Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғарғы білім министрлігі

Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті

Математика және ақпараттық технологиялар факультеті

Профессор Т.Ғ. Мұстафин атындағы алгебра, математикалық логика және геометрия кафедрасы

**Токмагамбетов Нариман Сарсенович**

**Базылжанова Айгерим Сериковна**

**Мусина Назерке Мухтарамқызы**

**Жантасова Ботагоз Бекетовна**

**«Ықтималдықтар теориясы» пәні бойынша**

**Дәрістер курсы**

білім беру бағдарламасы: «6B05402- Механика»

Қарағанды 2023

**№1 дәріс. Ықтималдықтар теориясы пәні. Комбинаторика**

Жоспар:

1. Ықтималдықтар теориясы ғылымы.

2. Комбинаторика туралы ұғым.

3. Комбинаторика элементтерінің анықтамалары мен қасиеттері.

*Ықтималдықтар теориясы ғылымы.*

«Ықтималдықтар теориясы» пәні - классикалық университеттердің математика және математикаға жақын бағыттар (информатика, механика, математикалық және компьютерлік модельдеу, ақпараттық жүйелер т.с.с.) мамандықтары үшін мамандықтардың жалпыға міндетті білім стандарттарының оқытылуға міндетті пәндерінің құрамына кіретін іргелі математикалық пәндердің бірі. Бұл пән сонымен қатар көптеген жаратылыстану салалары, техникалық және экономикалық мамандықтар бойынша оқытылатын жоғары математика курсының аса маңызды бөліміне жатады, тіпті, кейбіреулері (әсіресе, жаңа экономикалық бағыттардағылары) үшін бірегейі де болып табылатыны сөзсіз.

Бұл оқу құралы математика және ақпараттық техналогиялар және физика техникалық факультеттердің студенттеріне арналған оқу құралын ұсынады және студенттерге Ықтималдықтар теориясы бойынша міндеттерді шешу әдістемесін меңгеруге көмек көрсетуді мақсат етеді. Семинарда негізгі типтік есептердің шешімдері берілген, бұл оны қашықтықтан оқыту технологиясы бойынша оқитын студенттердің ықтималдық теориясын өз бетінше зерттеуінде пайдалануға мүмкіндік береді.

Мұнда қойылған мәселелер шеңбері мен мазмұны педагогикалық және техникалық жоғары оқу орындарына арналған Ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистика бойынша қолданыстағы бағдарламамен толықтай қамтыйды.

Ықтималдық теориясы бойынша оқу құралында Ықтималдық теориясы бағдарламасының барлық бөлімдері бойынша есепттермен қамтылған. Әр бөлімнің басында теориялық материалдың қысқаша мазмұны беріледі, егжей-тегжейлі түсіндірумен типтік есептердің шешімі келтіріледі.

Біздің оқу құралының тапсырмаларының ерекшелігі, ұсынылған нұсқаулықта педагогикалық және техникалық мамандықтар бағдарламаларын қанағаттандыратын барлық тапсырмалар түрлері берілген.

Авторлар тапсырмалардың мазмұны нақты сипатта болуын қамтамасыз етуге тырысты, сондықтан оларды құрастыру кезінде нақты материалдар айтарлықтай пайдаланылды.

Осы жоғарыда айтылғандарды ескере отырып, бұл оқу құралын жазу барысында біз аралық бағытты ұстандық: оқушыны пәнге кіріспемен таныстыру барысында теориялық-жиындық және таза математикалық қиындықтардан қашығырақ тұру мақсатында көлемі жеткілікті үлкен алғашқы тарауды кездейсоқ элементар оқиғалар кеңістігі тақырыбына арнадық та, басқа тараулардың барлығының дерлік материалдарын жоспар негізінде баяндадық.

*Комбинаторика туралы ұғым.*

Шектелген жиынның элементтерінен қандай да бір ережелер бойынша әртүрлі комбинациялар құрастырылатын және олардың саны табылатын есептерді Комбинаторикалық есептер деп аталады.

Комбинаторикалық есептерді қарастыратын математиканың бөлігі комбинаторика деп аталады. Комбинаторика ғылым ретінде XVII ғасырдан бастап қарастырылған. Осы кезенде ықтималдықтар теориясы пайда болды.

Комбинаторикадағы мәселелерді шешудің негізінде келесі екі ереже бойынша қарастырылады:

* *Қосу ережесі.* Егер әртүрлі *А* және *В* элементтерін сөйкес п және k рет жолмен таңдап ала алатын болса, онда осы екі элементтің біреуін (*А*-ны болмаса *В*-ны) k+п рет жолмен тандап алуға болады.
* *Көбейту ережесі.* Егер бір топта k элемент, ал екінші топта п элемент болса, онда әрбір топтың бір элементтен алып қүрылған қосақтардың саны п\*k көбейтіндісіне тең болады.

*Комбинаторика элементтерінің анықтамалары мен қасиеттері.*

Анықтама. Берілген әртүрлі п элементген *k* элемент бойынша орналастырулар деп, әрқайсысы бір-бірінен не құрамы бойынша, не орналасу реті бойынша ажыратылатын комбинацияларды айтады.

Орналастырулардың формуласы келесі түрде анықталады:

. (1)

Анықтама. Берілген әртүрлі п элементтен *k* элемент бойынша қайталанбалы орналастырулар деп белгілі бір ретпен жазылған *k* элементтен тұратын комбинацияларды айтады. Мұнда әрбір элемент комбинацияға бірнеше рет кіруі мүмкін.

Қайталанбалы орналастырулардың жалпы саны келесі формуламен анықталады:

**.** (2)

Анықтама. Берілген әртүрлі п элементтен п элемент бойынша алмастырулар деп әрқайсысы бір-бірінен тек орналасу реті бойынша ғана ажыратылатын комбинацияларды айтады.

Алмастырулардың жалпы саны:

. (3)

Сондай-ақ алмастыруларды орналастырулардың жеке түрі ретінде қарастыруға болады, яғни  болса, онда

.

Аныктама. п элементтен п элемент бойынша қайталанбалы алмастырулар деп п элементтен тұратын комбинацияларды айтады. Яғни бұл анықтамада екі жағдай болуы мүмкін:

1. Егер к=п болса, яғни барлық элементтер әртүрлі болса, онда (3) формуласы бойынша

*.*

1. Егер к<п болса, онда қайталанбалы алмастырулар саны мына формуламен анықталады:

. (4)

Анықтама. Берілген әртүрлі п элементген *k* элемент бойынша терулер деп әрқайсысы бір-бірінен тек құрамы бойынша ажыратылатын комбинацияларды айтады.

Терулердің жалпы саны келесі түрдегі формуламен есептелінеді:

 (5)

Анықтама. Берілген п элементтен *k* элемент бойынша қайталанбалы терулер деп бір-бірінен құрамы бойынша ажыратылатын комбинацияларды айтады. Мұнда бір элемент комбинацияға бірнеше рет кіруі мүмкін.

Қайталанбалы терулер саны келесі түрдегі формуламен анықталады:

 (6)

Бұл жерде n! (n факториал) мына түрде есептелінеді n!=1\*2\*3…(n-1)\*n және 0!=1 деп түсінетін боламыз.

*1.1 мысал.* Асханада 5 бірінші тағам, екінші тағамнан 4 және үшінші тағамнан 3 бар. Олардан қанша жолмен толық түскі ас жасауға болады?

*Шешуі:* Бірінші тағамдарды 1, 2, 3, 4, 5 сандарымен, екіншісін латын алфавитінің әріптерімен белгілейік *x, y, z, t,* үшіншіcің - грек алфавитінің әріптерімен α, β, γ. Содан кейін кез келген түскі ас бір-біріне сәйкес келетін жолды (, , ) деп белгілеу еңгізейік, мұнда  бес элементті сандар жиынынан,  ( - ге қарамастан) - латын алфавитінің әріптерінің 4 элементті жиынынан,  таңдалады (, - ге қарамастан) - грек алфавитінің үш элементті әріптер жиынтығынан. Сондықтан ереже бойынша барлығының туындылары бар 5·4·3=60 үш тағамнан тұратын 60 таңдау мүмкіндігі бар.

*1.2 мысал.* Әрбір И, Н, Г, А, Е, Т, Р, Л әріптері бөлек карталарға жазылған. Содан кейін карталар араластырылып кез келген ретпен бір қатарға орналастырылған. Сонда “ИНТЕГРАЛ” сөзінің пайда болуының қанша комбинациялар саны бар?

*Шешуі:* Берілген сегіз картаның бір қатарға әртүрлі орналасуларының бір-бірінен айырмашылығы олардың қандай ретпен орналасқандығында болады. Сондықтан ондай орналасулардың жалпы саны (3) формуламен анықталады, яғни

.

*1.3 мысал*. Әрқайсысында бір әріп жазылған карталардан “ЛОГИКА” сөзі құрылған. Карталарды араластырып, содан кейін бір-бірлеп алған ретімен сөз құрастырылады. Сонда “ЛОГ” сөзінің пайда болуының қанша комбинациялар саны бар?

*Шешуі:* Берілген алты карталардан үш карта бойынша орналастырулар саны . Сондықтан,

.

Осы жерде комбинаторика формулаларын пайдаланғанда жоғарыдағы айтылған екі ережені жиі қолданатынымызды ескерте кеткен жөн.

*1.4 мысал.* Цехта 7 ер адам, 5 әйел адам жұмыс істейді. Табельдегі нөмірлері бойынша 8 адам тандап алынды. Таңдап алынған адамдардың ішіңде 3 әйел бар болуының мүмкін мәндерің табу керек.

Шешуі: Табелъдегі нөмірлері бойынша барлығы 12 адамнан 8 адам таңдап алу керек. Бірақ оның 3-і әйел адам екені белгілі.

Ал 3 әйелді табельдік нөмерлері бойынша 5 өйелдің ішінен таңдап алудың саны (5) формула бойынша:

,

cондай-ақ 7 ер адамнан 5 ер адам таңдаудың саны:

.

Енді көбейту ережесін пайдалансақ таңдап алынған 8 адамның ішінде 3 әйел 5 ер адам болу мүмкіндіктерінің жалпы саны т=т1\*т2=210 тең.

*1.4 мысал.* 1-ден 30-ға дейінгі натурал сандар берілген. Олардың қосындысы жұп болатындай үш санды неше жолмен таңдауға болады?

*Шешуі:* Егер барлық қосылғыштар жұп сандар немесе бір қосылғыш жұп, ал қалған екеуі тақ болса, үш санның қосындысы жұп болады. 15 жұп саннан үш санды таңдауға болады  әр түрлі тәсілдермен, өйткені таңдалған қосылғыштардың реті маңызды емес. Сондай ақ 15 тақ сандар ішінен келесі түрдегі тандау жасаймыз  осындай ьаңдаудан кейін біз тағы бір 15 жұп саннан келесі дей тандау жасаймыз . Қосу және көбейту ережелерін қолданып келесі өрнекті аламыз:

.

Жауабы: 2030 жолмен таңдауға болады.

*1.5 мысал.* Кітап сөресінде әр түрлі авторлардың 7 кітабы және бір автордың үш томдық кітаптары орналасқан. Бір автордың кітаптары қатар тұруы үшін бұл кітаптарды кітап сөресіне қоюдың қанша жолы бар?

*Шешуі:* Бір автордың үш кітабын бір кітап ретінде елестетіп көрейік. Онда біз 8 кітап аламыз, сондықтан оларды  жолымен кітап сөресіне қоюға болады. Сонымен қатар, бір автордың 3 кітабын бір-бірімен  тәсілдерімен қайта реттеуге болатындығын және көбейту ережесін қолдана отырып, біз көрсетілген шартта сөреде кітаптарды орналастырудың барлық әдістерінің жалпы санын табамыз:

.

Жауабы: 241920 әдіспен кітап сөресіне орналастыруға болады.

*1.6 мысал.* Қанша әртүрлі тәсілмен төмендегі сөздердін әріптердің орындарын ауыстыруға болады?

а) Математика, б) Гипербола с) Определение.

*Шешуі:*

а) Математика сөзінде жалпы  әріп бар. Ал М әріпі 2 рет кездеседі, сондықтан . Сол сияқты А әріпі , , ,  және . Ары қарай біз жоғарыдағы айтылған (4) формуланы пайдаланып келесі есептеуді аламыз:

151200.

Жауабы: 151200 әдіспен орын алмаструға болады.

б) Гипербола сөзінде барлығы 9 әріп бар және әріптер әртүрі болғандықтан ол келесі түрдегідей анықталады:

.

Жауабы: 362880 әдіспен орын алмаструға болады.

с) Определение. Жоғарыда көрсетілген (а) есебіне толықтай сәйкес келеді және шығару жолы бірдей:



Жауабы: 1663200 әдіспен орын алмаструға болады.

*1.7 мысал.* 3 және 6 цифрларының көмегімен әртүрлі қанша үш орынды сан жазуға болады?

Шешуі: Барлығы 3 және 6 екі цифрлар берілгендіктен іздеп отырған комбинацияларды бірден жазуға болады: 333, 336, 363, 633, 666, 663, 636, 633 барлығы 8 сан болады. Ал осы жауапты (8) формуласын пайдаланып та алуға болады.



Жауабы: Барлығы 8 сан жазуға болады.

*1.8 мысал.* Гүл дүкенінде 4 түсті гүлдер бар. Алынған 9 гүлден қанша әдіспен букет жасауға болады?

Шеіпуі: Сатып алынған гүл саны 9-ге тең. Сондықтан жасалған букет 9 гүлден тұрады. Ал осы букетке төрт түсті гүлдердің әрбір түсінен бірнеше гүл кіруі мүмкін. Олай болса (6) формуланы пайдалансақ:



Жауабы: 220 әдіспен букет жасауға болады.

*Негізгі әдебиеттер:*

1. В. Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие /- Изд. 11-е, стер. - М. : Высш. шк., 2005. - 479 с.

2. Y. A. Rozanov. Probadility theory: a concise course [Текст] : научное издание / - New York : Dover publications, INC, 2013. - 148 p.

3. К.В. Балдин, В.Н. Башлыков. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / - М.: Дашков и К, 2016. - 472 c.

4. П.С. Геворкян, А.В. Потемкин, И.М. Эйсымонт. Теория вероятностей и математическая статистика / - М.: Физматлит, 2016. - 176 c.

5. К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В Рукосуев. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / - М.: Дашков и К, 2016. - 472 c.

*Қосымша әдебиеттер:*

1. Қаратаев Жақсыберді. **Ықтималдықтар теориясы**: оқу құралы / - Алматы : CyberSmith, 2017. - 400 б.

2. Г.Г. Битнер.. Теория вероятностей: Учебное пособие / - Рн/Д: Феникс, 2012. - 329 c.

3. Қазешев А.К. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Есептер жинағы. – Алматы «Ғылым», 2005, 182 б.

4. В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах / - М.: Ленанд, 2015. - 384 c.

**№2 дәріс. *Оқиғалар және олардың түрлері. Оқиғаларға амалдар қолдану және ол амалдардың қасиеттері. Ықтималдықтың классикалық анықтамасы***

Жоспар:

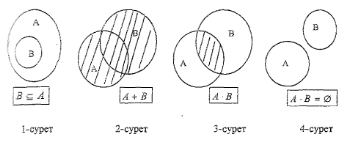
1. Оқиғалар және олардың түрлерінің негізгі қасиеттері.

2. Жиындар ұғымының оқиғалармен байланысы.

3. Ықтималдықтар теориясының негізгі анықтамасы.

*Оқиғалар және олардың түрлерінің негізгі қасиеттері.*

Қазіргі кезде ықтималдықтар теориясы жиындар теориясының негізгі ұғымдарын пайдаланып, аксиоматикалық түсінік негізінде құрылады. Сондықтан төменде жиындар теориясының негізгі ұғымдары келтірілген. Жиындар элементтерінің сандарына байланысты ақырлы жиындар, ақырсыз жиындар болып бөлінеді. Егер ақырсыз жиындардың элементтерін белгілі бір ретпен санауға болатын болса, онда ондай жиындар саналатын жиындар деп аталады. Натурал сандар жиыны саналатын жиынның мысалына жатады. Екі жиынның сәйкес элементтері өзара тең болса, онда ол жиындар тең жиындар немесе эквивалентті жиындар деп аталады (). Егер  жиынының әрбір элементі  жиынына кіретін болса, онда  жиыны  жиынының ішкі жиыны деп аталады (ВА)(1-сурет)



Сурет 2.1. Эйлер-Венн диограммасы.

