МЦНМО, 2009.
2. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. СПб.: Лань, Физматкнига, 2007. 288 с.
3. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. Лань, 2009.

**Дәріс №3**

**Тақырыбы: Циклдік группалар**

**Дәріс жоспары:**

1. Циклдық группалар ұғымы.
2. Циклдік группа туралы үш теорема.
3. Элементтің реті.

**Анықтама.** Егер группаның барлық элементтері оның қандай да бір элементінің дәрежелері болса, онда ол циклдық группа деп аталады.

Мысалы,  нөлден өзгеше комплекс сандардың группасын алайық. Ондағы  жорамал бірлікті таңдайық та, оның дәрежелерін қарастырайық: , , , . Одан әрі қарай сандар қайталанады, процесс циклданады (сондықтан атауы осыдан шыққан). Мұндай жағдайда группа  элементінен туылған деп атайды, оны  деп белгілейді.

Ал егер  жорамал санның орнына 2 алсақ, , , , ... шексіз тізбек шығады. Оны мультпликативті группаға айналдыру үшін  және , , , ... барлық теріс дәрежелерін қосып, шексіз циклдік группаны аламыз:

.

 мультпликативтік группасы  аддитивті группаға изоморфты: оның кез келген  элементіне , негізі бірдей сандарды көбейткенде дәрежелері қосылады,  нейтралдық элементке 0, ал  симметриялық элементіне  симметриялық элемент сәйкес келеді.

 циклдық группасын «дәреженің» анықтамасын пайдаланып қалай құруға болады? Мұнда тудырушы (құрушы) элемент 1, әрі қарай , , ... Алайда, олар дәрежелер емес! Қоршаушы группа аддитивті болса, онда дәреженің орнына *еселік* болады: ,  және т.б.

2-ші дәрісте  алгебралық жүйесі  группасына изоморфты болатынын көрдік. Енді осы группаның циклдық болатынын көрсетелік.  амалымен «көбейту» амалы үшін дәрежелерді белгілеу , . Сонда, расында да негізгі жиынның барлық элементтері көбейтілді.

Циклдік группа туралы үш теорема.

**Теорема 1.** Кез келген циклдық группа орынауыстырылымды (коммутативті).

**Теорема 2.** Циклдық группаның ішкі группаларының барлығы циклдық группа болады.

**Теорема 3.** Бірдей ретті барлық циклдық группалар изоморфты.

Мысалы,  группасы  қалындылар группасына изоморфты, мұнда  – -дың кез келген  дәрежесіне -ны 4-ке бөлгендегі қалдық сәйкес келеді.

Кэли теоремасына сәйкес, кез келген шекті группа оның элементтерінің кейбір ауыстырмасы группасына изоморфты. -ретті циклдық группа үшін  циклдық группасы изоморфты болады, мұнда  –  цикл-ауыстырма (циклдық ауыстырма) дәрежелерінен тұратын группа: , сонымен қатар – теңбе-тең ауыстырма: , яғни группаның нейтралдық элементі болады.

**Анықтама.** Қоршаушы группаның кез келген  элементінің реті деп өзі тудырған  циклдық группасының ретін айтады (яғни оның элементтерінің санын айтады).

 элементінің ретін  деп белгілейді.

 группасында  жорамал санның реті 4-ке, -1 санының реті 2-ге, 1 санының реті 1-ге тең, ал 2 санының реті шексіз болады.

Мысалдар: 1)  *n* модулі бойынша қалындылардың аддитивті группасының реті *n*-ге тең.

2)  1-дің комплекс түбірлері группасының *n*-ге тең, мұнда тудырушы элемент, мысалға, .

3)  - берілген *n* натуралсанына еселік болатын бүтін сандардың аддитивтік группасының реті шексіздік, мұнда группаны тудырушы элемент *n*.

*G* группасының *а* элементіне тең *п* элементтердің көбейтіндісі а элементінің *п*-ші дәрежесі деп аталады және  арқылы белгіленеді.  элементінің теріс дәрежесін  элементінің кері дәрежесі болатын G группасының элементі ретінде немесе  элементіне тең болатын бірнеше көбейткіштердің көбейтіндісі ретінде анықтауға болады.  ретінде 1 элементін алайық.

Оң, теріс немесе нөлдік көрсеткіштерде *п* және *т* үшін төмендегі теңдік орынды болатынын оңай тексеруге болады

, .

Бұл теңдіктердің біріншісі сол бір элементтердің дәрежелерінің өзара орын ауыстырылғандарын көрсетеді.

Егер *а* элементінің барлық дәрежелері группаның әр түрлі элементтері болып табылатын болса, онда *а* шексіз дәрежелі элемент деп аталады Айталық, а элементінің дәрежелерінің арасында дәрежелері тең болатындары болса, мысалы,  , ; бұл жеке жағдайда әр қашанда шекті группа жағдайында орынды. Егер , онда , яғни а элементінің 1 тең оң дәрежесі бар. Айталық,  бірге тең, яғни

1) , ,

2) егер , , то .

болатын  элементінің ең кіші оң дәрежесі болсын.

Бұл жағдайда,  элементі шекті реттің элементі, оның ішінде тек п ретті. Группада  элементінің ретін | a | арқылы белгілейміз. Егер  шекті ретті элемент болса, онда  деп жазамыз, және егер  шексіз ретті элемент болса, онда  деп жазамыз, мұндағы ω – бірінші шексіз сан.

Кез келген группаның бірінші ретті жалғыз ғана элементі бар – бұл 1 элементі болады.п-ші ретті шекті  элементі үшін кері элемент элементі болады. Шынымен,

.

Барлық элементтері шекті ретті болатын кез келген группа периодты деп аталады. 1- ден басқа барлық элементтердің реті шексіз болатын группалар бар, мұндай группаларды бұралымсыз группалар деп атау қабылданған. Сонымен, егер группа шексіз ретті элементтерден және 1- ден басқа шекті ретті элементтері болатын группаны аралас группа деп атайды.

Егер группа өзінің бір  элементінің дәрежелерінен құралатын болса, онда оларды циклдық группа деп атайды. Мұндай жағдайда  элементін *G* группасының жасаушы элементі деп атайды. Барлық циклдық группа абельдік екенін жақсы байқауға болады. Себебі, .

Есептер қарастырайық.

Есеп 1. G группасында *е* – бірлік элемент және  *п*-ші ретті элемент болса, онда  теңдігі тек *k* – *п*- ға бөлінгенген кезде ғана орындалатынын дәлелдеңіз.

Шешуі. ⇐: Айталық,  - *G* группасының *п*- ші ретті элементі және  болсын, онда.

⇒: Айталық,  – *G* группасының *п*- ші ретті элементі болсын және  болсын, онда  болатынын дәлелдейік.

*k-* *п- ға* бөлінбейді деп жориық. Онда , мұндағы  және

. Біз  және  болатынын алдық, ал бұл  элементінің реті *п* – болатынына қайшы келеді. Демек біз қайшылыққа келдік, *k* – *п-ға* бөліну керек.

Есеп 2. *G* группасының кез келген *a, b, c* элементтері үшін

а) *ab* және *ba* элементтерінің реті бірдей;

б) *abс, bсa* және *cab* элементтерінің реті бірдей;

болатынын дәлелдеу керек.

Шешуі. а) Айталық, *ab* – *G* группасының *п-ші*  ретті элементі, ал *ba* –  ретті элементі болсын, яғни .  болатынын көрсетейік.

,

онда

,

,

,

,

,

бірақ, *ba* элементінің реті *k- ға* тең, демек . Осы сияқты талқылай отырып  болатынын аламыз, яғни *k -*  *п-ға* бөлінеді. Бұдан,  болатыны шығады.

б) Айталық, *п* – элементінің реті болсын, *m* – *bca* элементінің реті болсын, *l* – *cab* элементінің реті болсын, онда

,

,

,

;

,

,

.

Демек *n|m*, *n|l*. Осы сияқты талқылай отырып  және , болатынын аламыз, яғни *m|n*, *m|l*, *l|m*, *l|n*, бұдан  болатыны шығады.

Есеп 3. *G* шекті группасының барлық элементтері шекті ретті болатынын дәлелде.

Шешуі . Айталық, *G* шекті группасында шекті ретті g элементі бар болсын: . Онда барлық элементтер  әр түрлі және *G* группасында жатады, яғни , ал бұл *G* группасының шекті екеніне қайшы келеді. Ендеше біздің қарсы жорығанымыз қайшы.

Есеп 4. Кез келген циклдық группаның ішкі группасы циклдық екенін дәлелде.

Шешуі. Айталық,  шекті немесе шексіс *а* жасаушы элементінен тұратын циклдық группа болсын және *Н* – *Е-ге* тең емес *G-дан* алынған ішкі группа болсын.  - *Н* ішкі группасынан алынған ең кіші оң дәрежесі болсын деп жориық. Онда . Егер *Н* ішкі группасында тағы да,  бар десек және *l* – *k-ға* бөлінбейтін болсын. Онда, егер ,  *k* және *l* сандарының ең үлкен ортақ бөлгіші болса, онда болатындай, *u* және *v* сандары табылады және бұдан *Н* ішкі группасы



элементінен тұру керек екені шығады, бірақ  болғандықтан, біз элементін таңдауда қайшылыққа келдік. Ендеше .

Негізгі әдебиеттер:

1. Ешкеев А.Р. Группалар теориясының элементтерінің кейбір жаттығуларының шешімдері мен мысалдары. Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 47 б., 2003.
2. Асенова А.Е., Әсен Е.Қ. Сандар теориясына кіріспе. «Болашақ» баспасы, Қарағанды 2007.
3. Сексенбаев Қ.С., Жетпісов Қ.Ж. Көпмүшеліктер сақинасы. Қарғанды, 2000. 130 б.

Қосымша әдебиеттер:

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. В трёх частях. − М.: МЦНМО, 2009.
2. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. СПб.: Лань, Физматкнига, 2007. 288 с.
3. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. Лань, 2009.

**Дәріс №4**

**Тақырыбы: Группаларды факторизациялау**

**Дәріс жоспары:**

1. Іргелес кластар
2. Нормаль ішкі группа
3. Факторгруппа

**Анықтама.** Айталық, мультипликативтік жазылымымен берілген  группасы және оның  ішкі группасы берілсін. Енді  кез келген элементін алып, мынадай жиын құралық: . Бұл жиын  элементінің  ішкі группасы бойынша *сол жақты іргелес класс* деп аталады. Сол жақты іргелес кластар жұп-жұбымен қиылыспайды, ал олардың бірігуі  группасының негізгі жиынына тең, кластың бірі  ішкі группасының өзі болады. Сондықтан іргелес кластар  группасының негізгі жиынын бөледі. Екі *х* және *у* элементтерінің бір сол жақты іргелес класта жату критериясы (қажетті және жеткілікті шарты) болып



табылады. Бұл шартты есте сақтау жеңіл: группаның элементтері бір сол жақ класқа тиісті болады, егер олардың сол жақ бөлгіндісі ішкі группаға тиісті болса.

Тура осы сияқты оң жақ іргелес класты құрамыз: . Сол жақ іргелес класс үшін айтылған сөйлемдер оң жақ іргелес класс үшін де орынды. Екі *х* және *у* элементтерінің бір оң жақты іргелес класта жату критериясы (қажетті және жеткілікті шарты) болып



табылады. Группаның элементтері бір оң жақ класқа тиісті болады, егер олардың оң жақ бөліндісі ішкі группаға тиісті болса.

Ішкі группа мен кез келген ірлгелес класс (сол жақты, сондай-ақ оң жақты) арасында биекция орынды.

**Анықтама.** Егер  группасы шекті болса, онда іргелес кластардың саны  группасындағы  ішкі группасының индексі деп аталады.

 группасының ретін  ішкі группасының ретіне бөлгендегі бөліндінің мәні индексті береді. Оны  немесе  түрінде белгілейді.

**Анықтама.** Егер сол жақ іргелес класс оң жақ іргелес класпен сәйкес келсе, онда  ішкі группасы *нормаль (инвариантты) ішкі группа* деп аталады. Көп жағдайда оны  группасының *нормальдық бөлгіші* деп атайды.

Практика тұрғысында оны тексеру қиын себебі ішкі группаның индексі үлкен (тіпті шексіз) болуы мүмкін. Сондықтан эквивалент тұжырымдамалар қолданамыз:

 үшін  немесе  үшін .

Комммутативтік (абельдік) группада барлық ішкі группалар нормальдық бөлгіш болады.

Ішкі группаның нормальдық бөлгіш болуыны жеткілікті (қажеттілік емес!) шарты – оның индексі 2 болуы қажет.

Енді екі *x* және *y* элементтерінің  нормальдық бөлгіші бойынша бір ғана іргелес класқа тиісті болуын мына түрде жазуға болады:

 және ,

сонымен қатар бұл шарттың кез келген біреуі екіншісінің салдары болады.

**Анықтама.**  группасы мен  нормальдық ішкі группа арқылы жаңа группаны құруға болады. Ол  группасының  ішкі группасы бойынша *факторгруппасы* деп аталады. Оны  арқылы белгілейді.

Факторгруппаның элементтері іргелес кластар болады.  факторгруппасындағы амалды  группасындағы амал сияқты белгілейді және атайды.

Факторгруппадағы амал өкілдер арқылы қарастырамыз:  екі кластардың көбейтіндісін алу үшін осы кластардан бір бірден элемент-өкілін алу керек, яғни  және . Енді оларды  группасында көбейтеміз.