*Жиындар ұғымының оқиғалармен байланысы.*

*Анықтама.*  және  жиыңдарының барлық элементтерінен құрылған жиынды  және  жиындарының қосыңдысы () деп атайды (2-сурет).

*Анықтама.*  және  жиындарына ортақ элементтерден құрылған жиынды осы жиындардың көбейтіндісі () деп атайды (З-сурет).

Енді кездейсоқ төжірибелердің математикалық моделін жасап оны зерттеу үшін қолданатын негізгі ұғымдарды келтірелік.

Анықталық,  - тәжірибеде пайда бола алатын барлық мүмкін нәтижелердің жиыны болсын. Осы жиынның әрбір элементі элементарлық оқиға деп аталады.

Жоғарыда қарастырылған оқиғаларда тиынның сан немесе елтаңба жазылған жақтарының пайда болуы 1, 2, 3, 4, 5; 6 саңдары жазылған ойын кубының бірдей жақтарының пайда болуы, жәшіктен кез келген түсті бір шардың алынуы — элементарлық оқиғалардың мысалдары болады.

Егер элементарлық оқиғалар жиыны төмендегі шарттарды қанағаттандырса:

а) тәжірибе нәтижесінде әр уақытта элементарлық оқиғалардың біреуі пайда болады;

б) кез келген екі  және оқиғалары бірге пайда болмайды;

онда осы элементарлық оқиғалардың жиынын элементарлық оқиғалар кеңістігі деп атайды және  арқылы белгілейді. Әдетте = {} немесе = {} , яғни  оқиғалары саны ақырлы немесе саналатын жиындар қарастырылады. Ал  кеңістігінің ішкі *жиындарын* оқиғалар деп атайды.

Сонымен кез келген  оқиғасы  кеңістігінің ішкі жиыны болып табылады, яғни . Егер  =  болса, онда  оқиғасы *ақиқат* оқиға деп аталады. Сондай-ақ элементарлық оқиғалар жиынына қосымша бос жиын  қосылып қарастырылады. Бұл жиынға *мүмкін емес* оқиға сәйкес қойылады.

Мысалы, ойын кубын лақтыру тәжірибесін қарастырсақ, мұнда

Ω= {},  цифрлар жазылған ойын кубының жақтарының пайда болуы, сол сияқты тиын лақтыру тәжірибесінде

Ω= {}. Енді ойын кубын лақтырғанда пайда болатын кейбір оқиғаларды қарастыралық:

А1 = {} - үш санына еселі цифр жазылған ойын кубының жақтарының пайда болуы;

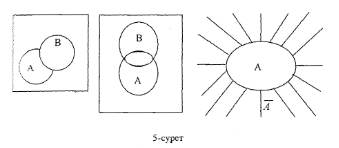
А2  = {} - тақ сан жазылған жақтың пайда болуы;

А3  = {} - жұп сан жазылған жақтың пайда болуы;

А4 = {} мүмкін емес оқиға;

А5  = {,,} - ақиқат оқиға.

Айталық қарастырылып отырған тәжірибеге байланысты элементарлық оқиғалар кеңістігі белгілі болсын (). Осы тәжірибеде пайда болатын кез келген  оқиғасы осы -ның жиыны болып табылады, яғни АΩ. Сондықтан оқиғаларға қолданатын амалдар (қосу, көбейту) сәйкес жиындарға қолданатын амалдар сияқты анықталады. Егер элементарлық оқиғалар кеңістігін тіктөртбұрыш ретінде, ал оқиғаларды оның бөлігі ретінде бейнелесек, онда оқиғалардың қосындысын, көбейтіндісін және қарама-қарсы оқиғаларды төмендегідей бейнелеп көрсетуге болады.



Сурет 2.2. Эйлер-Венн диограммасының қасиеттері.

Сондай-ақ оқиғаларды қосу, көбейту амалдары төмендегі қасиеттерді қанағаттандырады:

1. , 3. ,

2. , 4. ,

5. .

Осыдан төмендегі тендіктердің орындалатындығы шығады:

, , , , , , , , .

Өзара қиылыспайтын  және  жиындарына сәйкес оқиғалар үйлесімсіз оқиғалар деп аталады, яғни . Ал егер , i≠j, ,  болса, онда бұл оқиғалар *қос-қостан* үйлесімсіз оқиғалар деп аталады.

Егер,  болса, онда  оқиғалар тобы оқиғалардың *толық тобы* деп аталады, яғни олардың қосындысы ақиқат оқиға. Жоғарыда қарастырылған мысалда оқиғалары толық топ құрайды, себебі 

 ={}.

Оқиғанын ықтималдығы  төмендегі аксиомаларды қанағаттандырады:

1. Кез келген оқиғаның ықтималдығы нөл мен бірдің арасында болады:

 (7)

2. Ықтималдықтарды қосу аксиомасы: Егер А және В үйлесімсіз оқиғалар болса, онда

 (8)

3. Саналатын оқиғалар жиыны үшін ықтималдықтарды қосу аксиомасы:

Егер  үйлесімсіз оқиғалар болса, онда:

 (9)

Егер элементарлық оқиғалардың ықтималдықтары белгілі болса, онда ықтималдықтар теориясының аксиомаларының көмегімен кез келген оқиғаның ықтималдығын есептеуге болады. Алайда бұл аксиомалардың элементарлық оқиғалардың ықтималдықтарын анықтауға ешбір көмегі жоқ. Ал элементарлық оқиғалардың ықтималдықтары жүргізіліп отырған тәжірибенің ерекшеліктерін пайдаланып анықталады.

Мысалы, жоғарыда қарастырылған тәжірибелерде:

1.  - бұл тиынның жақтарының пайда болу ықтималдығы;
2.  - бұл ойын кубының цифр жазылған жақтарының пайда болу ықтималдығы.

Бұл ықтималдықтар тиын мен ойын кубының симметриялығын пайдаланып анықталып отыр.

Егер  оқиғалары үшін  орындалса, онда бұл оқиғалар *теңмүмкіндікті* оқиғалар деп аталады.

Айталық, элементарлық оқиғалар кеңістігі  теңмүмкіндікті оқиғалардың жиыны болсын, яғни

1. 
2. - толық топ.

Олай болса,

 (10)

Егер  онда  элементарлық оқиғалары  оқиғасына қолайлы элементарлық оқиғалар деп аталады.

*Ықтималдықтар теориясының негізгі анықтамасы.*

Анықтама (*ықтималдықтың классикалық анықтамасы*). Берілген тәжірибедегі теңмүмкіндікті элементарлық оқиғалар кеңістігінің  оқиғасына қолайлы оқиғалар санының осы кеңістіктің барлық оқиғалар санына қатынасы  оқиғасының ықтималдығы деп аталады.

Бұл анықтамадан:

 (11)

формуласын аламыз.

Мұндағы т -  оқиғасына қолайлы элементарлық оқиғалар саны, п - элементарлық оқиғалар кеңістігінің барлық оқиғалар саны. Осы анықтамадан (11) формула негізінде т=п болса,  болады да,  аламыз, яғни ақиқат оқиғаның ықтималдығы 1-ге тең, енді т=0 болса,  яғни мүмкін емес оқиға, онда , мүмкін емес оқиғаның ықтималдығы нөлге тең. Әдетте ақиқат оқиғаны - , ал мүмкін емес оқиғаны – арқылы белгілейді, яғни , .

*2.1-мысал:*  кез келген оқиғалар болсын.

Онда төмендегі



.

оқиғаларының мағынасы қандай?

*Шешуі:*  оқиғасы  және  оқиғаларының бірге пайда болуын білдіреді;  -  және  оқиғаларының ешқайсысының пайда болмағандығын көрсетеді.  -  және  оқиғаларының ең болмағанда біреуінің пайда болатындығын білдіреді  және  оқиғаларының тек қана біреуінің пайда болатыңдығын көрсетеді;  —  оқиғаларының тек қана біреуі пайда болады немесе  пайда болады, яғни  пайда болатындығы шығады.

*2.2-мысал.* Мерген нысанаға екі рет оқ атты.  *- і*-ші атқанда нысанаға тигізуі (*і=1, 2*). Енді мына  - ең болмаса бір рет тигізді,  - бір рет қана тигізді,  -екі рет тигізді,  - екі рет тигізе алмайтын оқиғаларды ,  оқиғалары арқылы өрнекте.

*Шешуі:* ,  - сәйкес бірінші және екінші оқ атқанда нысанаға тигізуі, ал және  сәйкес бірінші, екінші атқанында нысанаға тигізе алмауы.

Сонда , оқиғасы екі оқиғаның қосындысының анықтамасы бойынша не  не  немесе  оқиғаларының пайда болатынын, яғни ең болмағанда бір оқиғаның пайда болатынын көрсетеді, олай болса .

Сол сияқты  тек бір рет нысанаға тигізу;

 — нысанаға екі рет тигізу;  екі рет тигізбеуі.

*2.3-мысал.* Қобдишада бірдей өлшемді және бірдей салмақты 10 шар бар, олардың 4-і қызыл және 6-ы көк. Қобдишадан бір шар алынады. Осы алынған шардың көк болу ықтималдығын табу керек.

*Шешуі:* «Алынған шардың көк болу» оқиғасын *A* әрпімен белгілейміз. Аталмыш тәжірибенің 10 түрлі нәтижелердің 6-ы оқиғаға жағымды. Енді, ықтималдық жағымды оқиға мен мүмкін болу нәтижелердің қатынасы арқылы табылады:



мұнда   демек

.

Ықтималдықтың анықтамасын пайдаланып есептер шығарған кезде комбинаторика формулалары жиі қолданылады. Сондықтан, табиғаты әр түрлі болып келетін, өзара айырмашылығы бар элементтерден құрастырылған комбинациялардың үш типіне бірнеше мысалдарды қарастырайық.

*2.4-мысал.*Бес бірдей карточкаларда А, Г, З, У, Я әріптері жазылған. Карточкалар араластырылып, ретсіз қатарға қойылды. Осыдан «АЯГУЗ» сөзінің шығу ықтималдығы қандай?

Шешуі:«АЯГУЗ» сөзінің шығу ықтималдығын *А* арқылы белгілейік. Әртүрлі бес элеметтен *Р5* орналастыру құруға болады:



демек, әртүрлі нәтижелердің шығу саны 120, ал қажеттісі - біреу-ақ.

Осыдан:   онда ;

*2.5-мысал.* Қорапта 5 қызыл, 3 жасыл және 2 көк қарындаш бар. Солардың арасынан 3 қарындаш алынды. Оқиғалардың келесідей ықтималдықтарын тап:

А – алынған бүкіл қарындаштар әр түсті;

В – алынған бүкіл қарындаштар бір түсті;

С – алынған қарындаштардың арасында біреуі көк;

Д – алынған қарындаштардың арасында екеуі бір түсті.

Шешуі: Қорапта барлығы 5+3+2=10 қарындаш.

1. 10 қарындаштың 3-ін таңдау тәсілдерін жалпы саны 10-ның 3-ке терулер арқылы анықталады:





Осыдан .

2. Егер алынған қарындаштар бір түсті болса, онда ол не 3 қызыл не 3 жасыл (3 көк болу мүмкін емес, себебі қорпта не бары 2 көк).

Сондықтан, қосынды ережесі бойынша





демек,



3. Егер 10 қарындаштың екеуі көк болса, онда көкті екі тәсілмен алуға болады , ал сегіздің екеуі көк түсті емес . Осыдан, көбейтіндінің ережесі бойынша: 



4.  оқиғасы - 2 қарандыштың бір түсті болуы үш оқиғаға біреуіне байлансты: 2 қызыл мен 1 жасыл немесе 1 көк; 2 жасыл мен 1 қызыл немесе 1 көк; 2 көк пен 1 қызыл немесе 1 жасыл.

 - 2 қызыл мен 1 басқа түстің таңдалу тәсілі; - 2 жасыл мен 1 басқа түстің таңдалу тәсілі; - 2 көк пен 1 басқа түстің таңдалу тәсілі.

Қосындының анықтамасы бойынша:



Демек:



*2.6-Мысал.* «Ротор» сөзінің әріптерінен 3 әріпті қатарынан қалағанда «тор» сөзінің шығу ықтималдығы қандай?

*Шешуі:*Бірдей әріптерді айыру үшін, оларды нөмерлеу қажет: . Нәтижелердің жалпы саны:  .

«Тор» сөзі  жағдайда шығады: 

 - әрпі бір тәсіл арқылы алынады, - әрпі екі тәсілмен,  - әрпі екі тәсілмен алынады.

Демек, іздеп отырған ықтималдығымыз

 тең.

*2.7-мысал.* Алынған 500 бұйымның 5-уі сынық. Сынық бұйымның жиілігін тап.

*Шешуі:*  оқиғасының жиілігін *W(A)* арқылы белгілейік. Барлық бұйымның саны , соның бесеуі  сынық, онда қатынас жиілігі бойынша:

.

*2.8-мысал.* Кітап сөресінде кездейсоқ ретпен 5 томнан тұратын анықтама қойылған:

а) кітаптар бірінші томнан бесінші томға дейін дұрыс ретпен орналасуының ықтималдығын табу керек;

в) ең болмағаңда бір томның ретті орнында тұрмаған жағдайдың ықтималдыңын табу керек.

*Шешуі:* Сынақ ретінде кітап сөресінде кітаптардың кез келген қойылуын қарастырайық. Сонда кітаптардың бұлай орналасуларының жалпы саны

n=Р5=5!=120

1. *А* әріпі арқылы кітап сөресінде кітаптардың том нәмірлерінің ретімен орналасуын білдіретін оқиғаны белгілейік. Бұл оқиғаға қолайлы элементарлық оқиға біреу-ақ. Сондықтан



2. *В* әріпі арқылы, ең болмағанда бір том ретті орнында болмауын білдіретін оқиғаны белгілейік. Мұндай оқиғалар саны т=п-*1*, шш т=119. Себебі кітаптардың том нөмірлері бойынша дұрыс орналасу саны бірге тең, ал қалған орналасулар *В* оқиғасын анықтайды. Сонымен *Р(В)*= 119/120.

Осы жерде *А* және *В* оқиғаларының қарама-қарсы екенін ескерсек, онда  екенін пайдаланып  табамыз, яғни бұрынғы жауапты алдық.

*2.9-мысал.* 4 және 5 цифрларының көмегімен әртүрлі қанша үш орынды сан жазуға болады?

*Шешуі:* Барлығы 4 және 5 екі цифрлар берілгендіктен іздеп отырған комбинацияларды бірден жазуға болады: 444, 445, 454, 544, 555, 554, 545, 544 барлығы 8 сан болады. Ал осы жауаптьі (2) формуласын пайдаланып та алуға болады.



Жауабы: Барлығы 8 сан жазуға болады.

Айталық п элементтер берілсін. Осы элементтерді к топтарға бөлейік. Әрбір топтағы элементтер өзара бірдей, ал әртүрлі топтардағы элементтер бір-бірінен бөлек. Енді әрбір топтағы элементтер санын сөйкес т1 т2, ..., тп арқылы белгілейік, сонда т1+т2+...+тк=п орындалады.

*2.10-мысал.* Мына 5; 3; 1; 5; 5; 1 цифрлардың көмегімен алты таңбалы қанша сан жазуға болады?

*Шешуі:* Берілген алты цифрды үш группаға бөлеміз: 1;1, 3;5, 5;5.

Есептің шарты бойынша (4) формуланы пайдалануға болады. Сонда



Жауабы: Барлыгы 60 сан жазуға болады.

*2.11-мысал.* Гүл дүкенінде 3 түсті гүлдер бар. Алынған 7 гүлден қанша әдіспен букет жасауға болады?

*Шешуі:* Сатып алынған гүл саны 7-ге тең. Сондықтан жасалған букет 7 гүлден тұрады. Ал осы букетке үш түсті гүлдердің әрбір түсінен бірнеше гүл кіруі мүмкін. Олай болса (6) формуланы пайдалансақ:



*Жауабы:* 36 әдіспен букет жасауға болады.