Айталық, элементтердің көбейтіндісі кейбір  класына тиісті болсын: . Онда бұл класс  *кластарының көбейтіндісі* болады.

Енді осы кезде мына түрдегі заңды сұрақ туындайды: егер осы кластардың басқа  және  элемент-өкілдерін алып, оларды өзара көбейтсек, онда көбейтінді қай класта жатады?

Жауабы: Егер ішкі группа нормальдық бөлгіш болса, онда нәтиже таңдап алынған өкілдерге байланысты болмайды: , алайда .

Кез келген  группасындағы  және  ішкі группалары нормальдық бөлгіш болады.

Факторгруппа және іргелес кластардың нормальдық бөлгіші гомоморфизм ұғымымен тығыз байланыста. Егер  – группа,  – нормальдық бөлгіш және  – факторгруппа болса, онда  гомоморфизм бар және осы гомоморфизмнің ядросы  нормальдық бөлгіші болып табылады. Егер  фактор группасы басқа бір  группасына изоморфты болса, онда  гомоморфизмі бар және осы гомоморфизмің ядросы да  нормальдық бөлгіші болады.

Енді мысал ретіндн нақты есептер қарастыралық.

Есеп 1.  ішкі группасы бойынша  бүтін сандардың аддитивті группасының факторгруппасын құру керек.

Ескерту.  ішкі группасының толық жазылымы мына түрде: . Тек группадағы + амалы ішкі группаға да қатысты болғандықтан, қысқаша жазу ретінде  деп жазуға болады. Әріректе осы түрдегі жазудықолдана береміз.

Шешуі: Үш іргелес класс бар, олар: , , . Мұнда «+» амалын қолданамыз, себебі берілген группа аддитивті еді.

,

,

.

Енді екі элементтің бір класқа тиісті болу тұжырымдамасын қолданып көрелік. Оның түрін сәл өзгерту керек, себебі группада қосу амалы берілген (көбейту амалы емес). Сонда тұжырымдама мына түрде болады: екі бүтін сан тек бір ғана іргелес класқа тиісті болады, егер олардың айырымы 3 санының еселігі болса. Бұл шарт 3 кластың үшеуінде де орындалады.

Іргелес кластар фактор группаның негізгі жиынын құрайды, факторгруппадағы амалды «+» деп белгілейміз, алайды бұл амал  бүтін сандар группасындағы «кәдімгі» қосудан сәл өзгеше. Іргелес кластарды «қосу» амалы олардың өкілдері арұылы жүзеге асырылады. Мысалға  іргелес кластарының қосындысын табайық. Ол үшін  іргелес класындағы кез келген өкілді алуға болады, мысалы, -2 санын, ал  іргелес класынан 5 санын алайық. Сонда -2+5=3 қосындының мәні  класына тиісті болады. Егер қосылғыш-кластардан басқа өкілдерді алып, сандарды қоссақ, ол сандар да  класына тиісті болады. Осы әдіспен басқа да кластарды алып, мына түрдегі кесте алуға болады (3.1-кесте).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| + |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

3.1-кесте.  факторгруппасындағы кластарды қосу кестесі

Енді іргелес кластардан қарапайым өкілдерді таңдап алайық:  іргелес класынан 0,  -ден 1,  -ден 2. Егер 0,1,2 ге сандар ретінде емес, модулі 3 бойынша қалындылар ретінде қарасақ, онда . Бұдан изморфты группалардың элементтерінің арасындағы сәйкестік мына түрде болады: ,  және .

 группасы мен қалындылар арасында  гомоморфизм орынды болады, мұнда  – -ті 3-ке бөлгендегі қалдық. Оны түрінде жазуға болады. Бөлгіш-ішкі группа осы гомоморфизмнің ядросы: .

Есеп 2.  ішкі группасы бойынша нақты сандардың  аддитивті группасының факторгруппасын құрыңыз.

Шешуі: Бұл мысалда іргелес кластардың жиыны шексіз және саналымсыз.  алайық, оған  іргелес класы сәйкес келеді. -ті бүтін және бөлшек бөлігінің қосынлысы түрінде жазалық: , сонда  ( қосылғышы  шексіз бүтін сандарда «батып кетеді»). Онда жоғарыда айтылған тұжырымдама мына түрде болады: екі сан тек бір ғана іргелес класқа тиісті болады, егер олардың айырым бүтін сан болса.  кластарының өосындысы, ал нақтырақ жазсақ: , себебі  қосындысы 1-ден үлкен болуы мүмкін.  қосындысының орнына «1 модулі бойынша нақты сандардың қосындысын» немесе қалындылардың аддитивті группасындағы амал сияқты қолдануға болады. Сонымен,  факторгруппасындағы кластарды қосуды  формуласымен сипаттаймыз.

Кез келген  іргелес класының қарапайым өкілі ретінде  таңдаймыз. Қарапайым өкілдердің жиыны  группасы болады, бұл группа  факторгруппасына изоморфты.

Бұл группаларға тағы бір группа изоморфты: модулі 1-ге тең комплекс сандардың мультипликативтік группасы, яғни , мұндағы . Сәйкестік ,  формуласымен беріледі.

 гомоморфизмі  группасында  (бөлшек бөлігі) формуласымен беріледі, ал гомоморфизмнің ядросы – бөлшек бөлігі нөлге тең сандар, яғни бүтін сандар.

Есеп 1. Лагранж теоремасына кері тұжырым орындалмайды.

Шешуі. Лагранж теоремасына сәйкес, шекті группаның ішкі группасының реті группа ретінің бөлгіші болып табылады. Бірақ, кері тұжырымдасақ, егер бізде *п ретті* *G* группасы болса және егер *п* *т-ге* бөлінетін болса, онда *G* группасы *т*  ретті ішкі группадан тұрмайды. Мысалы, келесі *12-ші* ретті алмастырулар класы *6-ші* ретті ішкі группаларынан тұрмайды:

Әдетте, бұл группа *2-ші, 3-ші* және *4-ші* ретті ішкі группаларынан тұрады.

Есеп 2. *G* группасының кез келген нормальдық бөлгіштерінің қиылысуы да бұл группаның нормальдық бөлгіші болатынын дәлелде.

Шешуі . Шынында да, *G* группасының нормальдық бөлгіштері *А* және *В* болса, онда белгілі болғандай,  қиылысуы *G* группасының ішкі группасы болады. Айталық,  ішкі группасының кез келген элементі *с* болсын, *G* группасының кез келген элементі *х* болсын. *А* және *В* нормальдық бөлгіштерінде *с* элементі болғандықтан  элементі *А* және *В* нормальдық бөлгіштерінде жатуы керек. Ендеше,  элементі  қиылысуында жатады.

Есеп 3. *G* абельдік группаның кез келген  фактор-группасының өзі де абельдік болып табылатынын дәлелдеу керек.

Шешуі. *G* абелдік группа болғандықтан  , ал бұдан  орындалатыны шығады, яғни кез келген  фактор-группа абелдік болып табылады.

Есеп 4. *G* циклдық группаның кез келген  фактор-группасының өзі де циклдық екенін дәлелдеу керек.

Шешуі. Шынында да, егер *G* циклдық группасы *g* элементінен жасалса,  және егер *хН* кез келген аралас класы берілсе, онда  болатындай *k* бүтін саны табылады. Сондықтан  .

Есеп 5. Екі индексті кез келген ішкі группа нормальдық бөлгіш болып табылатынын дәлелде.

Шешуі .Арарлас кластарының жіктелуінің біреуі болып ішкі группаның өзі болып табылатындықтан бұл ішкі группа бойынша группаның жіктелуінің екіуі де беттеседі.

Есеп 6. *G* группасының барлық элементтерімен әрбіреуімен орынауыстырылған *G* группасының барлық элементтерінің  жиыны нормальдық бөлгіш (*G* группасының центрі) болатынын дәлелде, яғни .

Шешуі. Айталық,  - кез келген  үшін және әрбір  үшін  орындалатындай болсын.  орындалатынын көрсетейік.

 ⇔ 1) ;

2)  , яғни .

1. Айталық,  болсын, онда

,

яғни  .

Айталық, , онда *G- да*   табылады. Оның  - *да* жататынын көрсетейік.  алайық, онда , , ,   ендеше, . Демек, .

1.  болатынын көрсетейік, яғни барлық  үшін  . Шынында да, әрбір  үшін ,.

1) және 2) – ден  орындалатыны шығады.

Есеп 35. Айталық, *G* – абелдік группа болсын, . Төмендегіні дәлелде:

а) *Т* – *G - дің* ішкі группасы;

б)  – бұралымсыз группа.

Шешуі. а) Алдымен, *Т – да* *Т – дан* алынған кез келген екі элементтің көбейтіндісі болатынын тексерейік. Айталық, , онда  және  ⇒ :  және : .  деп алайық, онда , яғни  .

*Т* өзінің барлық *t*  элементімен қоса оның  тұратынын көрсетейік.

Айталық, болсын, онда  ⇒ : , онда  ⇒ , … , ;  ⇒ , яғни  ⇒ . Ендеше, .

*G* – абелдік болғандықтан , сондықтан  қарастыруға болады.

б) – бұралымды группа деп жориық, онда  , яғни : . Айталық,  ⇒ : .  - та *е* рөлін *Т*  атқарады, онда  және аралас кластардың көбейтіндісінің ассоциативтілігі бойынша  ⇒  ⇒ :, онда  ⇒ , бірақ  . Біз қайшылыққа келдік, ендеше  – бұралымсыз группа.

Негізгі әдебиеттер:

1. Ешкеев А.Р. Группалар теориясының элементтерінің кейбір жаттығуларының шешімдері мен мысалдары. Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 47 б., 2003.
2. Асенова А.Е., Әсен Е.Қ. Сандар теориясына кіріспе. «Болашақ» баспасы, Қарағанды 2007.
3. Сексенбаев Қ.С., Жетпісов Қ.Ж. Көпмүшеліктер сақинасы. Қарғанды, 2000. 130 б.

Қосымша әдебиеттер:

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. В трёх частях. − М.: МЦНМО, 2009.
2. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. СПб.: Лань, Физматкнига, 2007. 288 с.
3. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. Лань, 2009.

**Дәріс №5**

**Тақырыбы: Сақина және дене**

**Дәріс жоспары:**

1. Сақина.
2. Коммутативтік сақина.
3. Дәрежелік көрсеткіштер мен еселіктер.
4. Дене ұғымы .

**Анықтама.** **Екі орынды амалы бар жүйе** деп , , … элементтерінен тұратын кез келген жиынды айтамыз, егер бұл жиынның кез келген a, b, … элементтері үшін қосындысы, көбейтінді амалы анықталып және олар сол жиынның элементі болса.

**Анықтама.** Екі орынды амалы бар жиынды **сақина** деп атаймыз, егер осы жүйенің элементтеріне қолданылатын операциялар келесі заңдарға бағынса:

I Қосу заңы:

а) ассоциативтік заң:

б) коммутативтік заң:

в) кез келгенa, bүшін шешімділік теңдеуі

ІІ Көбейту заңы

а) ассоциативтік заңы:

III Дистрибутивтілік заңы:

а)

б)

Ескерту: Егер көбейту үшін коммутативтік заңы орындалса:

ІІ б)

онда **коммутативтік сақина** деп аталады. Біз енді коммутативтік сақиналармен жұмыс жасайтын болатынбыз.

**Анықтама.** сақинасының ішкі жиынын **ішкі сақина** дейміз, егер

және , яғни, – аддитивті группаның ішкі группасы және сақинаның мультипликативті жартылай группасы ішкі группа болса.

Мысалы, а) барлық бүтін сақинасында, барлық рационал сандар сақинасында кәдімгі 1 бірлік элемент болады. Сондықтан олар бірлік элементті сақиналар;

ә)  сақинасында  элементті бірлік элемент болады. Сондықтан  сақинасы бірлік элементті сақина.

Бірлік элементті K сақинасының  элементі үшін  теңдігі орындалатын К сақинасынан  элементі табылса, онда  элементін  элементіне кері элемент деп атаймыз, мұнда  элементі К сақинасының бірлік элементі. Сонда  элементін қайтымды элемент деп атайды.

Мысалы, а)  сақинасында 1 және -1 элементтері қайтымды элементтер болады;

ә) Барлық Q рационал сандар нөлден өзгеше элементтердің бәрі де қайтарымды элементтер болады;

б)  сақинасындағы анықтауышы  болатын  матрицасының бәрі де қайтарымды матрицалар болады.

**Қосу заңы.** 1а), б), в) заңдарымен қосу амалы бойынша сақина абельдік группа құрайды. Яғни, біз абельдік группа үшін дәлелденген теореманы сақинаға да қолданамыз: Осылайша, абельдік группаға дәлелденген теоремалар сақина үшін де дұрыс болады: келесі теңдік орындалатындай кез келген үшін , яғни бір тек бір ғана нөлдік элемент табылады. Сонымен қатар мына қасиетті қанағаттандыратын

кез келген элементі үшін қарама қарсы элементі табылады. Осылайша теңдеуі шешімді ғана емес, сонымен қатар бірмәнді шешімді болады; оның жалғыз шешімі оны біз түрінде бейнелесек, онда, кез келген айырманы қосынды түрінде жазуға болады, сондықтан айырма үшін орын ауыстыру ережесі орындалады: , яғни, және

**Ассоциативті заңы.** Көбейту үшін ассоциативті заң негізінде күрделі көбейтінділерді де анықтауға болады:

және олардың негізгі қасиеттерін дәлелдеуге болады:

Дәл осы сияқты қосындыны анықтауға болады:

және олардың негізгі қасиеттерін дәлелдеуге болады:

1б) бойынша қосындыны кез келген қосындылар түрінде қоюға болады, сонымен қатар коммутативтік сақиналар және көбейтінді үшін де дұрыс болады.