*Негізгі әдебиеттер:*

1. В. Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие /- Изд. 11-е, стер. - М. : Высш. шк., 2005. - 479 с.

2. Y. A. Rozanov. Probadility theory: a concise course [Текст] : научное издание / - New York : Dover publications, INC, 2013. - 148 p.

3. К.В. Балдин, В.Н. Башлыков. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / - М.: Дашков и К, 2016. - 472 c.

4. П.С. Геворкян, А.В. Потемкин, И.М. Эйсымонт. Теория вероятностей и математическая статистика / - М.: Физматлит, 2016. - 176 c.

5. К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В Рукосуев. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / - М.: Дашков и К, 2016. - 472 c.

*Қосымша әдебиеттер:*

1. Қаратаев Жақсыберді. **Ықтималдықтар теориясы**: оқу құралы / - Алматы : CyberSmith, 2017. - 400 б.

2. Г.Г. Битнер.. Теория вероятностей: Учебное пособие / - Рн/Д: Феникс, 2012. - 329 c.

3. Қазешев А.К. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Есептер жинағы. – Алматы «Ғылым», 2005, 182 б.

4. В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах / - М.: Ленанд, 2015. - 384 c.

**№3 дәріс. *Геометриялық ықтималдық. Ықтимаддықтарды қосу және көбейту теоремалары. Ең болмағанда бір оқиғаның пайда болуының ықтималдығы.***

Жоспар:

1. Геометриялық ықтималдық туралы ұғым.

2. Ықтималдықтарды қосу және көбейту теоремалары.

3. Ең болмағанда бір оқиғаның пайда болу теоремасы.

*Геометриялық ықтималдық туралы ұғым.*

Сонымен  формуласы барлық мүмкін емес сәйкес келмейтін жағдайлардың саны шектелмеген жағдайда мағынасын жоғалтады (шексіз жиынды құрайды). Алайда, кейде шексіз тең мүмкін емес сәйкес келмейтін жағдайлардың жиынтығына ұзындықтың, ауданның, көлемнің, уақыттың және т.б. кейбір өлшемдерде  сандық сипаттамасын беруге болады, ал қарастырылып отырған оқиғаның басталуына қолайлы осы жиынтықтың бір бөлігі сол өлшемдерде  сипаттамасын береді. Онда *А* оқиғасының ықтималдығы келесі дей қатынаспен анықталады:

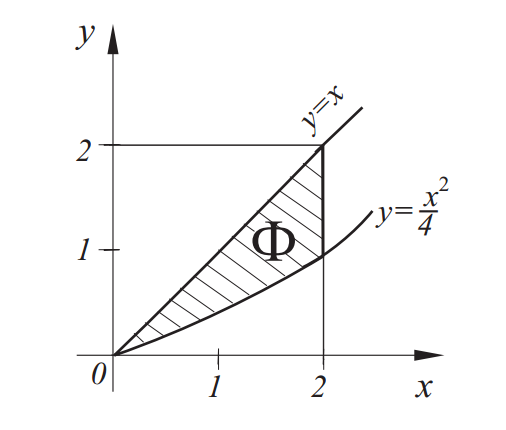
 (12)

*3.1-мысал.*  аралығынан екі  және  сандары кездейсоқ таңдалады. Бұл сандардың келесі  теңсіздіктерін қанағаттандыру ықтималдығын табыңыз.

*Шешуі.* Сынақ  аралығынан  және  сандарының жұбын кездейсоқ таңдаудан тұрады. Біз бұны квадраттың барлық нүктелерінің жиынтығынан кездейсоқ  нүктесін таңдау деп түсіндіреміз, оның жағы екіге тең. Координаталары теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыратын шаршының барлық нүктелерінің жиыны болып табылатын Ф фигурасын қарастырайық . Қызығушылықты тудыратын оқиға, егер таңдалған  нүктесі Ф фигурасына жататын болса ғана орын алады.

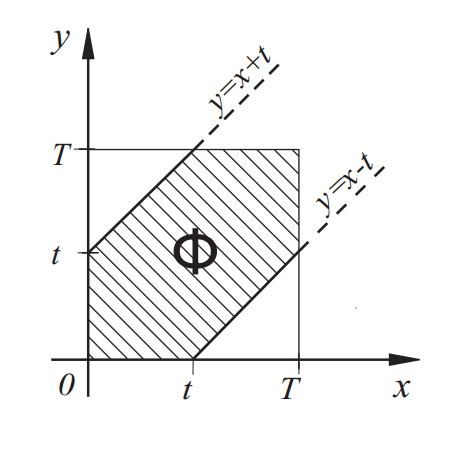
(12) формула бойынша қажетті ықтималдық фигураның ауданының Φ квадрат ауданына қатынасына тең:

.



Сурет 3.1. Ф функция графигі.

*3.2-мысал.*Екеуі белгілі бір жерде кездесуге келісті. Олардың әрқайсысы белгіленген жерге бір-бірінен тәуелсіз уақыттың кездейсоқ сәтінде [0; T] уақыт аралығы және t ∈ (0; T ) уақытынан артық емес күтеді. Мұндай жағдайларда кездесудің ықтималдығы қандай?



Сурет 3.3. Берілген түзудің графигі

*Шешуі.* Келісілген жерге бірінші тұлғаның келген уақытын  арқылы, екінші адамның келген уақытын  арқылы белгілейік. Бұл шарттан  және  уақыт аралығы [0; T]. Сынақ көрсетілген адамдардың кездесу орнына келу уақытын белгілеуден тұрады. Сонда осы сынақтың элементар нәтижелерінің кеңістігі *Ω={(x;y) : 0≤x≤T, 0≤y≤T}* квадратының барлық  нүктелерінің жиыны ретінде түсіндіріледі. Бізді қызықтыратын оқиға А – «кездесу болды» орын алады егер және тек таңдалған M нүктесі болса  координаталары  теңсіздігін қанағаттандыратын квадраттың барлық нүктелерінің жиыны болып табылатын  фигурасының ішінде болады. (12) формулаға сәйкес, қалаған ықтималдық  фигурасының ауданының  квадратының ауданына қатынасы болып табылады:



Бұл есепте алынған нәтижені талдай отырып, *t∈(0;T]* өскен сайын кездесу ықтималдығы арта түсетінін көреміз. Мысалы, *T=1* сағат, *t=20* минут болсын, содан кейін , яғни жоғарыда аталған шарттар бойынша бірнеше рет келісе отырып, кездесулер жағдайлардың жартысына қарағанда жиі болады.

*Ықтималдықтарды көбейту теоремасы*

Егер  және  тәуелді оқиғалар болса, онда

, (13)

мұнда ,  - шартты ықтималдықтар. Егер  және  тәуелсіз оқиғалар болса онда (13) формуладан

. (14)

Ықтималдықтарды қосу теоремасы

Егер  және  үйлесімсіз оқиғалар болса, онда

. (15)

Егер  және  үйлесімді оқиғалар болса, оңда

. (16)

*Ең болмаганда бір оқиганың пайда болуының ықтималдығы туралы теорема*

 оқиғалары жинақ бойынша тәуелсіз болсын. Осы оқиғалардың ең болмағаңда біреуінің (А оқиғасы) пайда болуының ықтималдығы мына формуламен анықталады:

 (17)

Жеке жағдайда, егер А1, А2, А3 ... Аn  оқиғаларының пайда болуының ықтималдықтары бірдей болса, яғни



Онда

 (18)

*3.3 мысал.* 36 картаның ішінен кез келген 2 карта алынсын. Осы картаның бір түсті болуының ықтималдығын табу керек.

*Шешуі:* Әуелі алынған екі картаның белгілі бір түске жататынының (айталық “қарға” болсын) ықтималдығын табалық. Белгілеу енгзелік. А - бірінші карта “қарға” болсын, В - екінші карта да болсын. Бұл екі оқиға тәуелді оқиғалар, яғни В-ның пайда болу ықтамалдығы А-ның пайда болуына, не пайда болмауына байланысты өзгеріп отырады. Сондықтан



Осыдан



Ал енді А1, А2, А3, А4 алынған екі карта сәйкес төрт түстің біріне жататындығын көрсететін өзара үйлесімсіз оқиғалар болсын. Сонда алынған екі картаның бірдей түсті (С оқиғасы) болуы А1, А2, А3, А4 оқиғаларының кез келгені орындалса пайда болады, яғни С= А1+ А2+ А3+ А4

Олай болса



*3.4 мысал.* Екі мерген атыс алаңында сынақ өткізуде. Бірінші мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы - 0,7, екіншісінікі - 0,8-ге тең. Егер екеуі де бір-бірден атыс жасаса, ең болмағанда біреуінің нысанаға дәл тигізетіндігінің ықтималдығы қандай?

*Шешуі.* Белгілеу енгізелік. *А* — бірінші мерген нысанаға дәл тигізді. *В* - екінші мерген нысанаға дәл тигізді. Бұл екі оқиға үйлесімді, себебі екі мерген де нысанаға дәл тигізуі мүмкін ғой. Сондықтан үйлесімді оқиғалардың қосындыларының ықтималдығы туралы теореманы (16) пайдаланып:

Р(А + В) = 0,7 + 0,8 - 0,7\*0,8 = 0,94 екенін табамыз.

Осы мысалды ең болмағанда бір оқиғаның пайда болуы туралы теореманы пайдаланып та шығаруға болатынын көрсетелік. Шынында да *В* — оқиғасы ең болмаса біреуінің нысанаға тигізуі болсын. Сонда



Бұл жерде



*3.5 мысал.* Екі жәшікке дайыңдалған деталь салынған. Бірінші жәшікте 10 деталь, оның үшеуі стандартты, екіншісінде — 15 деталь, оның алтауы стандартты. Әрбір жәшіктен бір-бірден кез келген деталь алынды. Алынған екі детальдің де стандартгы екенінің ықтималдығын табу керек.

*Шешуі:* Белгілеу енгізелік. А — бірінші жәшіктен алынған деталь стандартты, В — екінші жәшіктен алынған деталь стандартты.

Сондықтан Р(А)=3/10,Р(В)=6/15. Алынған екі деталь де стандартты болуы үшін  оқиғасы пайда болуы керек. Бұл екі оқиға да үйлесімді, себебі екеуі бірдей пайда бола алады, соңдай-ақ бұл оқиғалар тәуелсіз, себебі олардың пайда болуы бір-біріне байланыссыз. Сондықтан /15/ формуланы пайдалануға болады:



*3.6 мысал.*Деталь дайындау процесі үш операциядан тұрады. Бірінші операция кезінде сапасыз деталь дайындалудың ықтималдығы - 0,02, ал екіншіде — 0,03 және үшіншіде — 0,07. Сапасыз детальдердің пайда болуын тәуелсіз оқиғалар деп қарастырып, осы үш операциядан кейін сапалы деталь дайындаудың ықтималдығын табу керек.

*Шешуі:* Белгілеу енгізелік.  оқиғасы — бірінші операциядан кейін сапасыз детальдің пайда болуы;  — екінші операциядан кейін сапасыз деталь пайда болуы;  — үшінші операциядан кейін сапасыз деталь пайда болуы. Есептің шарты бойынша  тәуелсіз оқиғалар. Олай болса оқиғалары да тәуелсіз оқиғалар. Сондықтан  оқиғасы - үш операциядан кейін сапалы деталь дайындалуын анықтайды. Енді тәуелсіз оқиғалардың кебейтіндісінің ықтималдығының формуласын пайдаланып



екенін табамыз.

*3.7 мысал.* Сүңгуір қайықты іздеп табудың ықтималдығы 0,8, ал жойып жіберудің ықтималдығы 0,6-ға тең, Іздеп табылған кайықты жойып жіберудің ықтималдығы қандай?

*Шешуі:*  — оқиғасы сүңгуір қайықты іздеп тауып алуды,  — сүңгуір қайықты жойып жіберуді білдіреді. Сонда *Р(В)=0,6*. Есептің шарты бойынша іздеп табылған қайықты жойып жіберудің ықтималдығын, яғни *РА(В*) ықтималдығын табу керек.



Сонда 

*3.8 мысал.* Үш баскетболшы корзинаға бір-бірден доп лақтырды. Бірінші баскетболшының корзинаға доп түсіруінің ықтималдығы – 0,9, екіншісшікі — 0,8, үшіншісінікі — 0,7. Тек бір баскетболшы корзинаға доп түсіруінің ықтималдығы қандай?

*Шешуі:*  — бірінші баскетболшының корзинаға доп түсіруі, — екінші, үшінші баскетболшының корзинаға доп түсіруі. Бұл оқиғалар тәуелсіз. Енді мына оқиғаларды қарастырайық: -тек  оқиғасының пайда болуы,  тек  оқиғасының пайда болуы,  — тек  оқиғасының пайда болуы. Бұл соңғы үш оқиғалар үйлесімсіз, сондықтан



оқиғасы  оқиғаларының тек біреуінің пайда болуын білдіреді.

Сөйтіп:



*3.9 мысал.* Үш аңшы ұшып бара жатқан үйректі сәйкес 2/3, 3/4, 1/4 ықтималдықтарымен атып түсіре алады. Ұшып бара жатқан үйректі үшеуі де бір мезгілде атты. Үйректі атып түсіру ықтималдығы қандай?

*Шешуі:* Үйрек атып түсіру үшін ең болмағанда бір аңшының оғы дәл тиюі керек. Сондықтан жоғарыдағы формуланы пайдаланып



екенін табамыз.

Мұнда *А* — үйрек атып түсірілді, А1 - үйректі бірінші аңшы атып түсірді; А2 — үйректі екінші аңшы атып түсірді; *А3* — үйректі үшінші аңшы атып түсірді.

*3.10 мысал.* Екі жәшікке ақ және қара түсті бірдей шардар салынған. Айталық бірінші жәшікте т1 ақ, п1 қара, ал екіншісінде — ақ, п2 қара шарлар бар болсын. Екі жәшіктен бір мезгілде бір-бірден кез келген шарлар алынған. Алынған екі шардың ең болмағанда біреуі ақ шар болуының ықтималдығын табыңыз.

*Шешуі:* *А* — оқиғасы бірінші жәшіктен ақ шар алынғандығын білдірсін, *В* — екінші жәшіктен ақ шар алынғандығын білдірсін. Сонда *А+В* оқиғасы алынған екі шардың ең болмағанда біреуі ақ шар болғандығын білдіреді. Бұл екі оқиға үйлесімді. Сондықтан (16) формуланы пайдаланамыз.

Бұл жерде 

және *А* және *В* оқиғаларыкың тәуелсіздігін ескеріп



табамыз.

*3.11 мысал.* Жәшікте бірдей 15 бүйым бар. Жәшіктен екі сапалы бұйым алудың ықтималдығы 4/15-ке тең. Жәшікте қанша сапалы бұйым бар еді?

*Шешуі:* Белгілеу енгізейік. *А* — жәшіктен бірінші рет алғанда сапалы бұйым алынды, *В* — жәшіктен екінші рет алғанда сапалы бұйым алынды. Бұл екі оқиға тәуелді. Сондықтан, егер к - сапалы бұйымдар саны десек, онда:



Есептің шарты бойынша 

Осыдан .

Сонымен жәшікте 8 сапалы бұйым болған.

*Негізгі әдебиеттер:*

1. В. Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие /- Изд. 11-е, стер. - М. : Высш. шк., 2005. - 479 с.

2. Y. A. Rozanov. Probadility theory: a concise course [Текст] : научное издание / - New York : Dover publications, INC, 2013. - 148 p.

3. К.В. Балдин, В.Н. Башлыков. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / - М.: Дашков и К, 2016. - 472 c.

4. П.С. Геворкян, А.В. Потемкин, И.М. Эйсымонт. Теория вероятностей и математическая статистика / - М.: Физматлит, 2016. - 176 c.

5. К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В Рукосуев. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / - М.: Дашков и К, 2016. - 472 c.

*Қосымша әдебиеттер:*

1. Қаратаев Жақсыберді. **Ықтималдықтар теориясы**: оқу құралы / - Алматы : CyberSmith, 2017. - 400 б.

2. Г.Г. Битнер.. Теория вероятностей: Учебное пособие / - Рн/Д: Феникс, 2012. - 329 c.