**Дистрибутивтілік заңы**. Егер көбейту амалы үшін коммутативті заң орынды болса, онда ІІІб) заңы ІІІа) заңының салдары болады.

ІІІа) заңынан индукция көмегімен n бойынша мына өрнекті аламыз:

дәл осы сияқты ІІІб) заңынан:

Осы екі заң қосындылардың көбейту ережесін береді:

Дистрибутивті заңы сонымен қатар азайту үшін де орындалады, мысалы:

оны мынадан айқын көруге болады:

Дербес жағдайда,

немесе: көбейтінді нөлге тең болады, егер оның бір көбейткіштерінің бірі нөлге тең болса. Бұл сөйлем әрқашанда дұрыс болмауы мүмкін. Себебі, келесі түрдегі теңдеуде болуы мүмкін:

Бұл жағдайда және нөлдің бөлгіштері, яғни - нөлдің сол бөлгіші, ал -нөлдің оң бөлгіші болады. (Коммутативті сақинада бұл екі ұғым да сәйкес келеді). Нөлдің өзін де нөлдің бөлгіші ретінде қарастырамыз. Сондықтан элементі нөлдің сол бөлгіші деп аталады, егер , теңдігін қанағаттандыратын элемент табылса.

Егер сақинада нөлдің өзінен басқа бөлгіштері болмаса, яғни егер , яғни немесе болса,онда сақинаның нөлдік бөлгіштері жоқ деп айтамыз. Егер сақина коммутативті деп айтылса, онда ол бүтін сақина болады.

Мысалдар:

1. Бүтін сандар сақинасы, рационал сандар сақинасы нөлдік бөлгіштері жоқ сақинаның мысалдары болады. (-1,1) интервалындағы үзіліссіз функцияның сақинасында нөлдік бөлгіштері бар болады, егер

онда

1. бүтін сандар қосары

амалдарымен нөлдік бөлгіштері бар сақина құрайды.

теңдеуін - ға қысқартуға болады, егер нөлдің сол бөлгіші болмаса (дербес жағдайда, бүтін сақинада кез келген элементіне қысқартуға болады).



**Бірлік элемент**. Егер сақинада сол жақты бірлік элементі болса: барлық үшін , және бір уақытта оң жақты бірлік элемент болса: барлық үшін ,онда бұл екі элемент тең болуы керек, яғни



Дәл сол сияқты кез келген оң жақты бірлік элемент -ге тең және сол жақты элемент те -ге тең. Осы шарттарға сәйкес элементі *жай бірлік элемент* немесе *бірлік* деп айтаймыз және сақинада ол бірлік элементі бар сақина немесе бірлік сақина деп айтамыз. Көп жағдайда бірлік элементі 1 символымен белгіленеді.

Мысалы,1) Бүтін сандар бірлік сақинаны құрайды, ал жұп сандар бірлігі жоқ сақина құрайды. Сонымен қатар бірнеше оң бірлік элементі бар, бірақ сол бірлік элементі жоқ сақина табылады немесе керісінше.

2)  жиыны, яғни  сақинасындағы 2 реттегі матрицалар жиыны матрицаларды қосу және көбейту амалдарына қарағанда сақина болдады. Сонда



болады. Олай болса,  және  элементтері  сақинасындағы нөлдің бөлгіштері болады.

**Анықтама.** Бірі бар, ал нөлдің бөлгіштері жоқ коммутативтік сақина тұтас сақина деп аталады.

**Анықтама.** Өзінен алынған кез келген екі сан үшін қосу, азайту және көбейту амалдары орындалатын кез келген сандар жүйесін сандық сақина деп атаймыз.

Мысалы, а) тек қана 0 ден тұратын жиынды қарастырайық, ол сандық сақинаны құрайды, себебі

0+0=0, 0-0=0, .

Бұл нөлдік сақина болады.

ә) Барлық жұп сандардың жиынын қарастырайық. Екі санның қосындысы, айырмасы, көбейтіндісі жұп болады. Сондықтан жұп сандар жиыны сандық сақина болады. Керісінше, барлық тақ сандар жиыны сандық сақина болмайды, себебі екі тақ санның қосындысы жұп сан болады.

б)  түрдегі сандардың жиынтығын қарастырайық, мұндағы  – кез келген бүтін сан. Мұндай жиынтық сандық сақинаны құрайды, себебі бұл түрдегі кез келген екі санды қоссақ, азайтсақ, көбейтсек, сол түрдегі сан шығады:

;



мұнда , , ,  – бүтін.

**Кері элемент.** Егер сақинаның кез келген элементі және оның бірлік элементі болса, онда оны сол кері элемент деп айтамыз, егер-ның мынадай қасиеті бар болса:

яғни, элементін айтамыз.

Ал оң кері элементі деп қасиеті бар элементін айтамыз.

Егер де элементінде сол кері және оң кері элементтері бар болса, онда нәтижесінде қайтадан бірдей болады, өйткені

онда әрбір оң элемент және де әрбір сол элемент элементі үшін жоғарыда көрсетілген элементке тең болады. Бұл жағдайда: элементінің **кері элементі** бар деп айтамыз, ал кері элементтің өзі арқылы белгілейміз.

**Дәрежелік көрсеткіштер мен еселіктер.** Сақинада ( - натурал сан) дәрежесі анықталады және мынадай қасиеттері бар:

(5.1)

онымен қатар соңғы теңдік коммутативтік сақина үшін дұрыс болады.

Егер сақинада бірлік элементі мен -ның кері элементі болса, онда нөлдік және кері дәреже енгізуге болады; осы үшін де (5.1) теңдігі дұрыс болады.

Дәл осылай аддитивті группа үшін – жіктелетін) еселігін келесідей түрде жазуға болады, яғни:

(5.2)

Дәрежедегі жағдайы сияқты теңдігін қоямыз, онда (2.10.2) теңдігі барлық және (оң, кері және нөлді) бүтін сандары үшін орынды.

Сонымен қатар өрнегін сақинаның екі элементінің көбейтіндісі ретінде қарастыруға болады. Егер сақинада бірлік элементі болса, онда кәдімгі көбейтінді деп қарастыруға болады, дәлірек айтсақ:

**Дене**.

**Анықтама.** Сақинаны дене деп атайды, егер:

а) нөлден өзгеше бір элементі болса;

б) болғанда

(5.3)

теңдеуі шешімді болса.

Егер сақина коммутативті болса, онда ол өріс немесе рационал сақина деп атаймыз.

в) сол жақты бірлік элементінің бар болуы. Шынында да, кез келген үшін шешімді; оның шешімін арқылы белгілейік. Кез келген үшін теңдеуі шешімді; бұдан шығатыны,

Дәл осылай оң бірлік элементі және жалпы бірлік элементі үшін орындалады.

г) Кез келген үшін сол және оң кері элементінің бар болуы және жалпы кері элементі үшін орынды.

Денеде нөлдің бөлгіштері жоқ, өйткені үшін теңдігін -ге көбейту арқылы теңдігін аламыз.

(5.3) теңдеуінің шешімді екені анық, өйткені екі шешімінің бар болуынан, бірінші теңдеуден шығады және кері элементіне көбейту арқылы теңдігін аламыз.

(5.3) теңдеуінің шешімдері тең

Коммутативті заң бойынша , сондықтан түрінде жазамыз.

Нөлден өзгеше кез келген дененің элементтері көбейту амалына қатысты группа - дененің мультипликативті группасын құрайды.

Мысалдар.

1. Рационал сандар, нақты сандар және комплекс сандар өріс құрайды.

2. 0 және 1 элементінен тұратын өріс келесі түрде құралады. Бұл элементтер 0 және 1сандары сияқты көбейтіледі. Қосуға қатысты 0 нөль элементі - нөлдік элементі болады:

0+0=0; 0+1=1; 1+0=1

Әрі қарай 1+1=0 деп ұйғарайық. Екі элеметі бар циклдік группаның композициясына орындалатын қосу ережесі сияқты орындалады, демек қосу заңы орындалады. Көбейту заңыда 0 және 1 сандарына орындалатын көбейту амалы сияқты орындалады. Дистрибутивтіліктің бірінші заңы орындалады: егер берілген теңдікте нөль болса, онда ол тривиалды. Сондықтан келесі жағдайды тексерсек жеткілікті:



Бұл теңдік 0=0 теңдігіне келтірілетіні ақиқат. Сонымен, әрбір *а* үшін теңдігі шешімді: шешімі болады.

Негізгі әдебиеттер:

1. Ешкеев А.Р. Группалар теориясының элементтерінің кейбір жаттығуларының шешімдері мен мысалдары. Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 47 б., 2003.
2. Асенова А.Е., Әсен Е.Қ. Сандар теориясына кіріспе. «Болашақ» баспасы, Қарағанды 2007.
3. Сексенбаев Қ.С., Жетпісов Қ.Ж. Көпмүшеліктер сақинасы. Қарғанды, 2000. 130 б.

Қосымша әдебиеттер:

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. В трёх частях. − М.: МЦНМО, 2009.
2. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. СПб.: Лань, Физматкнига, 2007. 288 с.
3. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. Лань, 2009.

**Дәріс №6**

**Тақырыбы: Гомоморфизмдер мен изоморфизмдер**

**Дәріс жоспары:**

1. Сақинадағы гомоморфизм
2. Изоморфизм
3. Бөлінділерді құру

**Анықтама.** мен екі еселі компазиция жүйесі болсын. мен жиындарының бейнесі ***гомоморфизм*** деп атаймыз, егер және қатыстарында бейнелері сақталып, яғни қосындысы қосындысына, ал көбейтіндісі көбейтіндісіне ауысса. жиынындағы жиынының бейнесі болатын жиыны, бұл жағдайда жиынының ***гомоморфты бейнесі*** деп атаймыз. Егер бейнелеу өзара бірмәнді болса, онда бейнелеуді ***изоморфизм*** деп атаймыз және былай жазамыз: . - қатынасы рефлексивті және транзитивті, және де изоморфизмге кері бейнелеу қайта изоморфизм болғандықтан, бұл қатынас симметриялы болады.



**Теорема.** *Сақинаның гомоморфты бейнесі сақина болады.*

**Дәлелдеуі**. -сақина, -екі орынды амалы бар жүйе болсын, ал - -дан -дағы гомоморфты бейнесі. Біз -қайтадан сақина болатынын көрсетейік.

--даналынған кез келген үш элемент болсын; есептеудің қандай да бір ережесімен дәлелдейміз, мысалы, , сол үшін элементтерінің түп бейнелерін деп белгілейміз. - сақина болғандықтан, , ал гомоморфты бейнелеу бойынша теңдігі орындалады. Ассоциативті, коммутативті және дистрибутивті заңдары үшін де дәл осындай дәлелдеулер жүргізіледі. теңдеуінің шешімді екенін дәлелдеу үшін - ның түпбейнелерін табу керек және теңдеуін шешу керек, осыдан гомоморфтық бойынша алынады.

**Теорема.** Нөлге және элементіне қарама – қарсы элементіне гомоморфизм бойынша - дан 0 және қарама – қарсы элемент сәйкес келеді. Егер бірлік элементке ие болса, онда оған -ның бірлік элементі сәйкес келеді.

**Дәлелдеуі**. Егер -бүтін сақина болса, онда - ның бүтін болуы міндетті емес. - ның бүтін болуы мүмкін, егер бүтін болмаса. Бірақ егер бейнелеу изоморфты болса, онда сақинасының барлық алгебралық қасиеттері сақинасына көшеді. Осыдан мына тұжырымдар шығады:

Бүтін сақинаның изоморфты бейнесі (сәйкесінше өрістің) сақина болып табылады (сәйкесінше өріс).

Бұл жерде маңызды теореманы тұжырымдағанымыз дұрыс:

Ортақ элементтері жоқ және екі сақина болсын. жиыны - ға изоморфты болатын ішкі жиынын құрасын. Онда - ны құрайтын сақинасы табылады.

Дәлелдеуі. - дан элементтерін алып тастайық және оларды изоморфизм кезіндегі сақинасының элементтеріне сәйкес келетін элементтерімен алмастырамыз. Алмастырылған және қалған элементтердің қосындысын және көбейтіндісін - дағы берілген элементтер үшін изоморфтық сәйкестік кезінде алынады. (Мысалы, егер элементтерді алмастыру алдында теңдігі орындалады, сосын - ға ауысады, ал және өзгеріссіз қалады, онда біз теңдігін аламыз.) Осылай - дан - ны құрайтын сақинасы туындайды.

**Бөлінділерді құру**. Егер коммутативті сақинаны кейбір денесіне енгізсек, онда - ның ішіндегі сақинасының элементтерінен дербес жағдайын құруға болады. Яғни,  теңдігі орындалады, егер оң және сол жағын –ге көбейтсек.



Олар үшін келесі ережелер орынды:

теңдігі орындалады сонда тек сонда, болғанда:

(6.1)

.

Дәлелдеу үшін екі бөлігін де - ға көбейткенде бір нәтиже беретініне көз жеткізуіміз керек.

Сонымен қатар, бөліндісі коммутативті сақинасының бөлінділер өрісі деп аталатын кейбір өрісін құрайды. (6.1) ережеден бөлшектердің салыстырылуы, көбейтілуі, қосылуы қарастырылады және олар сақинаның элементтерімен жүргізілетін операциялар арқылы анықталады, яғни өрісінің бөлінділерінің құрылуы сақинасының құрылуымен толық анықталады немесе: изоморфты сақинаның бөлінділер өрісі изоморфты. Дербес жағдайда, бір сақинаның кез келген екі бөлінділер өрісі изоморфты болады немесе: бөлінділер өрісі бірмәнді изоморфизмге дейінгі дәлдікпен сақинасында анықталады, егер жалпы берілген сақина бөлінділер өрісіне ие болса.

Енді мынадай сұрақтар туындайды: қандай коммутативті сақиналар бөлінділер өрісіне ие болады? Немесе қандай коммутативті сақиналар өріске батырылған болуы мүмкін?

сақинасы денеге батырылған болуы үшін, - да нөлдік бөлгіштер болуы керек, өйткені денеде нөлдік бөлгіштер болмайды. Коммутативті жағдайда бұл шарт жеткілікті: әрбір бүтін сақинаны кейбір өрістерге батыруға болады.

Дәлелдеуі. тек нөлдік элементтерден тұратын маңызды жағдайды ескеруіміз керек. , мұндағы барлық жұп элементтер жиынын қарастырайық. Сосын осы жұптарға бөлшегімен салыстырамыз.

Егер болса, онда қоямыз. Осылай анықталған қатынасы рефлексифті және симметриялы болып табылады, сонымен қатар ол транзитивті болады, өйткені



қатынастарынан

шығады, сондықтан

Яғни, және сақинасының коммутативтілігінен:

қатынасы эквиваленттіліктің барлық қасиеттеріне ие. Эквиваленттік жұптар бір классқа түсетіндей жұбын класстарға бөлінуін анықтайды. жұбы тиісті классын символымен белгілейді. Осы анықтаманың салдары ретіндегі теңдігі орындалады дейміз сонда тек сонда, егер , яғни болса.



Бұл анықтаулар дұрыс, себебі, біріншіден, егер және болса, онда және

өрнегінің мәні болады; екіншіден, оң жақ бөлігі және жұптары және класстарының таңдауына тәуелді емес. Шынында да, формуласындағы мен - ны пен - қа ауыстырайық, мұнда

болса, онда

болады. Осыдан

шығады. Дәл сол сияқты:

Сәйкес келетін теңдік - ны - қа ауыстырғанда, мұндағы пайда болады.

Пайда болған конструкция өрістің барлық қасиеттеріне ие болатынын қиындықсыз көруге болады. Мысалы, қосудың ассоциативті заңы бойынша былай болады:

қалған заңдар осыған ұқсас орындалады.

Құрылған дене коммутативті екені анық. Оның сақинадан құрылғанын тағайындау үшін, сақинаның элементтерін кейбір бөлшектермен теңестіру керек. Ол былай орындалады.

элементіне барлық бөлшектерін сәйкес қоямыз, мұндағы . болғандықтан, мына бөлшектер өзара тең:

Яғни, әр элементіне тек бір бөлшек сәйкес келеді. Сонымен қатар әр түрлі элементтеріне әр түрлі бөлшектер сәйкес қойылады, себебі

теңдіктен шығады, немесе , болғандықтан, қысқарту жүргізу арқылы аламыз.

Сонымен, сақинасының элементтеріне бірмәнді түрде толық анықталған бөлшектерді сәйкес қойылды.

Егер сақинасында және болса, онда кез келген және үшін

осыған сәйкес

орындалады.

бөлшектері сақинаның элементтері сияқты қосылады және көбейтіледі, сондықтан олар изоморфты сақинаның жүйесін құрайды. Айтылғандар бойынша бөлшегін оған сәйкес элеметіне алмастыра аламыз. Солай өзімізге қажет нәтижені аламыз: пайда болған өріс сақинаны құрайды.

Берілген бүтін сақинасын құрайтын өрістің бар екеніне мысал келтірейік.

Бөлінділерді құру берілген сақинадан басқа сақинаны құрудың ең бірінші құралы болып табылады (бұл жағдайда өріс). Мысалы, бүтін сандар сақинасынан рационал сандар өрісі құралады.

Негізгі әдебиеттер:

1. Ешкеев А.Р. Группалар теориясының элементтерінің кейбір жаттығуларының шешімдері мен мысалдары. Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 47 б., 2003.
2. Асенова А.Е., Әсен Е.Қ. Сандар теориясына кіріспе. «Болашақ» баспасы, Қарағанды 2007.
3. Сексенбаев Қ.С., Жетпісов Қ.Ж. Көпмүшеліктер сақинасы. Қарғанды, 2000. 130 б.

Қосымша әдебиеттер:

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. В трёх частях. − М.: МЦНМО, 2009.
2. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. СПб.: Лань, Физматкнига, 2007. 288 с.
3. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. Лань, 2009.

**Дәріс №7**

Тақырыбы: Идеалдар. Қалындылар классының сақинасы

**Дәріс жоспары:**

1. Идеал ұғымы.
2. Қалындылар класы.
3. Салыстырулар ішіндегі амалдар.
4. Бөлінгіштік. Жай идеалдар.

– кез келген сақина болсын.

Осы сақинаны қандай да бір ішкі жиыны тағы да сақина (сақинаның ішкі сақинасы) болуы үшін келесі шарттардың орындалуы қажетті және жеткілікті:

1. бұл ішкі жиын сақинаның аддитивті группасының ішкі группасы болуы керек. Басқаша айтқанда, кез келген және – дан басқа олармен қоса айырмасы да сол ішкі жиынға тиісті болуы керек ( модульдер қасиеті);
2. кез келген және – дан басқа олармен қоса көбейтіндісі де сол ішкі жиынға тиісті болуы керек.

Ішкі сақиналардың ішінде **идеалдар** деп аталатын ішкі группа ерекше роль атқарады; группалар теориясындағы нормальді ішкі группалар қандай роль атқарса, олар да сондай роль атқарады.

**Анықтама.**  сақинаның бос емес ішкі жиынын идеал, нақтырақ айтсақ, **оң идеал** деп атаймыз, егер:

1. және ( модульдер қасиеті);
2. сақинадан алынған кез келген және үшін .

Яғни: модулі өзінің әр элементі – мен бірге барлық «оң еселігін» құрау керек.

**Анықтама.** Егер кез келген үшін болса, онда модульді **сол идеал** деп атайды.

**Анықтама.**  ішкі жиынын **екі жақты идеал** деп атайды, егер ол бір уақытта оң және сол идеал болса.

Коммутативті сақина үшін барлық үш ұғым сәйкес келеді, сондықтан тек идеалдар туралы айтылады. Идеалдар жолдық готикалық әріптермен белгіленеді.

Коммутативті сақинадағы идеалдар мысалдары:

1. Бір нөлден тұратын нөлдік идеал.
2. Құрамында сақинаның барлық элементтері бар бірлік идеалы.
3. (, – бүтін сан) түріндегі барлық мүмкін болатын өрнектерден тұратын және элементімен туындалған () идеалы.

Онда, бұл жиын да идеал болып табылады, көз жеткізу оңай: осындай екі өрнектің айырмасы да осындай түрде болады, ал кез келген еселігі мынадай түрде болады: , яғни немесе түрде болады.

( идеалы элементінен тұратын идеалдардың ішіндегі кішісі болып табылады, өйткені әрбір осындай идеал барлық жағдайда бүкіл еселіктерін құрау керек және болғандықтан барлық қосынды түрде болады. Сонымен қатар ( идеалы элементінен құралған барлық идеалдардың қиылысуы ретінде анықталады.

Егер сақинасы бірлікке ие болса, онда үшін түрдегі жазуды қолдануға болады. Бұл жағдайда ( идеалы жай еселіктерінен тұрады. Мысалы, 2) идеалы бүтін сандар сақинасында барлық жұп сандардан құралады.

**Анықтама.**  бір элементін тудыратын идеал **басты идеал** деп аталады.

(0) идеалы, яғни нөлдік идеал әрдайым басты болады. Егер – бірлігі бар сақина болса, онда ) болады, яғни бірлік идеал да басты болып табылады. Коммутативті емес сақинада сол және оң басты идеалдарды ажырату қажет. элементінен шыққан оң идеал түрдегі әртүрлі қосындылардан құралады.

1. Дәл солай бірнеше элементтерінен шыққан сол идеалды түрдегі қосындылардың жиынтығы немесе сақинаның элементтерінен құралған сол идеалдардың қиылысуы ретінде анықтауға болады. Бұл идеал түрінде белгіленеді, сонымен қатар элементтері осы идеалдың базисін құрайды.
2. Осы сияқты (М) шекті жиыннан шыққан М сол идеалын анықтауға болады. Ол мына түрдегі ақырсыз қосындылардың жиынтығы болып табылады: - бүтін сан)

**Қалындылар класы.**  сақинаның кез келген сол жақты және оң жақты идеалы аддитивті группаның ішкі группасы бола тұрып, сақинасын сыбайлас класстарға немесе қалындылар классына идеалы бойынша бөлуді анықтаймыз. , екі элемент идеалы бойынша салыстырмалы немесе модулі бойынша салыстырмалы деп аталады, егер олар бір қалындылар классына тиісті болса, яғни . Белгілеуі: , немесе қысқаша түрде, . « – мен салыстырылмайды» дегенді түрінде жазамыз.

Егер, дербес жағдайда, – коммутативті сақинадағы () басты идеалы болса, онда орнына жазамыз. Бірақ ықшамды болуы үшін жақшаларды алып, түрінде жазамыз.

Мысалы, бүтін санның қарапайым салыстыруы бойынша: (сөзбен айтсақ: – мен мдулі бойынша салыстырылады) білдіреді, яғни айырмасы () идеалына тиісті, санына еселік болып табылады.

**Салыстырулар ішіндегі амалдар**. Қандай да бір сол жақты идеалы бойынша салыстыруы дұрыс болады, егер екі жағына да бірдей элементін қоссақ немесе екі жағына солынан бір элементіне көбейтсек. Егер – екі жақты идеал болса, онда салыстырманың екі жағына оңынан элементіне көбейтуге болады. Осыдан мынаны аламыз: егер және , онда

сонымен, екі жақты идеал бойынша салыстырмада мүшелеп қосуға және көбейтуге болады.

Сонымен қатар, салыстырманың екі жағын да бүтін санына көбейтуге болады. жағдайда салыстырманы мүшелеп алуға болады.

Салыстырмаға да теңдіктер сияқты амалдар қолдануға болады. Тек қысқартуға болмайды: Мысалы бүтін сандар облысында,

бірақ салыстырмасы дұрыс емес, алайда .

Нормальді ішкігруппа группа гомоморфизмі ұғымына сияқты екі жақты идеалдар сақина гомоморфизмі ұғымының қатынасын анықтайды. Гомоморфизм ұғымына тоқталайық.

гомоморфизмі – сақинаның бөлінуін анықтайды: классы бірдей бейнеге ие болатын барлық элементтерден тұрады. Осы класстарды бөлуді нақтырақ айтсақ:

**Теорема.** гомоморфизмі кезінде нөлдік элементке сәйкес келетін сақинаның классы – дағы екі жақты идеал болып табылады, ал қалған класстар осы идеал бойынша қалындылар классы болып табылады.

Дәлелдеуі. – модуль екенін дәлелдейік. Егер гомоморфизм кезінде және нөлге көшсе, онда нөлге және айырымы да көшеді. Сонымен қатар, классына және элементтерімен бірге айырымы да тиісті болады.

Егер нөлге көшсе және –сақинаның кез келген элементі болса, онда элементі теңдігіне көшеді, яғни –ге тиісті болады. Сол сияқты элементі де көшеді. Осыдан – екі жақты идеал екені шығады.

қатысатын бір қалындылар классы бойынша алынған элементтері өрнегіне, яғни – ға көшеді және бір классына жатады. Егер, керісінше, элементі – ға көшсе, онда айырмасы теңдігіне көшеді, бұдан екендігі шығады, яғни жатқан қалындылар классына тиісті болады. Дәлелдеу керегіміз де осы болатын.

Сонымен, әр гомоморфизмге оның ядросы болып табылатын қандай да бір екі жақты идеал сәйкес келеді.

Мына сұраққа тоқталсақ: идеалы бойынша қалындылар классы сақинасының элементтеріне бейнелейтіндей сақинаның гомоморфты бейнесі табыла ма?

Осындай сақинаны құру үшін құрастырайын деп жатқан сақинаның элементтері ретінде модулі бойынша қалындылар классын аламыз; қалындылар классын арқылы, ал қалындылар классын арқылы белгілеп, классын қосындысы және классын көбейтіндісі ретінде анықтаймыз. Егер – дан алынған, ал – дан алынған қандай да бір элемент болса, онда , болады. жатқан қалындылар классына, ал - жатқан қалындылар классына тиісті. Осылай біздің анықтаған қосынды мен көбейтіндіміз , класстарынан алынған , элементтеріне тәуелді емес.

Әрбір элементіне қалындылар классы сәйкес қойылады, ал бұл бейнелеу гомоморфты, өйткені қосындысы қосындысына, ал көбейтіндісі көбейтіндісіне көшеді. Осыдан қалындылар классы қандай да бір сақина құрайтыны шығады. Бұл сақинаны біз қалындылар классының сақинасы немесе идеалы бойынша сақинаның фактор сақинасы немесе модулі бойынша сақинасы деп атаймыз. сақинасы сақинасына гомоморфты бейнеленеді. Бұл жағдайда идеалы идеалы сияқты роль атқарады.