3. Қазешев А.К. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Есептер жинағы. – Алматы «Ғылым», 2005, 182 б.

4. В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах / - М.: Ленанд, 2015. - 384 c.

**№4 дәріс. *Толық ықтималдықтың формуласы. Байес формуласы.***

Жоспар:

1. Толық ықтималдықтың формуласына түсінік беру.

2. Байес формуласының анықтамасын беру.

3. Тақырып бойынша мысалдарды талқылау.

Егер  оқиғасы өзара үйлесімсіз, толық топ құратын оқиғаларының (гипотезаларының) біреуімен бірге пайда болатын болса, онда  оқиғасының ықтималдығы мына формуламен анықталады:

 (19)

Мұндағы  шартты ықтималдықтар. Бұл (19) формула толық ықтималдықтың формуласы деп аталады.

Сондай-ақ жоғарыдағы шарттар сақталғанда Байес формуласы орындалады:

 (20)

Бұл (20) формула гипотезалардың ықтималдығын  оқиғасы пайда болғаннан кейін есептеуге қолданылады.

*4.1 мысал.* Қоймаға үш партия радиошам әкелінді. Алынған кез келген радиошамның осы партиялардың әрқайсысынан алынуына сәйкес ықтималдықтары 0,25; 0,5; 0,25 тең. Ал әрбір партиядағы радиошамдардың белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкесінше - 0,7; 0,6; 0,8.

1. Осы партиялардың бірінен алынған радиошамның белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдығы қандай?

2. Мерзімді уақыт жұмыс істеп шыққан радиошамның екінші партиядан алынғандығының ықтималдығын табу керек.

Шешуі: 1. Бұл мысалды шығару үшін толық ықтималдықтың формуласын және Бейес формуласын қолдану қажет. Ол үшін әуелі қарастырып отырған оқиғаларды белгілеп алайық:

*А* - радиошам белгілі мерзімде жүмыс істейді;

*В1* - радиошам бірінші партиядан алынған;

*В2* - радиошам екінші партиядан алынған;

*В3*- радиошам үшінші партиядан алынған.

Сонда:



*В1 ,В2, В3*оқиғалар үйлесімсіз және толық топ құрайды. Толық топ құрайтындығын тексерейік.



Сонымен толық ықтималдық формуласының шарттары орындалады, олай болса:

Р(А)= 0,25\*0,7+0,5\*0,6+0,25\*0,8=0,675.

2. Енді мерзімді уақыт жұмыс істеген радиошамның екінші партиядан алынғандығының ықтималдығын Бейес формуласын пайдаланып табамыз:

РА(В2)=0,5 0,6/0,675=0,445

Сол сияқты *РА(В3), РА(В3)* — табалық.

*РА(В1)=*175/675, *РА(В3)=*200/675.

Бұл жерде *РА(В1,)+ РА(В2)+ РА(В3)=*1 екенін ескертеміз.

Байқап отырғанымыздай *А* оқиғасы пайда болғаннан кейін есептелінген мына *РА(В.) (і=1, 2, 3)* шарты ықтималдықтар *В1 В2, В3* гипотезаларының ықтималдықтарының өзгергенін көрсетеді.

Ескерту ретінде айтарымыз, бұл (19) және (20) формулаларды қолданғанда алынған *В1 В2, В3* гипотезаларының үйлесімсіздігін және толық топ құратындығын тексеру қажет.

*4.2 мысал.* 350 механизмдердің 160 — бірінші сортқа, 110 — екінші сортқа, 80 — үшінші сортқа жатады. Бірінші сортқа жататын механизмдердің ішінде сапасыз механизм болуының ықтималдығы 0,01, екінші сортқа жататындардың арасында — 0,02, үшінші сортқа жататындардың арасында — 0,04 тең. Кез келген бір механизм алынған. Алынған механизмнің сапалы екенінің ықтималдығын табу керек.

Шешуі: Белгілеу енгізелік:

*А* - алынған механизм сапалы;

*В1* -алынған механизм бірінші сортқа жатады;

*В2* - алынған механизм екінші сортқа жатады;

*В3* - алынған механизм үшінші сортқа жатады.

Сонда:



*В1 В2 В3* оқиғалары үйлесімсіз. Расында, айталық *В3* оқиғасы пайда болды делік, яғни алынған бір механизм үшінші сортқа жатады, олай болса *В1,В2* оқиғасы *В3* оқиғасымен бірге пайда бола алмайды деген сөз. Себебі алынған бір механизм бір уақытта әрі үшінші, әрі екінші, әрі бірінші сортқа жатуы мүмкін емес қой. Сондай-ақ *В1, В2, В3* оқиғалары толық топ құрайды:



Олай болса (19) формуласын қолданып,



*4.3 мысал.* Бірдей үш жәшікке бірдей өлшемді шарлар салынған. Бірінші жәшікте 10 ақ, 5 қара, 3 қызыл; екінші жәшікте 9 ақ, 16 қара, 11 қызыл; үшінші жәшікте 7 ақ, 4 қара, 1 қызыл шарлар бар. Кез келген жәшіктен кез келген шар алынды. Алынған шардың қара шар болуының ықтималдығы қандай?

*Шешуі:* Мына оқиғаларды қарастырайық:

*А* - алынған шардың түсі қара;

*В1* - шар бірінші жәшіктен алынды;

*В2* - шар екінші жәшіктен алынды;

*В3* - шар үшінші жәшіктен алынды.

Қарастырып отырған *В1, В2, В3* оқиғалары — үйлесімсіз. Расында айталық шар екінші жәшіктен алынса, онда *В2* оқиғасы болады да, *В1, В3* оқиғалары пайда бола алмайды. Ойымыз жалғастырып *В1, В2, В3* оқиғаларының үйлесімсіз екеніне көз жеткізуге болады, Ал *А* оқиғасы *В1, В2, В3* оқиғаларына тәуелді. Енді үш жәшіктің бірдей екенін ескеріп:



Осыдан: 

*4.4 мысал.* Бірінші урнаға 1 ақ, 3 қара, ал екінші урнаға 4 ақ, 6 қара бірдей шарлар салынған. Бірінші урнадан бір шар алынып урнаға салынды. Содан кейін екінші урнадан бір шар алынды. Екінші урнадан алынған шардың түсі қара болуының ықтималдығы қандай?

*Шешуі:* Мына оқиғаларды қарастырайық. *В1* — бірінші урнадан -ақ шар алыңды. *В2* — бірінші урнадан қара шар алынды, *А* — екінші урнадан қара шар алынды.

Бұл жерде *В1, В2* оқиғаларын қарастырамыз себебі, ол әуелі бірінші урнадан қандай түсті шар алуға байланысты. Бұл екі оқиға үйлесімсіз және толық топ құрайды. Сонда топ:

.

Сонда толық ықтималдықтың формуласы бойынша:



Енді осы есептің шарты орындалсын. Сонда екінші урнадан алынған қара шар бастапқыда бірінші урнада болғандығының ықтималдығын табайық:



*4.5-мысал.* Дүкенге үш зауыттан бірдей бұйымдар әкелінген. Барлық әкелінген бұйымдардың бірінші зауыт 50%-тін, екіншісі 30%-тін, үшіншісі 20 % -тін жіберген. Бірінші зауыт бұйымдарының 70%- ті, екіншісінің — 80%-ті, үшіншісінің — 90%-ті бірінші сортқа жатады. Бір бұйым сатып алынды және ол бірінші сортқа жататын болып шықты. Сатып алынған бұйымның бірінші зауытта шығарылғандығының ықтимаддығын табу керек.

*Шешуі:* Келесі гипотезаларды енгізелік:

*В1* -сатып алынған бұйым бірінші зауытта жасалған;

*В2* - сатып алынған бұйым екінші зауытта жасалған;

*В3* - сатып алынған бұйым үшінші зауытта жасалған;

Бұл оқиғалар үйлесімсіз, расында бір дана бұйым мысалы, екінші зауытта жасалған болса, онда ол басқа зауытта жасалынуы мүмкін емес.

Сондай-ақ, *А* - сатып алынған бұйым бірінші сортқа жатады.

Енді *В1, В2, В3* оқиғаларының ықтималдықтарын, *А* — оқиғасының шартты ықтималдықтарын табайық.



Сонда:

Р(А)=0,5\*0,7+0,30,8+0,2\*0,9=0,77.

Енді сатып алынған бұйым бірінші зауытта жасалғандығының ықтималдығын Бейес формуласы арқылы анықтаймыз:

.

*4.6 мысал.* Нысана бойынша екі оқ атылады. Бірінші оқты ату кезінде құлау ықтималдығы 0,2, екінші ату кезінде-0,6. Нысананың бірлет атқандағы жойылу ықтималдығы 0,3, екеуімен -0,9. Нысананың жойылу ықтималдығын табыңыз.

*Шешуі.* А оқиғасы жойылсын. Ол үшін екі оқтың бірінші соққысы немесе жіберіп алмастан екі рет қатарынан нысанаға тигізу жеткілікті. Гипотезалар: H1-екі оқ та нысанаға тиді. Содан Кейін P(H1)=0,2 0,6=0,12. H2-бірінші рет немесе екінші рет жіберіп алды. Содан Кейін P(H2)=0,2 0,4+0,8 0,6=0,56. H3 гипотезасы екі ату да болды жіберіп алулар ескерілмейді, өйткені нысананың жойылу ықтималдығы нөлге тең. Содан кейін шартты Ықтималдықтар сәйкесінше тең: екі сәтті ату жағдайында нысананың жойылу ықтималдығы P(A|H1)=0,9, ал бір ғана сәтті ату жағдайында нысананың жойылу ықтималдығы P(A|H2)=0,3. Сонда толық ықтималдық формуласы бойынша нысананың жойылу ықтималды:

.

*4.7 мысал.* Үш бірдей урна бар; бірінші урнада екі ақ және бір қара шар бар; екіншісінде үш ақ және бір қара;үшіншісінде екі ақ және екі қара шар бар. Кездейсоқ тәжірибе үшін бір урна таңдалып, одан шар алынады. Алынған шардың ақ түсті болуының ықтималдығы қандай?

*Шешуі.* Үш гипотезаны қарастырайық: H1-бірінші урна таңдалды, H2-екінші урна таңдалды, H3-үшінші урна таңдалды және А оқиғасы-ақ шар шығарылды. Тапсырма шарты бойынша гипотезалар бірдей мүмкін болғандықтан, P(H1)=P(H2)=P(H3)=1/3. Осы гипотезалардағы А оқиғасының шартты ықтималдығы сәйкесінше: P (A|H1)=2/3, P(A|H2) =3/4, P (A|H3) =1/2. Толық ықтималдық формуласы бойынша

.

*4.8 мысал.* Пирамидада 19 мылтық бар, оның 3-і оптикалық көрініспен. Оптикалық мылтықпен атқан атқыш нысанаға 0,81 ықтималдықпен, ал оптикасыз мылтықпен 0,46 ықтималдықпен тигізуі мүмкін. Кездейсоқ алынған мылтықпен ату арқылы атқыштың нысанаға дәл тигізу ықтималдығын табыңыз.

*Шешуі.* Мұнда бірінші сынақ-мылтықты кездейсоқ таңдау, екіншісі-нысанаға ату. Келесі оқиғаларды қарастырыңыз: A-мерген нысанаға тиеді; H1-мерген оптикалық мылтықты алады; H2-мерген оптикасыз мылтықты алады. Біз толық ықтималдық формуласын қолданамыз.

Сонда

.

Мылтықтардың бір-бірден таңдалғанын және классикалық ықтималдық формуласын қолдана отырып, біз мынаны аламыз: P(H1)=3/19, P(H2)=16/19. Шартты ықтималдықтар есептің шартында берілген: P(A|H1)=0,81 және P(A|H2)=0,46. Сондықтан,

.

Жауабы: 0,515 тең.

*Негізгі әдебиеттер:*

1. В. Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие /- Изд. 11-е, стер. - М. : Высш. шк., 2005. - 479 с.

2. Y. A. Rozanov. Probadility theory: a concise course [Текст] : научное издание / - New York : Dover publications, INC, 2013. - 148 p.

3. К.В. Балдин, В.Н. Башлыков. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / - М.: Дашков и К, 2016. - 472 c.

4. П.С. Геворкян, А.В. Потемкин, И.М. Эйсымонт. Теория вероятностей и математическая статистика / - М.: Физматлит, 2016. - 176 c.

5. К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В Рукосуев. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / - М.: Дашков и К, 2016. - 472 c.

*Қосымша әдебиеттер:*

1. Қаратаев Жақсыберді. **Ықтималдықтар теориясы**: оқу құралы / - Алматы : CyberSmith, 2017. - 400 б.

2. Г.Г. Битнер.. Теория вероятностей: Учебное пособие / - Рн/Д: Феникс, 2012. - 329 c.

3. Қазешев А.К. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Есептер жинағы. – Алматы «Ғылым», 2005, 182 б.

4. В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах / - М.: Ленанд, 2015. - 384 c.

**№5 дәріс. *Тәуелсіз сынақтар тізбегі. Бернуллидін қарапайым схемасы. Муавр-Лапластың локальдық және интегралдық теоремалры. Пуассонның шектік теоремасы.***

Жоспар:

1. Тәуелсіз сынақтар тізбегі туралы түсінік.

2. Бернуллидін қарапайым схемасы.

3. Муавр - Лапластың локальдық, интегралдық теоремалры және Пуассонның шектік теоремасын қарастырамыз.

*Тәуелсіз сынақтар тізбегі туралы түсінік.*

Екі ғана нәтижесі бар тәуелсіз сынақтарды қарастырайық. Мұндай сынақтарға теңге лақтыру, бұйымның сапалылығын тексеру, детальдің жарамдылығын тексеру т.б. сынақтар жатады.

Сонымен аталған екі нәтижені “*А* оқиғасы пайда болады” және “*А* оқиғасы пайда болмайды” деп атаймыз, сондай-ақ осы екі оқиғаның бір-біріне қарама-қарсы екенін ескеріп, сәйкес ықтималдықтарын *Р(А)=р* және  деп аламыз, яғни *А* оқиғасының ықтималдығы тұрақты. Осындай шарттар орындалса Бернулли схемасы орынды деп айтады.

*Бернуллидің қарапайым схемасы және негізгі формуласы.*

Тәуелсіз  сынақтарда ықтималдығы тұрақты болатын *А* оқиғасының дәл рет пайда болуының ықтималдығы Бернуллидің келесі формуласымен есептеледі:

 (21)

Мұнда  Бұл формуланы кейде биномдық деп те атайды.

А оқиғасының ең ықтималды m0 рет пайда болуы мына теңсіздіктен анықталады:

 (22)

Егер *np-q* бүтін сан болса, онда *m0*-дің екі бүтін мәні болады; ал *np-q* бүтін сан болмаса, оңда *m0*-дің бір ғана бүтін мәні болады.

Бернулли формуласын пайдаланып мына оқиғалардың ықтималдығын анықтауға болады:

1.Тәуелсіз *n* сынақтарда *А* оқиғасының *k* реттен кем пайда болатындығының ықтималдығы:

 (23)

2. *k* реттен артық болуының ықтималдығы:

 (24)

3. Кем дегенде *к* рет пайда болуының ықтималдығы:

 (25)

*4. к* реттен артық емес пайда болуының ықтималдығы

 (26)

Бернулли схемасында сынақтар тәуелсіз болғандықтан, осы сынақтарда *ең болмаса бір оқиғаның пайда болуының ықтималдығы* мына формуламен анықталады:

 (27)

*5.1 мысал.* Шахмат ойнау шеберлігі бірдей екі шахматшы ойын көрсетуде. Тең аяқтаған ойынды есептемегенде:

1.Төрт партияның үшеуін ұту мен сегіз партияның бесеуін ұту ықтималдықтарын табу керек. Қайсысының ықтималдығы жоғары?

2.Төрт партиядан кем дегенде үш партия ұту мен сегіз партиядан кем дегенде 5 партия ұтудың ықтималдықтарын табу керек. Қайсысының ықтималдықтары жоғары?

*Шешуі:* Ойнау шеберлігі бірдей болғандықтан олардың әрбір ұту ықтималдықтары 0,5 тең.