Осы жерден екі жақты идеалдың маңызды принциптерін көремеміз: олар берілген сақинаға гомоморфты сақина құруға мүмкіндік береді. Осындай жаңа сақинаның элементтері болып қандай да бір екі жақты идеал бойынша қалындылар классы боп табылады. Кез келген екі қалындылар классы қосылады және көбейтіледі, өйткені осы кластардың кез келген екі элементін қосуға және көбейтуге болады. салыстыруынан шығады. Осылай қалындылар классына көшу кезінде салыстырма теңдікке айналады, сақинадағы салыстырма ішіндегі амалдар сақинадағы теңдіктер ішіндегі амалдармен сәйкес келеді.

Осы жерде құрылған дербес түрдегі сақиналар, берілген сақинаға гомоморфты, қалындылар классының сақинасы , - сақинаға гомоморфты сақиналарды негізі толық қамтиды. Шынында да, кез келген сақина болса, яғни сақинаға гомоморфты болса, онда сақинаның элементтері қалындылар классына екі жақты идеал бойынша сақинаның ішінде биективті түрде сәйкес болады. қалындылар классы – дан алынған элементіне сәйкес келеді. , екі қалынды классының қосындысы мен көбейтіндісі сәйкесінше , класстарына көшеді, яғни оларға және элементтері сәйкес келеді. Сонымен, элементтерін қалындылар классына сәйкестендіру изоморфизм болып табылады. Сөйтіп біз келесі тұжырымды дәлелдедік:

сақинасына гомоморфты әрбір сақина қандай да бір қалындылар классынының сақинасына изоморфты. Сонымен қатар элементтері - дағы нөлдік бейнесіне ие екі жақты идеал болып табылады. Керісінше, кез келген қалындылар классының сақинасы сақинаның гомоморфты бейнесі болады (гомоморфизмді сақиналар теоремасы).

**Бөлінгіштік. Жай идеалдар.**

– сақинасындағы қандай да бір идеал болсын (немесе модуль). Егер - идеалынан алынған элемент болса, онда түрінде жазуға болады; бұл жағдайда элементі идеалына бөлінеді делінеді. Егер қандай да бір идеалының барлық элементтері – ға бөлінсе, онда – ға бөлінеді (Дедекинду бойынша). Бұл идеалы идеалының ішкі идеалы дегенді білдіреді. Белгіленуі: . идеалын еселік немесе идеалының ішкі идеалы деп атайды. Сол сияқты идеалын бөлгіш немесе немесе идеалының сыртқы идеалы деп атайды. Егер болса, онда идеалын идеалының меншікті бөлгіші, ал идеалын иделының меншікті идеалы еселігі деп аталады.

Коммутативті сақинаның басты идеалдарындағы бірлік салыстыруы теңдігін білдіреді де, идеалдар теориясындағы бөлінгіштік ұғымы кәдімгі элементтердің бөлінгіштік ұғымына өтеді.

Осы жерден бастап қарастырылып жатқан сақиналарды коммутативті болып есептеледі.

сақинаның жай идеалы болып қалындылар классы бүтін сақина болатын идеалы табылады және оның нөлдік бөлгіштері болмайды.

Егер қалындылар классын сол қалпы үстінен сызықпен белгілесек, онда жай идеалы үшін былай жазамыз: және немесе , сақинадан алынған кез келген және элементтері үшін орындалады. Сөзбен айтсақ: екі санның көбейтіндісі идеалына бөлінеді сонда тек сонда, егер ға көбейткіштердің біреуі бөлінсе.

Бірлік идеалдың жай идеал екені анық, себебі тұжырымы орындалмайды. Нөлдік идеал жай идеал болады сонда тек сонда, егер сақинасы бүтін болса.

сақинасының идеалын максимальді немесе бөлгіштері жоқ дейміз, егер сақинаның өзінен басқа –дан алынған ешбір идеалдан тұрмаса; басқа сөзбен айтқанда, егер онда бірлік идеалынан басқа меншікті бөлгіштері болмаса. Мысалы, аталған басты идеалдары жиынында максимальді.



–дан өзгеше әрбір максимальді идеалы бірлігі бар сақинада жай идеал болады және қалындылар классының сақинасы өріс болып табылады. Керісінше, – өріс болса, онда – максимальді идеал болады.

Дәлелдеуі. Қалындылар классының сақинасында болғанда теңдеуін шешу керек. және – кез келген элемент болсын. идеалы элементімен бірге осы идеалының бөлгіші болып табылатын қандай да бір идеал жасайды. Осыдан теңдігі шығады. Сондықтан сақинаның кез келген элементін мына түрде жазуға болады

Гомоморфизм көмегімен қалындылар классы сақинасынан теңдігін аламыз, осыдан теңдеуі шешіледі.

Сонымен, қалындылар классының сақинасы өріс болып табылады. Өрісте нөлдік бөлгіштер болмайтындықтан, идеалы жай идеал болады.

Керісінше, егер – өріс және – идеалының меншікті бөлгіші, ал – – ға тиісті емес – дан алынған элемент болса, онда салыстырмасы кез келген элементі үшін шешімді. Осыдан

шығады, - сақинасынан алынған кез келген элемент болғандықтан, теңдігі алынады.

Бірақ, әрбір жай идеал максимальді бола бермейді; оны бүтін сандар сақинасындағы нөлдік идеал мысалынан көруге болады. Одан басқа нақтырақ мысал болып бүтін санды көпмүшелік сақинасының идеалы болып табылады. Оның меншікті бөлгіші болып идеалы болады. және идеалдарының жай идеал екеніне көз жеткізу қиын емес.

ЕҮОБ пен ЕКОЕ. Берілген және идеалдарынан пайда болған (идеалын осы идеалдардың **ең үлкен ортақ бөлгіші (ЕҮОБ)** деп аталады. Кейде (– ны және идеалдарының қосындысы деп атайды, өйткені ол барлық мүмкін қосындыларынан тұрады, мұндағы , .

Екі идеалдың қиылысын осы идеалдардың **ең кіші ортақ еселігі (ЕКОЕ)** деп атайды. осы идеалдардың еселігі болады және олардың ортақ еселіктерін бөледі.

Негізгі әдебиеттер:

1. Ешкеев А.Р. Группалар теориясының элементтерінің кейбір жаттығуларының шешімдері мен мысалдары. Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 47 б., 2003.
2. Асенова А.Е., Әсен Е.Қ. Сандар теориясына кіріспе. «Болашақ» баспасы, Қарағанды 2007.
3. Сексенбаев Қ.С., Жетпісов Қ.Ж. Көпмүшеліктер сақинасы. Қарғанды, 2000. 130 б.

Қосымша әдебиеттер:

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. В трёх частях. − М.: МЦНМО, 2009.
2. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. СПб.: Лань, Физматкнига, 2007. 288 с.
3. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. Лань, 2009.

**Дәріс №8**

Тақырыбы: Ішкі дене. Жай дене

**Дәріс жоспары:**

1. Ішкі дене ұғымы.
2. Өрістің жай кеңейтілуі.
3. Өрістің алгебралық кеңейтілуі.

**Анықтама.**  - кез келген дене болсын.Егер ішкі жиыны -де қайтадан дене болса, онда оны -нің ішкі денесі деп айтамыз.



Ол үшін -нің біріншіден, ішкі сақина (яғни мен бірге мен құраса), екіншіден, құрамында бірлік элемент болса, сонымен қатар болғанда кері элементі бар болса жеткілікті. Осылардың орнына -дің ең болмағанда бір нөлдік элементі және мен орнына мен болуын талап еткен жеткілікті.



**Теорема.**  денесінің ішкі жиынындағы кез келген жиындардың қиылысуы да денесінің ішкі жиыны болып табылады.



Меншікті ішкі денелері жоқ денені *жай дене* деп атайды. Барлық жай денелер коммутативті.

**Теорема.** Әрбір денеде тек қана бір жай дене болады.



**Дәлелдеуі.** денесіндегі барлық ішкі денелердің қиылысуы дене болады және меншікті ішкі денелері болмайды.

Егер денесінде екі жай дене табылса және олардың қиылысуы олардың әрқайсының ішкі денесі болса, сосын әрқайсына сәйкес келсе, онда бұл екі дене әртүрлі болмас еді.



**Жай дене түрлері. -**  денесінде жататын жай дене болсын. Онда нөлдік және бірлік элемент бар, сондықтан мына элементтің бүтін еселігі болады:



элементтерін қосу және көбейту келесі ережелер арқылы орындалады:

бүтінсанды еселіктері қандай да бір коммутативті сақинасын құрайды. бейнелеуі бүтінсандар сақинасын сақинасына гомоморфты бейнелейді. Гомоморфизмдер теоремасы бойынша сақинасы қалындылар классының сақинасына изоморфты, мұндағы – нөлге бейнеленетін бүтінсандарынан тұратын, яғни теңдігін беретін идеал. сақинасында нөлдік бөлгіштер болмағандықтан, қалындылар классының сақинасында да нөлдік бөлгіштер болмайды. идеалының бірлік идеал болуы мүмкін емес, себебі теңдігі орындалар еді. Осыдан тек екі мүмкіндігі бар:



1. , мұндағы – жай сан. Бұл жағдайда - қасиетін қанағаттандыратын ең аз сан болып табылады, яғни

Демек, өріс болып табылады. – жай денелерден құралған өріс болады. Бұл жағдайда жай дене бүтін сандар сақинасының қалындылар классының сақинасына қандай да бір идеал бойынша изоморфты: элементтеріне модулі бойынша алынған бүтін сандар қалындылар классына қолданған ережелер орындалады.

1. . Онда гомоморфизмі изоморфизм болып табылады. еселіктері - жұптары бойынша әр түрлі болады, яғни

. Бұл жағдайда сақинасы дене болмайды, себебі ол бүтін сандар сақинасы емес. жай денесі тек –ның элементтерін ғана құрамай, сонымен қатар сонда осы элементтердің қатынастары болу керек. Біздің жағдайымызда жай денесі рационал сандар өрісіне изоморфты.



жай денесін құраушыларын құру толығымен идеалынан туған немесе 0 санымен анықталады. ( идеалы қасиетін қанағаттандыратын бүтін сандарынан тұрады.) саны немесе сәйкес 0 саны денесінің немесе жай өрістің характеристикасы деп аталады.



Рационал сандар өрісін құрайтын барлық кәдімгі сандар мен функционалдық денелер нөл характеристикасына ие.

Характеристиканы анықтамасынан кейін келесі теоремаға келеміз:

**Теорема.**  - денесінің кез келген элементі және - дененің характеристикасы болсын. Онда теңдігінен салыстыруы шығады және керісінше.



**Дәлелдеуі.** теңдігін кері элементіне көбейтеміз, сонда теңдігін аламыз, осыдан характеристика анықтамасы бойынша салыстыруын аламыз. Қорытынды қайтымды болады.

және – дан шығатыны дәл осылай дәлелденеді.

Бір маңызды ережені айтып кетейік:

характеристика өрісінде келесі теңдіктер орындалады:

Дәлелдеуі. Бином теоремасын қолданамыз:

Егер болса, онда

Алымы көбейткіштерден тұрғандықтан, қысқаруы мүмкін емес. Сонымен және қосылғыштары қалады:

қоямыз, сонда

осылай екі тұжырым дәлелденеді.

**Қосылу**. - қандай да бір денесінің ішкі денесі болсын. Онда денесінің кеңейтілуі немесе ішкі денесі деп аталады. Біздің мақсатымыз берілген денесінің барлық мүмкін кеңейтілуі туралы мәлімет алу. Бұл біруақытта ден туралы мәлімет береді, себебі әрбір денені оның жай денесінің кеңейтілуі ретінде қарастыруға болады.



- денесінің кеңейтілуі және – элементтері – дан алынған кез келген жиын болсын. және – ді құрайтын дене табылады: мысалы, – сондай денелердің бірі. мен – ді құрайтын барлық денелердің қиылысуы мен – ді құрайтын дене болып табылады және ол арқылы белгіленеді. Ол мен – ді құрайтын денелердің ішіндегі ең кішісі болады. жазуын мен жиынының қосылуы деп түсінеміз.



арақатынасын аламыз. Мына екі жағдайы болады: және .

денесіне - дің элементтері және – ның барлық элементтері, сонымен қатар мен – дағы элементтерін қосу, азайту, көбейту және бөлуде пайда болған элементтер тиісті болады. Осы элементтердің барлығы денесіне сәйкес келетін қандай да бір дене құрайды. Сонымен, денесі элементтері мен элементтерінің барлық мүмкін болатын рационалды комбинациясынан тұрады. Коммутативті жағдайда бұл комбинацияны – дың элементтері коэффициенттерімен бірге бүтін рационал функциялар қатынасы түрінде өрнектеуге болады.



Егер – шекті жиын болса: , онда денесін арқылы белгілейміз. Бұл жағдайда элементтерінің денесіне қосылуы деп атайды. Жай жақшалар квадрат жақшалар сияқты денеге қосылу дегенді білдіреді, мысалы,жазуы денесіне қосылу сақинаға қосылуы дегенді білдіреді.



– дан алынған кез келген элементтің рационаал өрнегінде және элементтер арқылы тек қана шекті элементтерінен тұратын жиынқатысады. дененің әрбір элементі қандай да бір денесіне тиісті, мұндағы – – дан алынған шекті ішкі жиын. денесі барлық денесінің бірігуі, мұндағы – жиынының кез келген шекті бөлігі.



Егер - және жиындарының бірігуі болса, онда теңдігі дұрыс болады.

Шекті жиындардың біріктірілуі шекті жиындардың тізбектей біріктіруінің бір элементіне жинақталады.

**Анықтама.** Бір элементпен біріктіру арқылы алынған кеңейту дененің жай кеңейтілуі деп аталады.

Өрістің жай және алгебралық кеңейтілуі.

Осы тақырыпта қарастырылатын барлық денелер өріс деп қарастырылады. және - – дан алынған кез келген элемент. жай кеңейтілуін қарастырайық.

Бұл өріс көпмүшеліктердің барлық сақинасын құрайды. – ді бір айнымалы көпмүшеліктер сақинасымен салыстырайық.

бейнелеуі көмегімен, нақтырақ бейнелеуі көмегімен сақинасы – ға гомоморфты бейнеленеді. Гомоморфизмдер теоремасы бойынша сақинасы қалындылар классына изоморфты:

мұндағы – түбірі болып табылатын, яғни болатын көпмүшелігінен тұратын идеал.

– дің нөлдік бөлгіштерді болмағандықтан, да нөлдік бөлгіштер болмайды, өйткені – жай идеал. идеалы бірлік болуы мүмкін емес, себебі бірлік элементі гомоморфизм кезінде нөлге емес өз – өзіне өтеді. Әрбір идеалы басты идеал болғандықтан, екі жағдай болуы мүмкін:

1. , мұндағы көпмүшелігі көпмүшелігіне жіктелмейді. көпмүшелігі қасиетін қанағаттандыратын көпмүшеліктер ішіндегі дәрежесі ең аз көпмүшелік. Бұдан шығатыны

Қалындылар классының сақинасы сол жақтан өріс болады, осыдан –да өріс болып табылады. Яғни, ізделінді жай кеңейтілуі болады.

1. . гомомарфизмі изоморфизм болады. Берілген жағдайда нөлден басқа қасиетін қанағаттандыратын көпмүшелік жоқ, сондықтан өрнегіндегі - ді айнымалысы ретінде қабылдаймыз. Бұл жағдайды сақинасы өріс болмайды, бірақ жоғарыда көрсетілген изомарфизмге сәйкес дербестер өрісінің изомарфизмі шығады: сақинасының дербестер өрісі болып табылатын өрісі бір айнымалы рационал функция өрісіне изоморфты.

Бірінші жағдайда, егер элементі ішіндегі қандай да бір теңдеуін қанағаттандырса, онда элементін ішіндегі алгебралық деп және өрісін өрісінің жай алгебралық кеңейтілуі деп айтады. Екінші жағдайда, егер теңдеуінен теңдеуі шықса, онда элементін ішіндегі трансценденті деп атайды, ал өрісін өрісінің жай трасцендентті кеңейтілуі деп аталады. Жоғарыда айтылғандар бойынша, өріс ішіндегі трансценденті элементтерді қандай да бір жаңа айнымалы деп қарастыруға болады: . Алгебралық жағдайда, жоғарыда айтылғандар бойынша



аламыз, мұндағы - (жіктелмейтін) түбіріне ие болатын ең кіші дәрежелі көпмүшелік.

Соңғы қатынастан алгебралық жағдай бойынша келесі тұжырымдар алынады:

1. әрбір айнымалысы болатын рационалды функция көпмүшелігі түрінде өрнектелуі мүмкін;
2. осындай көпмүшеліктерді көпмүшеліктер сақинасындағы модулі бойынша қалындылар классы ретінде қарастыруға болады;
3. теңдігін салыстыруымен алмастыруға болады және керсінше.
4. әрбір модулі бойынша алынған әрбір көпмүшелік дәрежесі –нен кіші көпмүшелікпен алмастырылуы мүмкін болғандықтан, мұндағы – көпмүшелігінің дәреже көрсеткіші, онда – дан алынған барлық элементтерді түрінде жазуға болады.
5. элементі дәрежесі –нен кіші ешбір теңдеуді қанағаттандырмағандықтан,

өрнегінің элементі – дан алынған жалғыз элемент болып табылады.

Түбірі болып табылатын және –ке жіктелмейтін теңдеуін өрісін анықтайтын теңдеу деп атайды. көпмүшелігінің дәрежесі деп - ға қатысты алгебралық элементінің дәрежесін атайды.



Егер элементі ішіндегі қандай да бір сызықтық теңдеуінің шешімі болса, дәрежесі 1 – ге тең, яғни өрісінің элементі болады. Бұл жағдайда, теңдігін қойып, жоғарыдағы в) тұжырымында дәлелденген фактіге келеміз: түбірі болатын әрбір көпмүшелігі – ге бөлінеді. өрісінің кеңейтулерін ( - ға қатысты) эквивалентті дейміз, егер -дан алынған әрбір элемент өз–өзіне көшкенде (өзгеріссіз қалса), изоморфизмі табылса.



Кез келген өрістің екі жай трансцендентті кеңейтілуі эквивалентті болады.



Шынында да, бейнелеуі көмегімен кез келген жай трансцендентті кеңейтілуі бір айнымалылы рационал функциялар өрісіне эквивалентті.

**Теорема.** , жай алгебралық кеңейтулері эквивалентті болады, егер –ке жіктелмейтін көпмүшелігінің түбірлері болып , сандары табылады; бұл жағдайда, - дан алынған барлық элемент өзгеріссіз қалады, яғни , – ға көшсе көрсетілген өрістер арасында изоморфизм бар болады.



**Дәлелдеуі.**  – дан алынған элементтер түрінде болады, ал алынған элементтер түрінде болады. Екі жағдайда да бұл элементтерді модулі бойынша алынған көпмүшелік ретінде қарастыруы керек.

салыстыруы қажетті түрдегі изоморфизм болады.

-ке жіктелмейтін көпмүшелігі қандай да бір кеңейтілуіне жіктелмей қалуы мүмкін емес. Егер –да түбірі бар болса, онда ол сызықтық көбейткішіне қалдықсыз бөлінетіні анық. Сонымен қатар, өрісінде көпмүшеліктер мынадай сызықты және сызықты емес көбейткіштерге жіктелуі мүмкін:



Жоғарыда дәлелденген өрістері изоморфизмі бойынша эквивалентті.

–ны құрайтын ортақ өрісі бар эквивалентті кеңейтулерді (мысалы, ) -ға қатысты түйіндес деп аталады. Осыған қатысты изоморфизм кезінде бір–біріне өтетін элементтерін де түйіндес деп атайды. Дәлелдеуден мынаны аламыз: *–*ке жіктелмейтін көпмүшелігінің кеңейтілуіне жататын барлық түбірлері - ға қатысты түйіндес деп аталады. Керісінше, берілген өрісте алгебралық және түйіндес болатын элемент сол бір көпмүшелігінің түбірі болады, себебі изоморфизм кезінде –ден –ге көшкенде –ден шығады.



Жай кеңейтілудің бар болуы.Осы кезге дейін өрістің ішінде берілген болды және жай кеңейтілудің құрылымы өрісінің ішінде анықталды. Енді басқа жағынан қарастырайық: өрісі берілсін; кеңейтілуін табу керек, мұндағы – трансцендентті немесе алдын ала берілген көпмүшелігінің түбірі болады.



Егер трансцендентті элемент болса, онда оны түсіну қиын емес: –ның орнына айнымалысын қоямыз, сосын айнымалысының рационал функциялар өрісі болып табылатын дербестер өрісін құрамыз. Көріп отырғанымыздай, өрісі өрісінің эквиваленттік кеңейтілуінің дәлдігіне дейінгі жалғыз трансцендентті кеңейтілуі бар болады. Осыдан келесі тұжырымды аламыз:



**Тұжырым.** Берілген өрісінің эквиваленттік дәлдікке дейін бір тек бір ғана жай трансцендентті кеңейтілуі бар болады.



Егер элементі алгебралық, нақтырақ айтсақ, –ке жіктелмейтін көпмүшелігінің түбірі болса, онда сызықты болмайды, тек деп жазғанымыз жеткілікті болар еді.

Ізделінді өрісі жоғарыда айтылғаны бойынша

қалындылар классына изоморфты болу керек. Бұл жағдайда –тен алынған әрбір көпмүшелігіне -тан алынған қандай да бір қалындылар классы сәйкес қойылады. Дербес жағдайда, -дан алынған кез келген тұрақтысы қалындылар классына сәйкес келеді, бірақ өрісінің бұл бейнесі гомоморфты ғана болып қоймай, сонымен қатар изоморфты болады, себебі 0 модулі бойынша салыстыралатын жалғыз тұрақты болып табылады. Сонымен өрісіндегі қалындылар классын оған сәйкес -дағы элементтерімен алмастыра аламыз, яғни өрісі өрісіне өтеді, өрісін құрайды және өрісіне изоморфты.



көпмүшелігіне арқылы белгіленген қалындылар классы сәйкес қойылады. Яғни, өрісінде біз өрісін құра аламыз ( екеніне көз жеткізу қиын емес).



өрнегінен гомоморфизм бойынша

аламыз, осыдан

шығады, егер - ны – ға алмастырсақ. Сонымен, элементі көпмүшелігінің түбірі болады.

Сонымен, келесі сөйлемді дәлелдедік:

Кез келген өрісінде бір ( тек бір эквивалентті кеңейтілуіне дейінгі дәлдікпен) жай алгебралық кеңейтілуі табылады, яғни теңдеуін қанағаттандыратын элемент болады, мұндағы –тегі жіктелмейтін көпмүшелік.



Символдық қосылу процесінде қалындылар классының сақинасының және символы көмегімен символдық емес бірігуге сәйкес қарсы қоюға болады, бұл сонда тек сонда ғана мүмкін болады, егер басынан бастап өрісін құрайтын барлық қарастырылған элементтер берілсе және қажетті қасиеттермен элементі берілсе. Мысалы, егер - рационал сандар өрісі болса, онда қандай да бір алгебралық санның символдық емес қосылуы, яғни қандай да бір алгебралық теңдеудің түбірінің негізі болатын транцендентті түрде құрылған комплекс сандар өрісі болады. Осы өрісте «алгебраның негізгі теоремасына» сәйкес әрбір рационалды коэффициенттері бар теңдеудің шешімі табылады. Жоғарыда қарастырылған символдық қосуы осы трансцендентті жолын жасамауға мүмкіндік береді, біз алгебралық санды қалындылар класстары символы ретінде аламыз. Сонымен қатар, ( реттік қатынастар немесе заттық қасиеттер енгізілмейді. Бірақ қай жолмен барсаң да ( символдық, символдық емес) біз бір өріске ие боламыз, өйткені дәлелденген дербестер бойынша жіктелмейтін теңдеуді қанағаттандыратын кеңейтілуі эквивалентті болады.



Негізгі әдебиеттер:

1. Ешкеев А.Р. Группалар теориясының элементтерінің кейбір жаттығуларының шешімдері мен мысалдары. Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 47 б., 2003.
2. Асенова А.Е., Әсен Е.Қ. Сандар теориясына кіріспе. «Болашақ» баспасы, Қарағанды 2007.
3. Сексенбаев Қ.С., Жетпісов Қ.Ж. Көпмүшеліктер сақинасы. Қарғанды, 2000. 130 б.

Қосымша әдебиеттер:

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. В трёх частях. − М.: МЦНМО, 2009.
2. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. СПб.: Лань, Физматкнига, 2007. 288 с.
3. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. Лань, 2009.

**Дәріс №9**

Тақырыбы: Галуа кеңейтулері

**Дәріс жоспары:**

1. Дененің шекті кеңейтілуі.
2. Өрістердің жіктелуі.
3. Галуа кеңейтілуі.
4. Бірлік түбірлер.

**Анықтама.** денесін ішкі денесінің шекті кеңейтілуі деп атайды немесе, қысқаша, ішінде шекті болады, егер денесінің барлық элементтері коэффициенттерімен бірге шекті жиынның элементтерінің сызықты комбинациясы болып табылса:



(9.1)

Бұл жағдайда денесі ішіндегі шекті өлшемді сол жақты вектор кеңістігі болып табылады. Өлшемділік, яғни, ішіндегі базисінің элементтерінің саны ішіндегі кеңейтілуінің дәрежесі деп аталады және арқылы белгіленеді.



Мысалы. - өрісінің жай алгебралық кеңейтілуі болсын:



мұндағы, - ішіндегі дәрежесінің элементі, яғни сақинасындағы дәрежелі жай көпмүшеліктің қандай да бір түбірі.



элементтері ішіндегі өрісінің базисін құрайды, яғни ішіндегі дәрежесіне ие болады.



- және арасындағы аралық дене болсын, . Осыдан келесі теорема туындайды.



**Теорема.** (Дәреже туралы теорема).Егер ішінде шекті болса, онда – де ішінде шекті, ал ішінде шекті болады, онда ішінде шекті және



(9.2)

**Дәлелдеуі.** Егер ішінде шекті болса, онда вектор кеңістігінің ішкі кеңістігі де ішінде шекті. Онда –ның ішінде шекті екені анық, өйткені ішінде де шекті. Керісінше, және шекті болсын делік, - ішіндегі кеңістігінің базисі, ал - ішіндегі кеңістігінің базисі. Онда денесінің әрбір элементі мына түрде өрнектеледі:



Солай, денесінің әрбір элементі шамасы – ке сызықты тәуелді. Бұл шамалар ішінде сызықты тәуелсіз, өйткені ішіндегі сызықты тәуелсіз элементтері бойынша



өрнегінен

өрнегін аламыз, ал ішіндегі элементтерінің тәуелсіздігінен



өрнегін аламыз. Осыдан - ішіндегі денесінің дәрежесі екендігі шығады. Дәлелдеу керектігі осы болатын.