Төрт партиядан үш ұтыстың ықтималдығы Бернулли формуласы (21) бойынша:



Сегіз партияда 5 ұтыстың ықтималдығы:



Осыдан , яғни төрт партиядан үш ұтыстың ықталмалдығы, сегіз партиядан 5 ұтыстың ықтималдығынан жоғары.

2.Төрт партиядан кем дегенде үш ұтыстың ықтималдығы:



Сегіз партиядан кем дегенде 5 партия ұтудың ықтималдығы:



Осыдан 93/256 > 5/16, яғни сегіз партиядан кем дегенде бес ұтыстың ықтималдығы төрт партиядан кем дегенде 3 партия ұтыстың ықтималдығынан жоғары.

*Ескерту.* Егер Бернулли схемасында сынақтар саны үлкен болса, онда Бернулли формуласын пайдалану үлкен арифметикалық есептеулерге келтіреді. Сондықтан бұл жағдайда жуықтап есептеу формулаларын қолданады.

Егерде *Р(А)=р* мәні 0,5-тің маңайында болса, онда Муавр-Лапластың локалдық және интегралдық жуықтау формулалары қолданылады.

*Муавр-Лапластың локалдық теоремасы және қасиеттері.*

Тәуелсіз *n* сынақтарда ықтималдығы тұрақты *А* оқиғасының дәл  рет пайда болуының ықтималдығы келесі формула бойынша жуықтап есептеледі:

 (28)

*Муавр-Лапластың интегралдық теоремасы.*

Тәуелсіз *n*  сынақтарда ықтималдығы тұрақты А оқиғасының *к1*- ден кем емес *к2*- ден артық емес рет пайда болуының ықтималдығы мына формула бойынша жуықтап есептеледі:

 (29)

Мұнда *(х), Ф(х)* функцияларының мәндерінің кестесі бөлек келтірілген.

Муавр—Лапластың (29) формуласын пайдаланып төуелсіз сынақтарда А оқиғасының ықтималдығының салыстырмалы жиіліктен ауытқуының абсолют шамасының ықтималдығы мына формула арқылы табылады:

 (30)

Егерде *Р(А)=р* мәні 0,5-тен едәуір кіші болса, оңда басқа жуықтау формуласы - Пуассон формуласы қолданылады:

 (31)

*5.2 мысал***.** Тәуелсіз 600 сынақтарда түрақты *p=0,4* ықтималдық пен пайда болатын оқиғаның тура 228 рет пайда болуының ықтималдығын табу керек.

*Шешуі:* Бұл есептің дәл шешуі Бернулли формуласымен табылады, бірақта бүл есепте сынақтар саны  өте көп. Сондықтан Муавр-Лапластың локалдық формуласын пайдаланамыз. Ол үшін әуелі -тің мәнін табалық:

.

Сонда 

*5.3 мысал.* Мергеннің нысанаға тигізуінің ықтималдығы 0,75-ке тең,

1100 рет атқанда мын оқиғалардың ықтималдықтарын табу керек:

а) нысанаға 71-ден кем емес, 80-нен артық емес рет дәл тиді;

б) нысанаға 70-тен артық емес рет дәл тиді;

с) нысанаға 81-ден кем емес рет дәл тиді.

2.Тәуелсіз 400 рет атыс жасалғанда салыстырмалы жиіліктің ықтималдықтан р=0,75 ауытқуының абсолют шамасы 0,035-тен кем болатындығының ықтималдығын табу керек.

3. Салыстырмалы жиіліктің оқиғаның ықтималдығынан р=0,75 ауытқуының абсолют шамасы 0,035-тен кем болатындығының ықтималдығы 0,95-ке тең болуы үшін қанша рет тәуелсіз атыс керек?

4. Тәуелсіз 100 рет атқанда нысанаға дәл тиген ең ықтималды атыс санын табу керек.

*Шешуі:* 1. Бұл жерде (29) формуланы қолданамыз:

а) 

Соңда 

2.Бұл жерде (30) формуланы қолданамыз:



Сонда: 

3. Есептің шарты бойынша:



яғни 

Сонда кестеден:



немесе  осыдан *n*=588.

4.Ең ықтималды *m0* санын (1 -4.2) теңсіздігінен анықтаймыз, яғни

100\*0,75-0,25< *m0* <100\*0,75+0,75 немесе 74,75< *m0* <75,75.

Осыдан *m0*= 75.

*5.4 мысал.* Тұқымға арналған бидайдың дәндерінің ішіңде 0,004% арамшөп дәндері кездеседі. Алынған 50000 дәннің ішінде арамшөптің 5 дәні кездесетіндігінің ықтималдығы қандай?

*Шешуі:* Бұл есепті шығару үшін Муавр-Лапластын локалдік формуласын пайдалануға болар еді. Алайда есептің шарты бойынша *р=0,0004*, яғни ықтималдықтың мәні өте аз. Бұл жағдайда Муавр- Лапластың формуласын теореманың шарты бойынша пайдалануға болмайды. Соңдықтан Пуассон (31) формуласын пайдаланамыз.

Есептің шарты бойынша:



Сонда (31) формуласын қолданып:

.

*Ескерту.* (31) формуланы пайдаланғанда  болу керектігін ескеру қажет.

*5.5 мысал.* Ойнау шеберлігі бірдей екі шахматшы ойын көрсетуде. Үш ойында ең болмағанда бір ұтыс болуының ықтималдығын табу керек?

*Шешуі:* Бұл жерде (27) формуланы қолданамыз. Сонда  екенін ескерек: 

*5.6 мысал.* Урнада 5 ақ және 50 қара шар бар. Урнадан кез келген бір шар алынып оның түсін анықтағаннан қейін ол қайтадан урнаға салыңды. Сөйтіп осы сынақ 10 рет қайталанды. Осы сынақтарда 3 рет ақ шар пайда болуының ықтималдығын анықтау керек.

*Шешуі:* Бернулли формуласын пайдалануға болады, себебі *n*=10 онша үлкен сан емес. Бұл жерде алынған шар урнаға қайтарылып тұрғандықтан әрбір сынақта ақ шардың пайда болу ықтималдығы тұрақты және 

Сондықтан: .

Сондай-ақ жуықтап есептеу Пуассон формуласын пайдалансақ:



Бернулли схемасы жалпы жағдайда полиномдық схеманың жеке турі болып табылады. Полиномдық схема бойынша тізбектес тәуелсіз сынақтардың әр сынағында өзара үйлесімсіз  оқиғалардың бірі  сәйкес  ықтималдықпен пайда болады.

Мұнда  және .

Айталық *n* тәуелсіз сынақ жүргізілсін. Сонда осы *n* сынақтарда *А*, оқиғасының *m1* рет, A2 оқиғасының *m2* рет, *А3* оқиғасының *m3* рет, *Аk* коқиғасының *mk* рет пайда болуының ықтималдығы мына полиномдық формуламен анықталады:

 (32)

мұнда 

*5.7 мысал.* Жұмысшы 0,9 ықтималдығымен сапалы бұйым, 0,09 ықтималдығымен жөндеуге келетін ақауы бар, ал 0,01 ықтималдығымен жөндеуге келмейтін ақауы бар бұйымдар шығарады. Дайыңдалған үш бұйымның ішінде ең болмағаңда бір сапалы бұйым және ең болмағанда ақауы жөндеуге келетін бір бұйым бар болатындығын тап.

*Шешуі:* Барлығы үш бұйым дайындалды. Белгілеу енгізелік. *А*- сапалы бұйым, В - ақауы жөндеуге келетін бұйым; С - ақауы жөндеуге келмейтін бұйым. Сонда бізге мына оқиғалардың пайда болғаны керек:

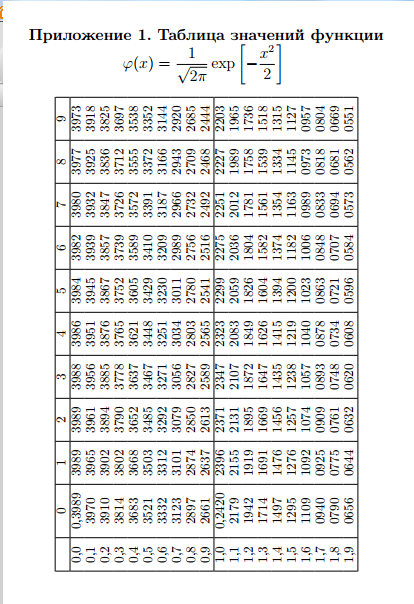
,

,

.

Бұл  оқиғалары үйлесімсіз. Есептің шартынан байқағанымыздай, бұл оқиғалар әртүрлі ықтималдықтармен пайда болады. Соңдықтан есептің шарттары полиномдық формуланы пайдалануға болатынын көрсетеді. Сонда:





*Кесте 5.1. -функциясының берілген мәндері.*

**

*Кесте 5.2. -функциясының берілген мәндері.*

*Негізгі әдебиеттер:*

1. В. Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие /- Изд. 11-е, стер. - М. : Высш. шк., 2005. - 479 с.

2. Y. A. Rozanov. Probadility theory: a concise course [Текст] : научное издание / - New York : Dover publications, INC, 2013. - 148 p.

3. К.В. Балдин, В.Н. Башлыков. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / - М.: Дашков и К, 2016. - 472 c.

4. П.С. Геворкян, А.В. Потемкин, И.М. Эйсымонт. Теория вероятностей и математическая статистика / - М.: Физматлит, 2016. - 176 c.

5. К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В Рукосуев. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / - М.: Дашков и К, 2016. - 472 c.

*Қосымша әдебиеттер:*

1. Қаратаев Жақсыберді. **Ықтималдықтар теориясы**: оқу құралы / - Алматы : CyberSmith, 2017. - 400 б.

2. Г.Г. Битнер.. Теория вероятностей: Учебное пособие / - Рн/Д: Феникс, 2012. - 329 c.

3. Қазешев А.К. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Есептер жинағы. – Алматы «Ғылым», 2005, 182 б.

4. В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах / - М.: Ленанд, 2015. - 384 c.

**№6 дәріс. *Кездейсоқ шамалар. Дискретті кездейсоқ шамалар және олардың үлестіру түрлері.***

Жоспар:

1. Кездейсоқ шамаларға түсінік.

2. Дискретті кездейсоқ шамалар және олардың үлестіру түрлері.

*Кездейсоқ шамаларға түсінік.*

Айталық элементарлық оқиғалар кеңістігі  берілсін. Егер осы кеңістікте анықталған *Х()* функциясы сандық мәндер қабылдап, кез келген *х* үшін мына ықтималдық



анықталған болса, оңда  функциясын кездейсоқ шама деп атайды.

Кездейсоқ шамалар мен кездейсоқ оқиғаларды бір-бірінен ажырата білген жөн. Анықтамадан байқап отырғанымыздай кездейсоқ шама міндетті түрде пайда болады, тек оның қандай мәнді қабылдайтыны алдын ала белгісіз. Ал кездейсоқ оқиғаның пайда болуының өзі кездейсоқ жай.

Мысалы, теңге лақтыру тәжірибесін қарастырайық. Осы тәжірибеде кездейсоқ оқиға деп елтаңбаның немесе цифрдің пайда болуын айтамыз, ал кездейсоқ шама ретінде тәжірибе нәтижесінде елтаңбаның пайда болу санын қарастыруға болады. Бұл кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері *0, 1, 2...n* яғни тәжірибе нәтижесінде елтаңба мүлде пайда болмауы мүмкін, немесе 1 рет, 2 рет, …, *n*  рет пайда болуы мүмкін. Кездейсоқ шамалар дискретті және үзіліссіз болып бөлінеді.

Кездейсоқ шамаларга мысалдар келтірейік:

1. Тәуелсіз *n* сынақтарда тұрақты ықтималдықпен А оқиғасының пайда болу саны.
2. Бір цех өнімдерінің ішіндегі сапасыз бұйымдар саны.
3. Снарядтың ұшу алыстығы.
4. Телефон станциясына белгілі бір уақыт мерзімінде келіп түскен тапсырыстар саны, т.б.

Осы мысалдардан көріп отырғанымыздай кездейсоқ шама тәжірибенің кездейсоқ нәтижесінің сандық сипаттамасы екенін байқаймыз.

*Дискретті кездейсоқ шамалар анықтамасы мен қасиеттерімен танысайық.*

***Анықтама.*** Кездейсоқ шаманың қабылдайтын мәндерінің саны ақырлы болса немесе тізбек түрінде жазылса, онда ондай кездейсоқ шамаларды *дискретті кездейсоқ шамалар* деп атайды.

Дискретті кездейсоқ шаманы анықтау үшін үлестірім қатары немесе үлестірім кестесі құрылады.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | *x1* | *x2* | *x3* | *…* | *xn* |
| *p* | *p1* | *p2* | *p3* | *…* | *pn* |

*Кесте-6.1. Дискретті кездейсоқ шаманы анықтау үшін үлестірім қатары.*

Кестенің жоғары жолында кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері, ал төменгі жолында сол мәндердің сәйкес ықтималдықтары келтірілген.

Мұнда .

*Дискретті кездейсоқ шаманының үлестірім заңдарына тоқтала кетейік.*

1. Биномдық үлестірім.

Егер мүмкін мәндері *0,1,2,...,к,...* болып, ал осы мүмкін мәндерді қабылдау *Х=к* ықтималдықтары Бернулли формуласымен анықталса

, (33)

онда кездейсоқ шама биномдық үлестірім заңымен берілген деп аталады.

Сонымен биномдық үлестірім зандылығымен берілген дискретті кездейсоқ шаманы - тұрақты ықтималдықты *А* оқигасының *n* тәуелсіз сынақтарда пайда болуының саны ретінде қарастыруға болады.

2. *Пуассон үлестірімі.*

Егер тәуелсіз сьнақтарда *n* үлкен сан болса және *р*-ның шамасы аз болса, онда кездейсоқ шаманың мүмкін мәндерінің сәйкес ықтималдықтарын Пуассон формуласымен анықталса

 (34)

есептеу керек.

Бұл жағдайда кездейсоқ шама Пуассондық үлестірім заңымен берілген дейді. Бернулли схемасына негізделген тағы да басқа үлестірімдерді келістрелік.

*3. Геометриялық үлестірім.*

Айталық тәуелсіз сынақтарда Бернулли схемасы қарастырылсын, мұнда *Р(А)=р*. Сонда қатарынан (*к - 1*) рет *А* оқиғасы пайда болып, ал *к*-шы ретте *А* оқиғасының пайда болу ықтималдығы мына формуламен анықталады:

 (35)

Ықтималдығы осы формуламен анықталған *(к=1,2,3...,n)* кездейсоқ шаманы геометриялық үлестірімімен берілген дейді.

*4. Паскаль үлестірімі.*

Тәуелсіз сынақтарда  оқиғасы қатарынан *к-1* рет пайда болып, сосын  оқиғасы *m* рет пайда болуының ықтималдығы мына формуламен анықталады:

 (36)

Ықтималдығы осы формуламен анықталған кездейсоқ шама Паскаль үлестірімімен берілген дейді. Геометриялық үлестірім Паскаль үлестірімінің жеке жағдайы, яғни *m=1* болғанда геометриялық үлестірімді аламыз.

*5. Гипергеометриялық үлестірім.*

Егер X кездейсоқ шамасының мүмкін мәндері *0,1,2,3,..к* болып, ал сәйкес ықтималдықтары мына формуламен

 (37)

анықталса, онда кездейсоқ шама гипергеометриялық үлестіріммен берілген дейді.

*6.1 мысал.* Жәшікте барлығы 10 шар бар, олардың 7-і қара, 3-і көк. Жәшіктен кез келген 5 шар алынды. Сол 5 шардың үшеуі қара болуының ықтималдығы қандай?

*Шешуі:* Осындай мазмұнды есепті классикалық анықтаманы және комбинаториядағы қосу және көбейту ережелерін пайдаланып шығаруға болады. Бұл есепті осы тәсілмен шығарса: 

Енді осы есепті жалпы түрде келтірейік.

*6.2 мысал.* Жәшікте барлығы *N* шар бар, оның ішіндегі *n* қара шар бар, ал *(N-n)* көк шарлар. Жәшіктен кез келген *m* шар алынды. Сол алынған *k* шардың ішінде *k* қара шар болуының ықтималдығы қаңдай?

*Шешуі:* *х* - жәшіктен алынған шарлар саны. Бұл кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері *0, 1, 2, ...m*.

Жәшіктегі *N* шардан m шарды әртүрлі  жолмен алуға болады, ал *n* қара шарлардан *к* шарды әртүрлі  жолмен аламыз, сонда алынған *m* шардың ішінде *m-k* көк шарлар болғандықтан барлық *N-n* көк шарлардан *m*-k көк шарды  жолмен алуға болады. Олай болса комбинаторикадағы көбейту ережесін қолдансақ, алынған *m* шардың ішінде *к* қара шар, *m-k* көк шар болуы  жолмен анықталады.

Сонда ықтималдықтың классикалық анықтамасы бойынша



болады.

Сөйтіп *X* - кездейсоқ шама гипергеометриялық үлестіріммен: берілгеніне көз жеткіздік.

*6. Полиномдық схема және полиномдық үлестірім.*

Биномдық үлестірімді қолданып есептеген кездегі математикалық модельдің жалпыланған түрін қарастырайық:

Барық сынақтардың нәтижесінде қандайда бір  оқиғалары пайда болатын болсын. Егер -ші сынақтың нәтижесінде  оқиғасы пайда болатын болса, онда  деп  деп айтайық. Онда  рет қайталанған сынаққа сәйкес келетін элементар оқиғалар кеңістігін келесі түрде сипаттаймыз:

.

Енді  арқылы  тізбегіндегі -ға тең болатын -лерді, яғни  сынақ нәтижесінде  оқиғасының пайда болуын белгілейік:

, (38)

мұнда  -  оқиғасының индикаторы:

; . (39)

Сондай ақ элементар  оқиғасының ықтималдығын келесі түрдегі формуламен анықтайық:

, (40)

мұнда .

, яғни (40)-формуланы пайдаланып ықтималдықты анықтау дұрыс екенің көрсетейік. Шынымен де





,

мұнда -көлемі -ге, оның ішінде  элементі -ге,  элементі -ге,..., элементі -ге тең  элементар оқиғалар саны. Келесі формуланы қарастырайық:

. Ендеше келесі теңдікке келеміз

,

яғни ықтималдығын (40) формула арқылы есептеу дұрыс.

*Теорема 6.1.* (*Гиппергеометриялық үйлестірімді биномдық үлестіріммен жуықтау*). Айталық  бірақ , яғни  босын. Онда келесі теңдікке келеміз

.

Дәлелдеу.  үшін (37) – формуладағы факториалдарды ашып қысқартып, сосын алымын және бөлімін де -ға бөлеміз. Егер теореманың шарттары орындалса,





.

Дәлелденген жоғарыда көрсетілген теореманың шарттары орындалса гипергеометриялық үлестірімді биномдық үлестіріммен жуықтауға болатынды. Бұл, әрине, интуитивті түрде түсінікті де, өйткені жеткілікті үлкен  және  үшін қайталанатын және қайталанбайтын таңдамалар саны бірдей дерлік болуы керек. Сонымен, қорытындысында биномдық үлестірімді бірінші түрдегі элементтерінің үлесі р - ға тең көлемі аса үлкен бас жиынтықтан алынған қайталанбайтын таңдама ретінде жуықтап қарастыруға болатынына көзіміз жетті.

Жоғарыда айтылған, гипергеометриялық және биномдық үлестірімдерді қолданып ықтималдықтарды есептеген кезде аса үлкен сандардың факториалдарын есептеуге тура келеді. Бірақ  өскен сайын  өте тез арада өседі. Сондықтан есептерді шығару кезінде аса үлкен сандардың факториалдарын жуықтап есептеу үшін жиі пайдаланылатын анализден белгілі *Стирлинг формуласы* деп аталатын келесі формуланы еске түсірейік:  (аса үлкен) үшін



*Мысал 6.3.* (Лото ойыны). 1,2,....,39 сандармен нөмірленген 39 шар бар және оның алтауы *«бақытты»* шарлар. Осы 39 нөмірдің ішінен алты нөмір кездейсоқ белгіленген. Бегіленген нөмірлердің ішінде дәл *к «бақытты»* (*к=0,1,2,…,6*) нөмір болуының ықтималдығын тап.

Шешуі. Керекті ықтималдықты гипергеометриялық үлестірім арқылы есептеуге болады: урнадағы барлық шарлар , белгіленген (қара) шарлар , алынған шарлар , алынған шарлардың ішіндегі қара шарлар . Онда гипергеометрия формулассын қолданып келесі теңдікке келеміз.

.

Сонымен  есептеп аламыз және  ықтималдығын есептейміз.

,

себебі ойын шарты бойынша қандай да бір ұтыс алу үшін *«бақытты»* нөмірлер саны үштен кем болмау керек.

*Негізгі әдебиеттер:*

1. В. Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие /- Изд. 11-е, стер. - М. : Высш. шк., 2005. - 479 с.

2. Y. A. Rozanov. Probadility theory: a concise course [Текст] : научное издание / - New York : Dover publications, INC, 2013. - 148 p.

3. К.В. Балдин, В.Н. Башлыков. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / - М.: Дашков и К, 2016. - 472 c.

4. П.С. Геворкян, А.В. Потемкин, И.М. Эйсымонт. Теория вероятностей и математическая статистика / - М.: Физматлит, 2016. - 176 c.

5. К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В Рукосуев. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / - М.: Дашков и К, 2016. - 472 c.

*Қосымша әдебиеттер:*

1. Қаратаев Жақсыберді. **Ықтималдықтар теориясы**: оқу құралы / - Алматы : CyberSmith, 2017. - 400 б.

2. Г.Г. Битнер.. Теория вероятностей: Учебное пособие / - Рн/Д: Феникс, 2012. - 329 c.

3. Қазешев А.К. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Есептер жинағы. – Алматы «Ғылым», 2005, 182 б.

4. В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах / - М.: Ленанд, 2015. - 384 c.

**№7 дәріс. *Дискретті кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары. Математикалық күтім, дисперсия және әртүрлі ретті моменттер.***

Жоспар:

1. Дискретті кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары туралы түсінік.

2. Математикалық күтімі, дисперсиясы туралы түсінік.

3. Бастапқы, орталық әртүрлі ретті моменттерді табу тәсілдері.

*Дискретті кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары туралы түсінік.*

Бұл лекцияда біздін негізгі қарастыратын мәселелер ол дискреттік кездейсоқ шамалар үшін математикалық сандық сипаттамаларын есептеуді көрсететін боламыз. Математикалық күтімінің анықтамасын береміз. Дисперсияны есептеудің негізгі формуласын беріп және женілдетілген формасын көрсетеміз. Әртүрлі ретті моменттердің анықтамаларымен танысып. Әр бір көрсетіген формуа мен анықтамаларға практикалық түрде мысалдар келтіріледі.

Дискретті кездейсоқ шаманың *математикалык күтімі* деп оның мүмкін мәндерінің сәйкес ықтималдықтарына көбейтінділерінің қосындысын айтады:

.

Дискретті кездейсоқ шаманың *дисперсиясы* деп оның өзінің математикалық үмітінен ауытқуының квадратының математикалық күтімін айтады:

.

Дисперсияны есептеудің жеңілдетілген формуласы:

.

Дискретті кездейсоқ шаманың *орташа квадраттық ауытқуы* мына формуламен есептелінеді:

.

Дискретті кездейсоқ шаманың *бастапқы к-ретті моменті* деп осы кездейсоқ шаманың к-шы дәрежесінің математикалық үмітін айтады:

.

Дискретті кездейсоқ шаманың *к-ретті орталық моменті* деп, оның өзінің математикалық үмітінен ауытқуының к-шы дәрежесінің математикалық үмітін айтады:

.

Кездейсоқ шаманың математикалық күтімі бірінші бастапқы элементіне, ал дисперсиясы - екінші орталық моментіне тең:

.

Сондай-ақ екінші, үшінші және төртінші *орталық моменттер* бастапқы моменттер арқылы төмендегідей өрнектеледі:

.

Дискретті кездейсоқ шаманың ең ықтималды мәнін оның Модасы *(M0)* деп атайды.

Айталық кездейсоқ шаманың *n* мүмкін мәндері болсын.

.

теңдігі орындалса, онда *М0* кездейсоқ шаманың *медианасы* деп аталады.

Егер n=2k болса, онда , егерде  болса, онда .

Соңдай-ақ қарастырылып отырған кездейсоқ шаманың үлестірім заңын қалыпты үлестіріммен салыстыру үшін *Ек* эксцесс және *Аs* асимметрия сипаттамалары қарастырылады.

Мұнда:



Ескерту: қалыпты үлестірім үшін .

*Математикалық күтімінің қасиеттері:*



Дисперсияның қасиеттері:



мұнда *X* және *У* тәуелсіз кездейсоқ шамалар.

Жоғарыда келтірілген үлестірім заңдарының математикалық күтімдері мен дисперсияларын келтірелік.

1. Биномық үлестірім:



2. Пуассон үлестірімі:



3.Геометриялық үлестірім:



4.Паскаль үлестірімі



5.Гипергеометриялық үлестірім:



Егер  болғанда



болады. Осы жағдайда  болады.

*7.1 мысал.* Дискретті кездейсоқ шама мына үлестіріммен берілсін:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | -1 | 0 | 1 | 2 |
| p | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0,2 |

Сандық сипаттамаларын тап.

*Шешуі :*



Жоғарыда айтылған дисперсияның формуласын қолданып табамыз. Ол үшін әуелі

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X2 | 1 | 0 | 1 | 4 |
| p | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0,2 |

жазамыз. Сонда:

.

*М0=0.* Себебі кездейсоқ шаманың *Х=0* мәні ең үлкен ықтималдықпен қабылданады. Енді *М0* табу үшін *n=4* екенін ескеріп  аламыз.

Соңдай-ақ жоғарыда келтірілген бастапқы, орталық моменттің формулаларын пайдаланып





табамыз. Мұнда  олай бола дифференциалдық функцияның графигі оң жаққа “созыңқы”, ал  болғандықтан бұл график Гаусс қисығына қарағанда “жатыңқы”.

Егер бірдей үлестіріммен анықталған *n* өзара тәуелсіз кездейсоқ шамалар *X1,X2,…Xn* берілсе және



болса, онда бұл кездейсоқ шамалардың арифметикалық орташасы да кездейсоқ шама болады, яғни

.

Бұл арифметикалық орташаның математикалық күтімін табалық



яғни, .

Енді дисперсиясын табамыз:



яғни, .

Сонымен математикалық күтімнің формуласынан бірнеше өзара тәуелсіз кездейсок шамалардың арифметикалық орташасынң дисперсиясы берілген кездейсоқ шамалардың дисперсиясынан едәуір кем екеңдігі көрінеді. Сондықтан өмірде керекті параметрді анықтау кезінде жүргізілген қайталанбалы өлшеулерде дисперсияның осы қасиетін пайдаланады. Сөйтіп іздеп отырған параметрдің мәні ретінде қайталанған өлшеулер кезінде алынган мәндердің арифметикалық орташа мәнін алады.

*7.2 мысал.* Теңге үш рет лақтырылсын. Кездейсоқ шама *Х* ретінде елтаңбаның пайда болу санын қарастырамыз.

Үлестірім қатарын жазу керек.

Үлестірім көпбұрышын салу керек.

*М(Х), D(Х), (Х)* — тарды табу керек.

*Шешуі:* Бұл кездейсоқ шама *Ү*-тің мүмкін мәндері — 0, 1, 2, 3. Себебі теңгені үш рет лақтырғанда елтаңба не пайда болмауы мүмкін, не бір рет пайда болуы мүмкін т.с.с. Ал әрбір лақтырғанда елтаңбаның пайда болу ықтималдығы 0,5-ке тең. Олай дейтініміз теңге лақтырғанда негізінен не елтаңба, не цифр пайда болады, ал теңгенің симметриялығын ескерсек бұл екеуінің пайда болу ықтималдығы бірдей. Сондықтан бұл кездейсоқ шама *Х*-ті биномдық үлестірім заңымен сипаттауға болады.

Үлестірім қатарын жазайық:

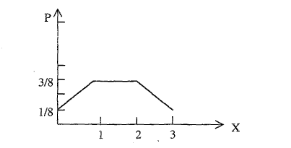
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
| p |  |  |  |  |

Бұл жерде .

2. Үлестірім көпбүрышын салайық.

3.Математикалық күтімінің формуласымен есептейміз:

.



Ал дисперсияны әдетте жеңілдетілген формуламен есептейді. Ол үшін  кездейсоқ шаманың үлестірім қатарын жазып алу керек.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Х2 | 0 | 1 | 4 | 9 |
| р | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |

Сонда:



Сондай-ақ бұл мысалдағы кездейсоқ шаманың биномдық үлестіріммен берілгенін ескерсек, онда сандық сипаттамаларды үлестірім формулаларын пайдаланып та есептеуге болады:



*7.3 мысал.* Шығарылған бір партия бұйымның 10 проценті сапасыз. Кез келген 4 бұйым алынды. Осы төрт бұйымның ішінде сапасыз бұйымдардың пайда болу санының үлестірім заңын жазып, сандық сипаттамаларын есептеу керек.

*Шешуі:* X— сапасыз бұйымдардың пайда болуының саны. Әрбір сапасыз бұйымның пайда болу ықтималдығы 0,1-ге тең, себебі берілген партияның 10 проценті сапасыз бұйымдар. Бұл кездейсоқ шама биномдық үлестірім заңымен берілген.

Мұнда .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| p |  |  |  |  |  |

немесе

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| р | 0.6581 | 0.2916 | 0.0486 | 0,0036 | 0,0001 |

Енді сандық сипаттамалырын табайық. Биномдық үйлестірім зандарын пайдаланып келесі шешімдерді аламыз:

, , .

*7.4 мысал.* Дискретті кездейсоқ ама үлестірім қатарымен берілген

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 2 | 4 | 5 | 6 | 8 |
| р | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,3 |

*М(X), D(X), σ(X)-*тарды табу керек.

*Шешуі:* Мұнда *М(Х)=5,5.*

Енді *D(X)-*ті есептеу үшін мына *Х2*  шаманың үлестірім кестесін құрамыз.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х2* | 4 | 16 | 25 | 36 | 64 |
| Р | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,3 |

Сонда *M(X2)=33,9* *D(X)=3,65 σ(X)=1,91* аламыз.

*7.5 мысал.* Урнада 5 ақ және 50 қара шар бар. Урнадан кез келген шар алынып түсі анықталғаннан кейін урнаға қайта салынды. Кездейсоқ шама X тәуелсіз 10 сынақта ақ шар пайда болу саны. Осы кездейсоқ шаманың үлестірім заңын жазыңыз.

*Шешуі:* Бұл мысалда сынақ кезінде ақ шар пайда болу ықтималдығы *р=5/55=1/11*. Сынақ саны *n=10*. Олай болса қарастырып отырған кездейсоқ шаманы биномдық заңмен берсек, онда үлкен арифметикалық есептеулерге кезігеміз. Соңдықтан бұл кездейсоқ шаманы Пуассон үлестірім заңымен беруге болады. Сөйтіп, кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері: 0, 1, 2, ... 10.

Ал кездейсоқ шаманың мүмкін мәндерінің сәйкес ықтималдықтары



Жеке жағдайда  болса, биномдық үлестірім бойынша:



Пуассондық үлестірім бойынша:



*7.6 мысал.* Екі атқыш әрқайсысы өз нысанасына бір-бірден оқ атты. Бірінші атқыш үшін нысанага тигізудің ықтималдығы *р1*, ал екінші атқыш үшін *р2*. Кездейсоқ шамалар *Х1* - бірінші атқыштың нысанаға тигізу саны, *Х2* - екінші атқыштың нысанаға тигізу саны, ал *Z=X1-X2* - екі кездейсоқ шамалардың айырымы. Оның математикалық сипаттамаларын: *M(ʐ), D(ʐ)* - тарды табамыз.