(9.2) формуласының салдары.

1. Егер және болса, онда болады. Шынында да, (2.16.2) формуласынан болатыны шығады. Осы сияқты келесілерін аламыз:
2. Егер және болса, онда болады.
3. Егер болса, онда дәрежесі дәрежесінің бөлгіші болады.

**Анықтама.**  өрісінің кеңейтілуін ішінде алгебралық дейді, егер –нің әрбір элементі ішінде алгебралық болса.



**Теорема.** өрісінің әрбір шекті кеңейтілуі алгебралық және -дағы шекті сандарды алгебралық элементтерге қосу арқылы алынады.



**Дәлелдеуі:** Егер n - шекті кеңейтілуінің дәрежесі және болса, онде кез келген , дәрежесінің ішінен кез келген элементіне көп дегенде n сызықты тәуелсіз бар. Осыдан, , яғни – алгебралық элемент теңдігі орындалады. Дәл солай, өрісі алгебралық болатыны дәлелденген. кеңейтілуінің тудырушы элементтері ретінде өрісінің кез келген базисин алуға болады.



Осы теореманың көмегімен «шекті кеңейтілулер» орнына «шекті алгебралық кеңейтулер» деп айтуға болады.

**Кері теорема:** ( өрісінің әрбір кеңейтілуі) Алгебралық шамалардың шекті жиынын өрісіне қосу арқылы алынған өрісінің әрбір кеңейтілуі шекті және ( алгебралық).



**Дәлелдеуі:**  элементі мен n дәрежесі алғашқы қосу арқылы базисімен бірге қандай да бір шекті кеңейтілуін береді. Тізбектей құрылған шекті кеңейтулер қайтадан шекті кеңейтулерге келтіріледі.

**Салдар 1.** Алгебралық элементтердің қосындысы, айырмасы, көбейтіндісі және бөліндісі де алгебралық элементтер болады.

**Теорема 4.** Егер элементі қарағанда алгебралық болса, ал - өрісінің кеңейтілуі болса, онда ішінде алгебралық болады.



**Дәлелдеуі:** Алгебралық теңдеуде элементі үшін коэффицентіне коэффицент ретінде өрісінің шекті жиын элементтері кіреді. ( ) өрісі ішінде шекті, ал өрісі ішінде шекті; осыдан, ішінде шекті және элементі ішінде алгебралық болатыны шығады.



**Өрістердің жіктелуі.** Шекті алгебралық кеңейтілуі ішінде теңдеуінің барлық түбірлерін қосу арқылы алынатын берілген көпмүшелігінде өрістердің жіктелуі өте маңызды.

сақинасының көпмүшесі толығымен сызықтық көбейткіштерге жіктелген:

және -ға осы сызықты фигураның түбіріне қосу арқылы алынатын өріс мына түрде болады:



Осындай өрістерде келесі теорема дәлелденеді:

**Теорема.**  сақинасының әрбір көпмүшелігінде қандай да бір өрістің жіктелуі бар болады.

**Дәлелдеуі.**  сақинасында көпмүшелігі келесі түрде жіктелетін көбейіткіштерге жіктеледі:

Алдымен қандай да бір түбірін жіктелмейтін көпмүшелікке біріктіреміз де ) өрсін аламыз, мұнда сызықтық көбейткішіне ие.

көпмүшелігінен көбейткіштері (бірдей немесе ір түрлі) бөлінетіне өрісі құрылады делік. өрісінің ішінде көпмүшелігі былай жіктеледі:

Енді – ға көпмүшелігінің қандай да бір түбірін біріктірейік. Сонымен қатар, кеңейтілген өрнегіндегі көпмүшелігінен көбейткіштері бөлінеді. Көрсетілген біріктіруден кейін –ден артық сызықтық көбейткіштер алынады.

Осылай жалғастыра отырып, біз өрісін табамыз, дәлелдеу керегі де осы болатын.

Енді берілген көпмүшесінің өрісінің жіктелуін бірмәнді эквивалентті дәлелдікпен анықтаймыз. Ол үшін бізге изоморфизмнің жалғасы ұғымы қажет болады.

, және болсын. изоморфизмі берілген изоморфизмнің жалғасы деп аталады, егер - ның изоморфизмі кездессе элементіне өтетін әрбір элементі жаңа изоморфизм кездессе -тағы бейнесіндей бейнеге ие болады.



Барлық алгебралық кеңейтулердің изоморфизмдер жалғасының тоеремалары келесі сөйлемге тоқталады:

**Теорема.** Егер қандай да бір изоморфизмі кезінде – тегі жіктелмейтін көпмүшелігі – тегі жіктелмейтін көпмүшелігіен өтсе және егер – қандай да бір өрісінің кеңейтілуіндегі көпмүшелігінің түбірі, ал қандай да бір өрісінің кеңейтілуіндегі көпмүшелігінің түбірі болса, онда берілген изоморфизмі изоморфизміне дейін жалғасады, яғни ға өтуде.



**Дәлелдеуі.**  элементтері түрде болады және модулі бойынша алынған көпмүшеліктерге әрекет ететін ережелерге бағынады. Дәл осылай, –ның элементтері түрде болады және алдыңғыға ұқсас модулі бойынша алынған көпмүшеліктерге әрекет ететін ережелерге бағынады. Осыдан:

Салыстыруы ( мұндағы изоморфизмындағы элементтерімен сәйкес келеді) қажет қасиеттерге ие изоморфизм болып табылады.

Дербес жағдайда, егер және берілген изоморфизм - ның әрбір элементін өзінше бейнелесе, онда жоғарыдағы өрістерін жіктелмейтін теңдеудің түбірлерімен біріктіруі эквивалентті және әрбір түбірді кез келген сәйкес келетін изоморфизм бойынша көшіруге болады.



Барлық түбірлерді қандай да бір көпмүшелігін біріктірудегі сәйкес теореманың орнына келетіні аламыз.

**Теорема.** Егер қандай да бір изоморфизмі кезінде –тегі көпмүшелігі –тегі көпмүшелігіне өтсе, онда бұл изоморфизмді көпмүшелігінің кез келген өріс кеңейтуінің изоморфизміне дейін жалғастыруға болса, кеңейтулерін көпмүшелігінің кез келген онда элементтері қандай да бір реттілік бойынша элементтеріне өтеді.

**Дәлелдеуі.** Әрбір – ді – ге көшіретіне изоморфизмі қандай да бір (қажетімізге қарай нөмірлеуді өзгертуімізге болады) жалғастырылады деп ұйғарайық. ( үшін бұл ұйғарым дұрыс) кеңейтілуінде көпмүшелігі былай жіктеледі:

Сәйкесінше кеңейтілуіне көпмүшелігі былай жіктеледі:

кеңейтілуі сәйкесінше кеңейтілуіне және көпмүшеліктері және сәйкесінше көбейткіштеріне жіктеледі. және жиынтығын –дің түбірі, ал көпмүшенің түбірі болатындай етіп жинақтауға болады. Алдыңғы теорема бойынша:

изоморфизміне

изоморфизміне дейін, яғни – ге көшкенде жалғастыруға болады.

Осылай, бастап қадам жасай отырып ізделінді изоморфизмге, яғни –ге көшкенге келеміз.

Егер дербес жағдайда және берілген изоморфизмі -дан алынған әрбір элементті орнына қолдырса, онда және жалғастырушы изоморфизмі

-дағы барлық элементтерді қозғалыссыз қолданады, яғни екі жіктелу өрісі де үшін эквивалентті болады. Осыдан кез келген көпмүшелігінің жіктелу өрісі бірмәнді түрде эквивалентті дәлелдікке дейін анықталғаны шығады.



Бұдан түбірлердің барлық алгебралық қасиеттері өрістің жіктелуін құрудан тәуелді болмайтынын көреміз. Мысалы, комплекс сандар өрісінде көпмүшелік жіктеле ме, әлде символдық біріктіру нәтижесінде, яғни эквивалентті дәлелдікке дейін жіктелу өрісі солай болып қала ма.

Дербес жағдайда көпмүшелігінің әрбір түбірі жіктелуге кіретін еселікке ие болады.

Еселік түбірлер бар болады сонда тек сонда егер және көпмүшеліктер жіктелу өрісінде тұрақтыдан басқа ортақ бөлгішке ие болса. Кез келген кеңейтілуде және көпмүшеліктерінің ең үлкен ортақ бөлгіші негізгі сақинасындағы ең үлкен ортақ бөлгішіндей болады. Сонымен қатар сақинасында және көпмүшеліктерінің ең үлкен ортақ бөлгішін құруда сәйкес жіктелу өрісінде –тің еселігін анықтауға болады.

өрісіндегі бір көпмүшеліктің екі жіктелу өрісі эквивалентті болып қоймай, сонымен қатар тең болады. Шынында да, ішіндегі екі жіктелу сәйкес келеді:

*,*

*,*

–тегі көпмүшеліктердің бірмәнді жіктелуі теоремасынан бір ретті дәлдікке дейін көбейткіштер сәйкес келу керектігі шығады.

Негізгі әдебиеттер:

1. Ешкеев А.Р. Группалар теориясының элементтерінің кейбір жаттығуларының шешімдері мен мысалдары. Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 47 б., 2003.
2. Асенова А.Е., Әсен Е.Қ. Сандар теориясына кіріспе. «Болашақ» баспасы, Қарағанды 2007.
3. Сексенбаев Қ.С., Жетпісов Қ.Ж. Көпмүшеліктер сақинасы. Қарғанды, 2000. 130 б.

Қосымша әдебиеттер:

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. В трёх частях. − М.: МЦНМО, 2009.
2. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. СПб.: Лань, Физматкнига, 2007. 288 с.
3. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. Лань, 2009.

**Дәріс №10**

Тақырыбы: Галуа өрісі ( шекті комутативті дене)

**Дәріс жоспары:**

1. Галуа өрісі.
2. Өрістердің жіктелуі.
3. Галуа кеңейтілуі.
4. Бірлік түбірлер.

**Анықтама.**  өрісінің кеңейтілуін өрістегі нормальді деп аталады және Галуа кеңейтілуі деп аталады, егер:



1. ішіндегі алгебралық болса



1. –тегі әрбір жіктелмейтін , яғни – да ең болмағанда бір түбіріне ие болатын көпмүшелігі –те сызықтық көбейткіштерге жіктелсе.

Жоғарыда құрылым жіктелу өрісі келесі теоремаға сәйкес нормальді болады:

**Теорема.** -ға –тегі көпмүшеліктің бір немесе бірнеше, сонымен қатар шексіз жиындарблатын түбірлерін біріктіру арқылы алынған кеңейтілу нормальді болып табылады.



Алдымен біз көпмүшеліктердің шексіз жиындар жағдайынан шекті жиындар жағдайына біріктіреміз, себебі өрістің элементі берілген көпмүшеліктің шекті жиындарына тәуелді және нормальділікті дәлелдеу барысында келтірілмейтін көпмүшеліктің жіктелуін қарастырамыз, берілген өрістегі түбірлерінің бірі осы түбірлердің шекті жиынын құрайды.

Сосын көпмүшеліктердің шекті жиыны жағдайын жалғыз көпмүшелік жағдайына біріктіреміз, ол үшін берілген барлық көпмүшеліктерді көбейтіп және көбейтіндінің түбірлерін біріктіру деген көбейткіштің түбірлерін көбейту дегенмен бірдей.

болсын, мұндағы – қандай да бір көпмүшелігінің түбірі, – тегі жіктелмейтін – тің – да түбірі бар болсын. Егер – да толық жіктелмесе, онда – да тағы да көпмүшелігінің түбіріне қосамыз да өрісін аламыз. Онда және түйіндес болғандықтан,



Бұл изоморфизм кезіндегі - дағы элементтер, дербес жағдайда көпмүшелігінің коэффициенттері өзіне өтеді. Енді көпмүшелігінің барлық түбірлерін оң және сол жақтан біріктіреміз; онда изоморфизмді жалғастыруға болады:



*,*

мұндағы қайтадан – ге басқа ретпен өтуі мүмкін. элементі - –нен тәуелді рационалды функция, яғни коэффициенттерімен бірге:



*,*

рационалды қатыынастар кез келген изоморфизмде аяқталады. та айнымалыларына тәуелді рационалды функция және өрісіне тиісті.



**Кері теорема.**  өрісінің кез келген нормальді кеңейтілуі қандай да бір көпмүшеліктің барлық түбірлерін қосу арқылы алынады, егер ол шекті болса, - көпмүшеліктің шекті жиындардың түбірлерін қосу арқылы алынса.



**Дәлелдеуі.** өрісі алгебралық шамалардың қандай да бір жиынын қосу арқылы алынған болсын. ( жалпы жағдайда, болады, шекті кеңейтілулер жағдайында – ді шекті деп санаймыз.) – нің әрбір элементі коэффициенттері - дан болатын қандай да бір – да толығымен жіктелетін алгебралық көпмүшелігін қанағаттандырады. Осындай көпмүшелігінің барлық түбірлерінің біріктірілуі жиыны, яғни өрісі не берсе соны береді. Дәлелдеу керектігі осы болатын.



**Анықтама.** Жіктелмейтін теңдеуі нормальді деп аталады, егер осы теңдеудің бір түбірін біріктіру арқылы алынған өріс нормальді болса, яғни толығымен жіктелсе.

Бірлік түбірлер. Жоғарыда өрістер теориясының жалпы негізгі жағдайлары қарастырылды. Теорияны әрі қарай дамытпас бұрын алынған теореманы негізгі өрістер ішіндегі дербес түрдегі бірнеше теңдеуге қолданамыз.

– натурал сан болсын. көпмүшелігінің түбірі кез келген өрісінде – ші дәрежелі бірлік түбір деп аталады. Кез келген – ші дәрежелі бірлік түбірі үшін

қатынасы дұрыс.

Егер – комплекс сандар өрісі болса, онда – ші дәрежелі бірлік түбірді геометриялық түрде бірлік дөңгелектегі нүкте деп қарастырамыз:

мұндағы

қасиетін қанағаттандырады және

теңдігімен анықталады.

Егер – ға мәндерін берсек, онда нүкте пайда болады

олар дөңгелекті тең доғаға бөледі. көпмүшелігі комплекс сандар өрісін тең әр түрлі түбірлерге ие. Бұл түбірлер жалғыз – ші дәрежелі бірлік примитивті түбір ретінде болады.

Бірлік түбірді кез келген өрісінде қарастырамыз. Алдымен теоремаға тоқталайық:

–ші дәрежелі бірлік түбірлер өрісінде көбейту амалына қатысты абельдік группа құрайды.

және теңдіктерінен және шығады. Онда бұл группаның абельдік екені анық.

Енді абельдік группа туралы лемманы дәлелдейік.

**Лемма.**  – абельдік группа элементтері, реттері бойынша жұптарымен өзара жай болады. Онда

көбейтіндісі

ретіне ие болады.

**Дәлелдеуі.**  болғандықтан, элементінің реті барлық жағдайда санының бөлгіші болады. Егер – санын құрайтын кез келген жай сан болса, онда анықталған көбейткішке кіреді және қалған барлық –ге бөлінеді, бірақ – ге бөлінбейді. Осыдан

болатыны шығады.

Егер – характеристикасының өрісі болса, онда , мұндағы –ға бөлінбейді. Әрбір – ші дәрежелі бірлік түбір үшін келесі теңдік орындалады:

бұдан

Осылай, – ші дәрежелі бірлік түбірі бір уақытта - шы дәрежелі бірлік түбір болады, мұндағы өріс характеристикасына бөлінбейді. Нөл характеристикасы бойынша . Екі жағдайда да



(10.1)

мұндағы өріс характеристикасына бөлінбейді.



өрісінің 0 және характеристикаына сүйеніп, -ға



көпүшелігінің барлық түбірлерін біріктіреміз. Осындай әдіспен алынған өріс жіктелуі дөңгелектің бөлу өрісі немесе жай өрісіндегі - шы дәрежелі бірлік түбір деп аталады. Бұл жағдайда көпмүшелігі әр түрлі сызықты көбейткіштерге ыдырайды; шынында да



туындысы өріс характеристикасына бөлінбейтіндіктен болғанда нөлге айналады. Осыдан – тің көпмүшелігімен ортақ түбірлері бар екендігі шығады. Сондықтан – да - шы дәрежелі бірлік түбір саны - қа тең болады.



Енді санын жай сандардың дәреже көбейтіндісі түрінде жіктейміз:



-шы дәрежелі бірлік түбір группада –дан аса элементтері болады, яғни , өйткені көпмүшелігінің түбірі болады. Сонымен, группада



болатындай элементі табылады.

элементі ретке ие. Бұл элементтің –ші дәрежесі 1–ге тең болғандықтан, оның реті санының бөлгіші болып табылады, бірақ оның –ші дәрежесі 1–ден өзгеше және сондықтан да оның реті –дің меншіксіз бөлгіші болып табылады.

көбейтіндісі өзара жай элементтердің көбейтіндісі болса,

ретіне ие болады.

**Анықтама.** Реті дәлдікке дейінгі бірлік түбірді - шы дәрежелі примитивті бірлік түбір деп атайды.



Примитивті бірлік түбірдің дәрежелері әр түрлі; барлық группада элемент болғандықтан, оның барлық элементі элементінің дәрежесі болып табылады. Сонымен:



-шы дәрежелі бірлік түбірдің группасы циклді және кез келген примитивті бірлік түбірінен туындайды.



-шы дәрежелі примитивті бірлік түбірдің санын анықтау енді оңай. Алдымен оны арқылы белгілейміз. саны ретті группаның ретті санына тең. Біріншіден, егер - жай санның дәрежесі болса, , онда элементінің дәрежесінен элементінің дәрежесін алсақ, -шы дәрежелі элемент болады:



(10.2)

Егер өзара жай екі көбейткішке жіктелсе, , онда - шы ретті әрбір элементті қандай да бір – ші ретті және – ші ретті элементтің көбейтіндісі түрінде көрсетіміз, керісінше, осындай әрбір көбейтінді - шы ретті элемент болып табылады. – ші ретті элементтер элементінен туған – ші ретті циклдік группаға жатады; осы элементтердің саны – ге тең. Дәл солай – ші ретті элементтердің саны – ке тең; көбейтінді саны үшін келесі теңдік орындалады:



Егер - санының өзара жай көбейткіштерге жіктелуі болса, онда келесі теңдік орындалады:



яғни, (10.4) формулаға сәйкес

орындалады.

Сонымен:

-шы дәрежелі примитивті бірлік түбір саны мынаған тең:



айнымалысын енгіземіз. - шы дәрежелі примитивті бірлік түбірді арқылы белгілейміз. Олар



(10.3)

мұндағы - санының оң бөлгіштерін жүріп өтеді. Шынында да, әрбір - шы дәрежелі бірлік түбір – шы дәрежелі бірлік түбірдің примитивті түбірі деп аталады, сондықтан, көпмүшелінгінің әрбір көбейткіштері көпмүшелігінің көбіне кіреді.



(10.3) формуласы көпмүшелігін бірмәнді түрде анықтайды, өйткені одан

(10.4)

шығады және егер барлық оң сандары үшін белгілі болса, (10.4) формуласын бөлу көмегімен алынады.

Осындай бөлу бір айнымалыға бүтін сандар көпмүшелігінде бөлу алгоритмінде орындалғандықтан, келесі тұжырым қорытылады:

Әрбір көпмүшелігі бүтін санды көпмүшелік болады және өрісінің характеристикасына тәуелді емес (ешер осы характиристикаға бөлінбесе).



көпмүшелігін дөңгелек бөлу көпмүшелігі деп атайды.

Мысалдар: Әрбір жай саны үшін

орындалды және осыдан

шығады. Жалпы түрде

Дәл осылай келесі көпмүшелікті жіктейміз:

Осыдан

шығады.

көпмүшелігі жіктелімді мүмкін, мысалы, кез келген өріс характиристикасында 3 – ке тең болғанда келесі жіктелу орындалыды:

Кейінірек, жай өрістің 0 характиристикасында көпмүшелігі жіктелмейтінін көреміз, өйткені - шы дәрежелі примитивті бірлік түбірлер түйіндес.



**Теорема.** Егер - - ші дәрежелі бірлік түбір болса, онда

болады.

Жай өрістердің характиристикасында шекті элементтер сандарының өрісін кездестірдік. Шекті өрісті Галуа өрісі деп бірінші зерттеушінің Эварист Галуа есімімен атаған. Алдымен бірнеше жалпы қасиеттерін орнатамыз.

- Галуа өрісі және – оның элементтерінің саны болсын.



өрісінің характиристикасы нөлге тең болуы керек, өйткені басқаша - да шексіз элементтер санынан тұратын өрісінің нөл характиристикасы болар еді. – берілген шекті өрістің характиристикасы болсын. Жай өрісі онда модулі бойынша алынған бүтін санды сақинаның қалындылар классының сақинасына изоморфты, сондықтан элементтерін құрайды.



Жалпы шекті элементтер саны болғандықтан, бұл өрісте ішінде элементтерінің ең үлкен сызықты тәуелсіз жүйесі болады. Онда – кеңейтілуінің дәрежесі және - дағы әрбір элемент мына түрге келеді:



(10.5)

мұндағы коэффициенттері өрісінен екені айқын.



Әрбір коэффициенті үшін мүмкін мәні бар; осыдан (10.5) өрнегінің дәл түрі бар екендігі шығады. Бұл өрнектер өрістің элементтерін беретіндіктен, келесі теңдікті аламыз:

Сонымен, келесі тұжырым дәлелденді: шекті өрістің элементтерінің саны характиристикасының дәрежесі деп аталады, осы дәреженің көрсеткіші кеңейтілуінің дәрежесіне тең.

Нөлден арылған кез келген дене мультипликативті группаға айналады. Галуа өрісі жағдайында бұл абельдік группа және санының бөлгіші болуы керек; яғни,кез келген үшін .

Бұл жағдайда

теңдеуі болғанда түбірі бар болады. Яғни өрістің бар элементтері көпмүшелігінің түбірі болады. Егер – өрісінің элементтері болса, онда келесіге бөлінеді

Дәрежелер теңдігі бойынша

орындалады**.**  өрісіне бірігетін көпмүшелігінің барлық түбірлерден тұрады. Осы шарттарымен өрісі изоморфизм дәлдігіне дейін бірмәнді анықталады. Яғни, берілген және элементтері элементтерінің өрісінде изоморфты.



Енді әрбір және үшін элементтерінің өрісінің бар болатынын көреміз.

жай өрісінің характиристикасынан бастаймыз және өрісіне көпмүшелігі толығымен жіктелетін сызықты көбейткіштерді құрамыз. Бұл өрісте көпмүшелігінің түбірлер жиынын қарастырамыз. Соңғысы өріс болады, себебі және теңдіктерімен



шығады, жағдайында

болады, сонымен қарастырылып отырған көпмүшеліктің түбірлерінің айырмасы және қатынасы қайтадын түбір болады.

көпмүшелігі жай түбірлерге ие, өйткені салыстыруы түріндегі

туындысына тең, ал -1 нөл емес. Түбірлер жиыны элементтерінің өрісінің элементтер жиыны болады.

Біз келесіні дәледейік:

Әрбір жай сан дәрежесі үшін изоморфизм дәлдігіне дейін тек бір элементтерінің Галуа өрісі бар болады. Бұл элементтер көпмүшелердің түбірлері болып табылады.

элементтерінің Галуа өрісі келесіде арқылы белгіленеді.

қояйық, онда нөлден өзгеше Галуа өрісінің барлық элементтері көпмүшелігінің түбірі болады, яғни - шы дәрежелі түбірлі бірлік. және өзара жай болғандықтан, бірлік түбірлер үшін келесі орындалады:



Өрістің нөлден өзгеше барлық элементтерінің дәрежесі қандай да бір - шы дәрежелі примитивті бірлік түбірдің дәрежесі болып табылады. Немесе Галуа өрісінің мультипликативті группасы цциклдік.



**Теорема.** Егер - – да - шы дәрежелі примитивті бірлік түбір болса, онда  **-** дағы барлық нөлдік емес элементтер элементінің дәрежесі болады.



**Дәлеледеуі.** Әрбір элементі үшін өрісте оның – шы дәрежесі табылады.

болғандықтан, әр түрлі элементтер әр түрлі – шы дәрежеге ие. Өрісте қанша – шы дәреже бар болса, сонша элемент бар. Сондықтан барлық элементтер –шы дәрежелі болады.

Енді өрісінің автоморфизмін анықтайық.

бейнелеуі автоморфизм деп аталады. Шынында да, соңғы теоремаға сәйкес бейнелеуі келесі түрде болады:

Бұл автоморфизмнің дәрежелері –ны –ға көшіріледі. Осылай біз автоморфизмін таптық.

Басқаша жақтан қарағанда автоморфизм саны – нан аспау керек. Кез келген автоморфизм примитивті түбірді түйіндес элементке көшіреді, яғни көпмүшеліктің түбірі нөлге және – ға айналады. Кез келген дәрежелі көпмүшелік түбірі – нен аспайды. Жоғарыда анықталған автоморфизмі жалғыз мүмкін болып табылады.

үшін орындалатын теоремалар дербес жағдайында қалындылар классының теоремасы айналады және элементарлық сандар теориясының теоремасына сәйкес келеді. Солар:

1. модулі бойынша салыстырудың дәрежесі қанша болса, сонша модулі бойынша түбірге ие.
2. Ферма теоремасы: кез келген үшін.
3. Кез келген – мен жай болғандықтан, модулі бойынша қандай да бір санының дәрежесімен салыстырмалы « модулі бойынша алғандағы түбірі» табылады. ( Басқаша: модулі бойынша қалындылар классының модулі, нөлден өзгеше және циклдік болады).
4. болғандықтан өрісінің нөлден өзгеше элементтерінің көбейтіндісі 1-ге тең. болғанда Вильсон теоремасын береді:

Негізгі әдебиеттер:

1. Ешкеев А.Р. Группалар теориясының элементтерінің кейбір жаттығуларының шешімдері мен мысалдары. Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 47 б., 2003.
2. Асенова А.Е., Әсен Е.Қ. Сандар теориясына кіріспе. «Болашақ» баспасы, Қарағанды 2007.
3. Сексенбаев Қ.С., Жетпісов Қ.Ж. Көпмүшеліктер сақинасы. Қарғанды, 2000. 130 б.

Қосымша әдебиеттер:

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. В трёх частях. − М.: МЦНМО, 2009.
2. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. СПб.: Лань, Физматкнига, 2007. 288 с.
3. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. Лань, 2009.