*Шешуі:* Әуелі кездейсоқ шамалардың үлестірім қестелерін жазамыз:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Х1 | 0 | 1 |
| р | q1 | p1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Х2 | 0 | 1 |
| р | q2 | p2 |

Осыдан:



*7.7 мысал.* Екі тәуелсіз кездейсоқ шамалар *X* және *У* үлестірім кестелермен берілген:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Х | 0 | 3 | 4 |
| р | 0,2 | 0,6 | 0,2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Y | 2 | 3 |
| р | 0,3 | 0,7 |

,  - кездейсоқ шамалардың математикалық үміттері мен дисперсияларын тап.

*Шешуі:* Кестелерден әуелі

*M(X) =2,6, M(Y)= 2,7, D(X)= 1,84, D(Y)= 0,21*

табамыз. Сосын X және Ү тәуелсіз кездейсоқ шамалар екендігін пайдаланып, жоғарыдағы математикалық күтім мен дисперсияның қасиеттеріне сүйеніп

*М(Х+ У) = 2,6+2,7 = 5,3 D(Х + У) = 1,84+0,21 = 2,05*

*М(Х У) = 2,6-2,7 = 7,02*

табамыз.

*7.8 мысал.* “Спортлото” ойынын ойнағанда белгілі бір ұтысқа шығатын спорттың түрлерін дәл табудың ықтималдығын тап.

*Шешуі:* Мұндағы X - ұтысқа шыққан спорттың түрлерінің саны. Бұл кездейсоқ шама гипергеометриялық үлестірім заңымен берілген.

Мұнда , , ,  Ойынның шарты бойынша ұтыс үш спорттың түрін дәл тапқаннан бастап төленеді. Сондықтан біз  жағдайларын қарастырып, сәйкес ықтималдықтарды табалық:

Сол сияқты  және  болғанда сәйкес ықтималдықтар:

 және .

*7.9 мысал.* Айталық 12 бұйымның 8-і бірінші сортқа жатады. Кез келген 5 бұйым алынды. Сонда осы 5 бұйымның ішінде бірінші сортты бұйымдардың болуының үлестірім кестесін құрыңыз.

*Шешуі:* Есептің шарты бойынша , , . Кездейсоқ шама- *X*. Оның мүмкін мәндері: 1, 2, 3, 4, 5. Мүнда мүмкін мәндер бірден басталуының себебі: 5 бұйымның ішінде кем дегенде бір бұйым бірінші сортқа жатады.

Сонда:



Енді үлестірім кестесін жазайық:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| р | 0,0101 | 0,1414 | 0,4242 | 0,3535 | 0,0707 |

*Негізгі әдебиеттер:*

1. В. Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие /- Изд. 11-е, стер. - М. : Высш. шк., 2005. - 479 с.

2. Y. A. Rozanov. Probadility theory: a concise course [Текст] : научное издание / - New York : Dover publications, INC, 2013. - 148 p.

3. К.В. Балдин, В.Н. Башлыков. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / - М.: Дашков и К, 2016. - 472 c.

4. П.С. Геворкян, А.В. Потемкин, И.М. Эйсымонт. Теория вероятностей и математическая статистика / - М.: Физматлит, 2016. - 176 c.

5. К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В Рукосуев. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / - М.: Дашков и К, 2016. - 472 c.

*Қосымша әдебиеттер:*

1. Қаратаев Жақсыберді. **Ықтималдықтар теориясы**: оқу құралы / - Алматы : CyberSmith, 2017. - 400 б.

2. Г.Г. Битнер.. Теория вероятностей: Учебное пособие / - Рн/Д: Феникс, 2012. - 329 c.

3. Қазешев А.К. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Есептер жинағы. – Алматы «Ғылым», 2005, 182 б.

4. В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах / - М.: Ленанд, 2015. - 384 c.

**№8 дәріс. *Үзіліссіз кездейсоқ шамалар және олардың анықтамасы мен қасиеттері. Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары. Математикалық күтім, дисперсия және әртүрлі ретті моменттер.***

Жоспар:

1. Үзіліссіз кездейсоқ шамалар және олардың анықтамасы мен қасиеттерін қарастыру.

2. Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамаларына түсінік.

3. Математикалық күтім, дисперсия және әртүрлі ретті моменттері.

*Үзіліссіз кездейсоқ шамалар және олардың анықтамасы мен қасиеттерін қарастыру.*

*Анықтама.* Егер кездейсоқ шама өзінің мүмкін мәндерін  интервалында қабылдаса және бұл мәндерді нөмірлеуге болмаса, онда ол *үзіліссіз кездейсоқ шама* деп аталады.

Мысалы поездың кешігу уақыты, атылған оқтың ұшу алыстығы т.б. Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың мүмкін мәндері белгілі бір интервалды қамтып жатады.

Кездейсоқ шаманың үлестірім заңдылықтарын әртүрлі жолмен қарастыруға болады. Төменде  - кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері тиянақты  санынан кіші болу ықтималдығы қарастырылады.

*Анықтама.* *Үлестірім функциясы* деп *Х*-кездейсоқ шамасының мәндері нақты *х* санынан кіші болу ықтималдығын айтады.

Үлестірім функциясы  арқылы белгіленеді. Сонда анықтама бойынша:



Бұл функцияны соңдай-ақ *интегралдық үлестірім функциясы* деп те атайды.

Негізгі қасиеттері:

 (8.1)

Дискреттік кездейсоқ шама үшін интегралдық үлестірім функция былай анықталады:

 (8.2)

Мұнда  дискретті кездейсоқ шаманың қабылдайтын мүмкін мәндері, ал  сол мәндердің қабылдануының сәйкес ықтималдықтары. Мына (8.2) қосындысы тек  теңсіздігін қанағаттандыратын барлық  үшін олардың сәйкес ықтималдықтарының қосындысы болады;  берілген нақты сан.

*Анықтама:* Үзіліссіз кездейсоқ шаманың *дифференциалдық функциясы (үлестірім тығыздығы)* деп үлестірім функциясының бірінші туындысын айтады.

Дифференциалдық функцияны  деп белгілейді. Сонда анықтама бойынша:

 (8.3)

Негізгі қасиеттері:



*8.1 мысал.* Айталық *Х* — дискретті кездейсоқ шама үлестірім кестесі арқылы берілген болсын

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 3 | 3,5 |
| р | 0,1 | 0,4 | 0,2 | 0,3 |

-тің үлестірім функиясын табыңыз.

*Шешуі:* Ол үшін (8.2) формуласын пайдаланамыз. Кестеден байқағанымыздай *х<0* болса, онда *Х*-тің қабылдайтын мүмкін мәндері жоқ. Ал *0 < х <1* болғанда Х-тің қабылдайтын бір мәні бар, ол 0; енді *1 < х <3* болса, онда *Х*-тің қабылдайтын екі мәні бар, ол 0;1; т.с.с. ақырында *х ≥ 3,5* болса, онда *X* өзінің барлық мүмкін мәндерін қабылдайды, олар 0; 1; 3; 3,5.

Енді (2.2.2) формуласына түсінік берейік. Жоғарыда айтқанымыздай *х<0* болса, онда есептің шарты бойынша 0-санының сол жағынан берілген кездейсоқ шаманың ешбір мүмкін мәні жоқ, яғни кездейсоқ шаманың өзінің мүмкін мәндерінің біреуін қабылдауын оқиға екенін ескерсек, онда оның 0-санының сол жағынан мән қабылдауы мүмкін емес оқиға, олай болса:

.

Енді *х<1* болса,оңда 1 санының сол жағында есептің шарты бойынша кездейсоқ шаманың бір мәні бар, ол 0 саны. Олай болса

.

Сол сияқты *х<3* болғанда, 3-санының сол жағында кездейсоқ шаманың екі мәні болады. Ол осы мәндердің біреуін қабылдауы мумкін, яғни екі оқиғаның біреуі пайда болады дегеніміз. Сондай- ақ, бұл екі оқиға үйлесімсіз, сондықтан үйлесімсіз оқиғалардың қосындысының ықтималдығы туралы теореманы пайдаланып:

.

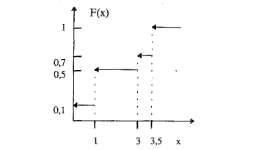
Осы жолмен *х<3,5* жөне *х>3,5* болғандағы -ның мәндерін есептеуге болады.

Сонымен қорытындысында:

Енді  функциясыньщ графигін тұрғызайық.



Енді  функциясының графигін құрайық:



Сурет 8.1.  функциясының графигі

*8.2 мысал.* Кездейсоқ шама интегралдық функйиямен берілген:



Үлестірім кестесін қүрыңыз, *М(Х), D(Х), σ(Х)* -табыңыз.

*Шешуі:* Интегралдық функцияның өрнегінен байқағанымыздай *х<-2* болғанда , яғни -2-нің сол жағында кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері жоқ. Ал *х<-1* болғанда  бұл жағдайда кездейсоқ шаманың бір мүмкін мәні бар, ол -2, сол сияқты *х<1* болғанда , яғни 1 санының сол жағында кездейсоқ шаманың екі мүмкін мәні бар, олар - 2; 1.

Сондықтан . Мұнда .

Ойымызды осылай жалғастыра отырып ақырында мынадай үлестірім кестесін аламыз:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | -2 | -1 | 1 | 2 |
| р | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,1 |

*Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары.*

1. Математикалық күтімі(үміті):

 (8.4)

2.Дисперсиясы:

 (8.5)

Жеңілдетілген формуласы:

 (8.6)

3. Орташа квадраттық ауытқуы:

 (8.7)

4. К-ретті бастапқы моменті:

 (8.8)

5. к-ретті орталық моменті:

 (8.9)

Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың мүмкін мәндері жөнінде белгілі дәрежеде информация беретін басқа да сипаттамалар бар. Оларға мода, медиана, асимметрия, эксцесстер жатады.

*Математикалық күтім, дисперсия және әртүрлі ретті моменттері.*

*Анықтама.* Егер кездейсоқ шаманың белгілі бір *М0* мәнінде  теңідгі орындалса, онда *М0* кездейсоқ шаманың модасы деп аталады.

*Анықтама.* Егер кездейсоқ шаманың белгілі бір *МD* мәнінде Р(Х<М*D*) = Р(Х>МD) орындалса, онда *МD* кездейсоқ шаманың медианасы деп аталады.

*Анықтама.* Кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үміті бойынша симметриядан ауытқуы, оның асимметриясы деп аталады және оны *АS* деп белгілейді:

, (2.2.10)

мұнда  - үшінші ретті орталық момент, σ - орташа квадратгық ауытқуы.

Егер кездейсоқ шаманың үлестірімі математикалық үміті бойынша симметриялы болса, онда *АS=0*. Егер *АS>0*, онда дифференциалдық функцияның графигі оң жаққа қарай “созыңқы” болады, ал Аs<0, онда сол жаққа қарай “созыңқы” болады.

*Анықтама.* Қалыпты үлестіріммен салыстырғаңда дифференциалдық функцияның графигінің “жатыңқылық” деңгейі анықтайтын шаманы эксцесс деп атайды және оны Еk арқылы белгілейді:

 (2.2.11)

Мұнда қалыпты үлестірім үшін Ек = 0. Егер Ек > 0, онда Гаусс салыстырғанда график “көтеріңкі” болады, егер Ек < 0, график “жатыңқы” болады.

*8.3 мысал.* Үзіліссіз кездейсоқ шама дифференциаддық функция берілген



Кездейсоқ шаманың *M0, MD , AS, Ek* -ларын табу керек.

*Шешуі:* 1. Моданы табу үшін *f(х)* функциясының максимумын табамыз. Ол үшін әуелі бірінші туындыны тауып оны нөлге теңеп, сосын кризистік нүктені тауып, *f(х)-*тің максимумын белгілі схема бойынша анықтаймыз:

,

мұнда  кесіндісінде тек  мәні жатады.

Енді

 Осыдан  Олай болса 

Енді медиананы табалық. Анықтамадан:



Осыдан:



Сондай-ақ,



Осыдан .

Енді AS және E*k* -ларды табу үшін әуелі



табамыз.

Сонда:



Осы есептеулерді пайдаланып АS=0 екенін көреміз, яғни *f(х)* функциясының графигі өзінің *М(х)-*і бойынша симметриялы орналасқан.

Сол сияқты 

екенін көреміз, яғни f(х)-тің графигі Гаусс қисығына қарағанда “жатыңқы” болады екен.

*8.4 мысал.* Кездейсоқ шама дифференциалдық функциясы арқылы берілген:



Интегралдық функциясын табыңыз.

*Шешуі:* Дифференциалдық функцияның төртінші қасиеті бойынша:



Осыдан х≤0 болғанда f(х)=0 болатынын пайдалансақ:



Енді *0<х≤3* болғанда  сондықтан:



Ақырында х>3 болғанда f(х)=0 осыдан



Сонымен:



*8.5 мысал.* Үзіліссіз кездейсоқ шама үлестірім функциясымен берілген:



1. Үлестірім тығыздығын табу керек.

2. *M(X), D(X)* табу керек.

3. Мына интервалдан  мән қабылдауының ықтималдығын табу керек.

*Шешуі:*

1. 

2. 



3. 

*8.6 мысал.* Кездейсоқ шама дифференциалдық фунқция арқылы берілген:

Табу керек: 

*Шешуі:* а коэффициентін табу үшін дифференциалдық функцияның қасиетін пайдаланамыз:



Есептің шарты бойынша:



Сондықтан а=1.

Енді *Ғ(х)-*ті табалық:

 болса: 

 болса: 

болса: 

Онда:



Математикалық күтімі мына формула көмегімен есептейміз:



Дисперсияны есептейміз:



Енді  табалық. Ол үшін:



яғни 

Бұл ықтималдықты сондай-ақ интегралдық функцияны пайдаланып та табуға болатынын көрсетелік:



*8.7 мысал.* Кездейсоқ шама дифференциалдық функциясы арқылы берілген:



Табу керек:

1. Коэффициент а-ны;

2. Үлестірім функциясын;

3. [0; 1/2] аралықтан мән қабылдау ықтималдығын.

*Шешуі:* 1. Коэффицент а-ны табу үшін үлестірім тығыздығының, екіншісі қасиетін пайдаланамыз, яғни

немесе

яғни 

Сонда 

Бұл жерде үлестірім тығыздығының төртінші қасиетін пайдаланамыз.

Сонда:



*Негізгі әдебиеттер:*

1. В. Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие /- Изд. 11-е, стер. - М. : Высш. шк., 2005. - 479 с.

2. Y. A. Rozanov. Probadility theory: a concise course [Текст] : научное издание / - New York : Dover publications, INC, 2013. - 148 p.

3. К.В. Балдин, В.Н. Башлыков. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / - М.: Дашков и К, 2016. - 472 c.

4. П.С. Геворкян, А.В. Потемкин, И.М. Эйсымонт. Теория вероятностей и математическая статистика / - М.: Физматлит, 2016. - 176 c.

5. К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В Рукосуев. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / - М.: Дашков и К, 2016. - 472 c.

*Қосымша әдебиеттер:*

1. Қаратаев Жақсыберді. **Ықтималдықтар теориясы**: оқу құралы / - Алматы : CyberSmith, 2017. - 400 б.

2. Г.Г. Битнер.. Теория вероятностей: Учебное пособие / - Рн/Д: Феникс, 2012. - 329 c.

3. Қазешев А.К. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Есептер жинағы. – Алматы «Ғылым», 2005, 182 б.

4. В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах / - М.: Ленанд, 2015. - 384 c.

**№9 дәріс. *Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың кейбір үлестірім заңдары. Негізгі қасиеттері мен анықтамалары.***

Жоспар:

1. Бірқалыпты үлестірім заңдары.

2. Көрсеткіштік үлестірім заңы.

3. Қалыпты үлестірім заңы.

*Бірқальшты үлестірім заңдары.*

*Анықтама.* Егер X — кездейсоқ шамасы [а,b] аралығында мән қабылдаса және оның үлестірім тығыздығы:

  (9.1)

теңдігі арқылы анықталса, оңда ол кездейсоқ шама *бірқалыпты үлестірім заңымен* берілген дейді.

Бұл үлестірім заңдылығы үшін

 (9.2)

Интегралдық функциясы:

  (9.3)

Берілген аралықтан [с;d] мән қабылдау ықтималдығы:

 (9.4)

*9.1 мысал.* Кездейсоқ шама дифференциалдық функциясы арқылы берілген:



Интегралдық функцияны табыңыз. *М(х), D(х)* есептеңіз.

*Шешуі:* Есептің шарты бойынша [0;1] аралығында *f(х)=1*, яғни тұрақты. Сондықтан бұл кездейсоқ шама бірқалыпты үлестірім заңымен берілген. Мұнда *а=0, b=1.*



Олай болса:



*9.2 мысал.*Автобустың аялдамаға келу интервалы 10 мин. Кездейсоқ шама – автобусты күту уақыты. Осы кездейсоқ шаманың дифференциалдық функцияларын жазыңыз.

*Шешуі:* Есептің шарты бойынша *a=0,b=10*. Сондықтан,



Енді интегралдық функцияны табалық:



*Көрсеткіштік үлестірім заңы.*

*Анықтама.* Егер X - кездейсоқ шамасы мына үлестірім тығыздығы

 (9.5)

арқылы берілсе, онда ол *көрсеткіштік үлестірім заңымен* берілген дейді.

Интегралдық функциясы:

 (9.6)

Бұл үлестірімнің саңдық сипаттамалары:

 (9.7)

Кездейсоқ шаманың [а,b] аралығынан мән қабылдау ықтималдығы:

 (9.8)

*9.3 мысал.* Кездейсоқ шама интегралдық функциясы арқылы берілген:



Математикалық күтімі, дисперсияны табыңыз.

*Шешуі:* Әуелі ықтималдық тығыздығын табамыз.

.

Бұдан .

*Қалыпты үлестірім заңы.*

*Анықтама****.*** Егер X — кездейсоқ шамасы мына үлестірім тығыздығы

 (9.9)

арқылы берілсе, онда ол қалыпты үлестірім заңымен берілген дейді.

Мұнда

 (9.10)

Соңдай-ақ

 (9.11)

қалыпты үлестіріммен берілген кездейсоқ шаманың берілген интервалдан мән қабылдауының ықтималдығы, *Ф(х)* — Лаплас функциясы. Мына формула

 (9.12)

кездейсоқ шаманың өзінің математикалық күтімінен ауытқуының абсолют шамасы δ-дан кіші бодуының ықтималдығын анықтайды. Егер формулада δ=3σ болса, онда



немесе



яғни кездейсоқ шаманың өзінің математикалық күтімінен ауытқуының абсолют шамасы 3σ-дан аспауының ықтималдығы бірге өте жақын екенін көрсетеді.

Осыдан *үш сигма ережесі* шығады:

Егер кездейсоқ шама қалыпты үлестіріммен берілсе, онда оның математикалық күтімінен ауытқуының абсолют шамасы үш орташа квадраттық ауытқудан аспайды.

*9.4 мысал.* Станок-автомат ұзындығы 125 мм детальдар дайындайды. Олардың берілген ұзындықтан ауытқуы 0,5 мм аспайды, Дайындалған детальдардың 7 проценті сапасыз. Деталь ұзындықтарын кездейсоқ шама ретінде қарастырып және оны қалыпты үлестірім арқылы берілген деп оның дисперсиясын табу керек.

*Шешуі:* X—кездейсоқ шама детальдар ұзындығы болсын. Есептің шарты бойынша детальдардың орташа ұзыңдығы 125 мм, олай болса *М(Х)=а=125 мм*. Сондай-ақ дайындау кезінде 124,5<Х<125,5. Себебі берілген ұзындықтан ауытқу 0,5 мм аспайды. Сондықтан *α= 124,5, β=125,5*. σ=? Енді (2.2.23) формуласын пайдаланайық.



Есептің шарты бойынша детальдардың 7 проценті сапасыз. Олай болса, яғни 0,93 ықтималдықпен сапалы детальдар дайындалады.

*Ф(х) — функциясьшың кестесінен*

 теңдігінен  аламыз.Осыдан 

*9.5 мысал.* Кездейсоқ шама қалыпты үлестіріммен берілген және *М(X)=30, D(X)=4.* Мына теңсіздіктің |х-30|<δ ықтималдығы 0,8-ге тең болғанда δ қандай болу керек?

*Шешуі:* Есептің шарты бойынша:



осыдан 

Кестеден 

*9.6 мысал.* Кездейсоқ шама қалыпты үлестірім арқылы берілген. Математикалық үміті *М(Х)=5, D(Х)=0,64.* Дифференциалдық функциясын жазыңыз. Мына [4;7] интервалдан мән қабылдауының қабылдауының ықтималдығын табыңыз.

*Шешуі:* Есептің шарты бойынша *М(Х)=5, D(Х)=0,64*, яғни σ=0,8. Сондықтан:





*9.7 мысал.* Айталық дайындалған бөлшектің бір өлшемі қалыпты үлестіріммен берілген кездейсоқ шама болсын, математикалық үміті а=10см, ал σ=0,01.

1) кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен ауытқуы 0,025-тен артпауының ықтималдығын табыңыз;

2)бөлшектің өлшемі 10,03 сантиметрден артпайтындығының ықтималдығын табыңыз;

3) кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен ауытқуының абсолют шамасы 0,025-тен артпауыньщ ықти- маддығы 0,99-ға тең болуы үшін бөлшектің дайындалуының дәлдігін сипаттайтын σ қандай болуы керек?

*Шешуі:*



сонда кестеден:



осыдан: σ=0,0077.

*9.8 мысал.* Ықтималдық тығыздығы функциямен анықталатын кездейсоқ *Х* шамасының *F(x)* үлестіру функциясын табыңыз



*Шешуі:* F (x) үлестіру функциясын табу үшін жоғарыда айтылған интегралдық функцияны табу формуласын қолданамыз.

Егер  онда .

Егер  болса, онда



.

Егер  болса, онда





.

Егер  болса, онда

.

Сондықтан ізлеп отырған интегралдық функциямыз келесі түрдегідей беріледі:



*Негізгі әдебиеттер:*

1. В. Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие /- Изд. 11-е, стер. - М. : Высш. шк., 2005. - 479 с.

2. Y. A. Rozanov. Probadility theory: a concise course [Текст] : научное издание / - New York : Dover publications, INC, 2013. - 148 p.

3. К.В. Балдин, В.Н. Башлыков. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / - М.: Дашков и К, 2016. - 472 c.

4. П.С. Геворкян, А.В. Потемкин, И.М. Эйсымонт. Теория вероятностей и математическая статистика / - М.: Физматлит, 2016. - 176 c.

5. К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В Рукосуев. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / - М.: Дашков и К, 2016. - 472 c.

*Қосымша әдебиеттер:*

1. Қаратаев Жақсыберді. **Ықтималдықтар теориясы**: оқу құралы / - Алматы : CyberSmith, 2017. - 400 б.

2. Г.Г. Битнер.. Теория вероятностей: Учебное пособие / - Рн/Д: Феникс, 2012. - 329 c.

3. Қазешев А.К. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Есептер жинағы. – Алматы «Ғылым», 2005, 182 б.

4. В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах / - М.: Ленанд, 2015. - 384 c.

**№10 дәріс. *Кездейсоқ шамалар жүйелері функциялары және олардың қасиеттері. Олар туралы теоремалар. (Кездейсоқ векторлар).***

Жоспар:

1. Кездейсоқ шамалар жүйелері.

2. Кездейсоқ шамалар жүйелері функциялары және олардың қасиеттері..

3. Негізгі теоремалар.

Бір элементарлық кеңістікте  кездейсоқ шамалар анықталған болсын. Сонда  кездейсоқ шамалар жүйесі деп аталады, ал  кездейсоқ вектор деп аталады, мұндағы  оның координаталары болады.

Бір өлшемді кездейсоқ шамаларға қатысты негізгі түсініктер мен анықтамалар көпөлшемді кездейсоқ шамалар үшін де сақталады. Екіөлшемді үзіліссіз кездейсоқ шамалар үлестірім функциясы немесе дифференциадық үлестірім функциясы арқылы анықталады.

Үлестірім функциясы *Х<х* және *Ү<у* теңсіздіктерінің бір мезгілде орындалуының ықтималдығы ретінде анықталады:

*F(X,y)=P(X<x, Y<y)*. (10.1)

Негізгі қасиеттері:





Үзіліссіз кездейсоқ шамалар үшін

 (10.2)

Мұнда *f(x,y)*- дифференциалдық үлестірім функциясы



Ал дискретті кездейсоқ шамалар үшін

 (10.3)

болса, онда X және Ү тәуелсіз кездейсоқ шамалар деп аталады, дискретті кездейсоқ шамалар үшін тәуелсіздік шарты:



|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Y | y1 | y2 | … | yi | … | yn | Px |
| X |  |  |  |  |  |  |  |
| x1 | P11 | P12 | … | P1j | … | P1n | Px1 |
| x2 | P21 | P22 | … | P2j | … | P2n | Px2 |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
| xi | Pi1 | Pi2 | … | Pij | … | Pin | Pxi |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
| xm | Pm1 | Pm2 | … | Pmj | … | Pmn | Pxm |
| Py | Py1 | Py2 | … | Pyj | … | Pyn | 1 |

*10.1-кесте.* Екіөлшемді дискретті кездейсоқ шамалар кесте арқылы беріледі.

Осы кестеден *X* және *Ү* функцияларының үлестірім кестелері былай жазылады:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | x1 | x2 | … | xi | … | xm |
| Px | Px1 | Px2 | … | Pxi | … | Pxm |
| Y | y1 | y2 | … | yj | … | yn |
| Py | Py1 | Py2 | … | Pyj | … | Pyn |

*10.2-кесте. X* және *Ү* функцияларының үлестірім кестелері.

Соңдай-ақ, шартты ықтамалдықтар төмендегі түрде анықталады:



Сандық сипаттамалары





Сондай-ақ екі өлшемді кездейсоқ шамалар үшін ковариация, корреляция коэффициенітерінің маңызы зор:



Осында, егер *х* және *у* тәуелсіз кездейсоқ шамалар болса онда, *r(х,у) = 0* болады.

Шартты математикалық үміттер:



*10.1-мысал.* Техникалық бақылау бөлімі шығарылған бөлшектердің стандартын тексереді. Негізгі тексерілетін параметрлер олардың ұзындығы мен ені. Сонда *X* — детальдің енінің стандарттан ауытқуы, *Ү* -ұзындығының стандарттан ауытқуы. Кездейсоқ шамалар кестемен берілген

1-кесте.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Y  X | -1 | 0 | 1 | Рх |
| -2 | 0,21 | 0,17 | 0,32 | 0,7 |
| 3 | 0,12 | 0,07 | 0,11 | 0,3 |
| Ру | 0,33 | 0,24 | 0,43 | 1,00 |

1. *X* және *Ү* кездейсоқ шамалардың үлестірім заңдарын жазыңыз.

2.а) *Х*-тің *Ү=у3* болғандағы шартты үлестірім заңын жазыңыз;

б) *Ү-*тің *Х=х2* болғандағы шартты үлестірім заңын жазыңыз.

3. *X* пен *Ү* өзара тәуелсіз бе?

4. Үлестірім функциясын Ғ(х,у) табыңыз:

Бір өлшемді *X* және *Ү* кездейсоқ шамалардың үлестірім Ғ1(х) және Ғ2(у) функцияларын жазыңыз.

5. Корреляциялық коэффициентгі табьщыз.

6. Шартты математикалық үміттерін табыңыз.

*Шешуі:* 1-кестеден *X* және *Ү* кездейсоқ шамаларының үлестірім зандары төмендегідей түрде жазылады:

2-кесте 3-кесте

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Х | -2 | 3 |
| Рх | 0,7 | 0,3 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Y | -1 | 0 | 1 |
| Рy | 0,33 | 0,24 | 0,43 |

1. а) Х-тің Ү=у3 болғандағы щартты үлестірім заңын жазу үшін әуелі

 - терді табамыз:



Сонда мына үлестірім заңын аламыз:

4-кесте

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Х | -2 | 3 |
| P(X/Y=y3) | 32/43 | 11/43 |

б) У-тің Х=х2 болғандағы шартты үлестірім заңын осылай есептесек:

5-кесте

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Х | -1 | 0 | 1 |
| P(X/Y=y3) | 12/30 | 7/30 | 11/30 |

3. X және Ү тәуелсіз бе?

Екі X және Ү кездейсоқ шамалардың өзара тәуелсіздігін анықтау үшін олардың сәйкес шартты және шартсыз үлестірім заңдарын салыстыру керек. Егер ол заңдар бірдей кестелермен берілсе, оңда олар тәуелсіз болғаны, ал егер ол кестелер бірдей болмаса, онда олар тәуелді болғаны. Сондықтан біз 2-ші мен 4-ші және 3-ші мен 5-ші кестелерді өзара салыстырсақ, олардың бірдей еместзгін байқаймыз, олай болса X және Ү өзара тәуелді кездейсоқ шамалар болады.

4. Үлестірім функциясын (10.3) формуланы пайдаланып жазамыз

Енді F1(x) және F2(x) функцияларын 2 мен 3-кестені пайдаланып табамыз:

1. Корреляциялық коэффициенті



формуласын пайдаланып табалық.

Әуелі М(Х) және М(У)-терді 2-3-кестелерді пайдаланып табамыз.

М(Х) = —2\*0,7+3\*0,3=—0,5; D(X)=5,25, σx = 2,29

M(y)=-1\*0,33+0\*0,24+1\*0,43=0,1, D(y)=0,87, σy =0,866



Сонда:



Осыдан rxy =0 екенін көреміз, яғни X және Ү өзара тәуелді кездейсоқ шамалар болады.

6. Айталық *М(Х/Ү=у3)* және *М(Ү/Х=х2)* табу керек болсын. Оларды табу үшін 4,5-кестелерді пайдаланамыз.

Сонда:



*10.2 мысал.* Өзара тәуелсіз *X* және *Ү* кездейсоқ шамалар сәйкес *[а,b]* және *[с,а]* аралықтарында бірқалыпты үлестірім заңдарымен берілген. Табу керек:

1. *f1(х), f2(у)* үлестірім тығыздықтарын;

2. *(Х,Ү)* жүйесінің *f(х,у)* үлестірім тытыздығын;

3. X жөне Ү кездейсоқ шамаларының Ғ1(х) және Ғ2(у) үлестірім функцияларын;

4. (Х,Ү) жүйесінің Ғ(х,у) үлесіірім функциясын;

5. х1 ,x2 [а,b] және y1 ,y 2[a,b] болғанда Р(х,<Х<х2, у<Ү<у) табу керек.

*Шешуі:* Бірқалыпты үлестірімнің анықтамасы бойынша:

1. *f1(х), f2(у)* үлестірім тығыздықтарын есептейік

1. Х және У тәуелсіз болғандықтан  осыдан

4. Х және У тәуелсіз болғандықтан  осыдан:

1. Үлестірім функциясының бесінші қасиеті бойынша:



*10.3 мысал.* Екі кездейсоқ X және Ү шамалар жүйесі үлестірім функциясымен берілген:



Үлестірім тығыздықтары *f(x,y),f1(x), f2(y*)және Ғ1(х), Ғ2(у)-ті тап.

*Шешуі:*

1. 

2. 



3. 

4. 

*Негізгі әдебиеттер:*

1. В. Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие /- Изд. 11-е, стер. - М. : Высш. шк., 2005. - 479 с.

2. Y. A. Rozanov. Probadility theory: a concise course [Текст] : научное издание / - New York : Dover publications, INC, 2013. - 148 p.

3. К.В. Балдин, В.Н. Башлыков. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / - М.: Дашков и К, 2016. - 472 c.

4. П.С. Геворкян, А.В. Потемкин, И.М. Эйсымонт. Теория вероятностей и математическая статистика / - М.: Физматлит, 2016. - 176 c.

5. К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В Рукосуев. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / - М.: Дашков и К, 2016. - 472 c.

*Қосымша әдебиеттер:*

1. Қаратаев Жақсыберді. **Ықтималдықтар теориясы**: оқу құралы / - Алматы : CyberSmith, 2017. - 400 б.

2. Г.Г. Битнер.. Теория вероятностей: Учебное пособие / - Рн/Д: Феникс, 2012. - 329 c.

3. Қазешев А.К. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Есептер жинағы. – Алматы «Ғылым», 2005, 182 б.

4. В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах / - М.: Ленанд, 2015. - 384 c.