1 дәріс

***ДӘРІС ТАҚЫРЫБЫ:* ЕКІ ТӘУЕЛСІЗ АЙНЫМАЛЫСЫ БАР II РЕТТІ ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ КЛАСТАРҒА БӨЛУ ЖӘНЕ КАНОНДЫҚ ТҮРГЕ КЕЛТІРУ**

**ЖОСПАР**

1. Анықтамалар және негізгі ұғымдар.

2. Математикалық модельдеу.

3. II ретті теңдеулер типі.

4. Тұрақты коэффициентті II ретті теңдеулер.

***1. Анықтамалар және негізгі ұғымдар.***

**1. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер** деп *х1, х2, ..., хп* тәуелсіз айнымалыларын *и(х1,х2,...,хп)* белгісіз функцияларымен және оның дербес туындыларымен

 (1.1)

байланыстыратын теңдеулерді айтамыз. Мұндағы *Ғ* - өзінің аргументтерімен берілген функция. Егер *и* ізделінді шешімнің және оның дербес туындысының *Ғ* сызықтық функциясы болса, онда (1.1) теңдеуі сызықты болады. (1.1) теңдеуіндегі бас туындылардың реті теңдеудің реті деп аталады.

Көптеген физика, химия, биология есептерін шешу дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерге келтіріледі, сонымен қатар, бір ғана теңдеу табиғаты бойынша әртүрлі процестерді сипаттауы мүмкін. Сондықтан жаратылыстану есептерінің көлемді аймағын зерттеу үшін дифференциалдық теңдеулердің салыстырмалы түрде алғанда көптеген түрін пайдаланудың қажеті жоқ.

Көбінесе сұйықтар мен газдардың ағыны, диффузия, жылу мен тербелістердің таралуы және басқа да негізгі физикалық процестерді зерттеуге болатын екінші ретті сызықты теңдеулер қарастырылады.

***2. Математикалық модельдеу***

1. Физикалық есептердің математикалық моделінің бастапқы кезеңі ретінде физикалық процестердің өздерін зерттеу емес, белгілі математикалық тәсілдермен зерттелетіндей қарапайым, сонымен қатар қарастырылып отырған процестің басты белгілерін сақтай отырып идеализациялау болып табылады.

2. Процесті сипаттайтын ** шамалары таңдалады. Ереже бойынша, бұл шамалар осы процесс қарастырылатын *D* облысының  нүктелеріне, және *t* уақытына байланысты.

3. «Идеал процеске» бағынатын заңдардың негізінде әдетте дифференциалдық және функционалдық теңдеулерден (немесе теңсіздіктерден) құралатын және қарастырып отырған физикалық процестің математикалық моделі деп аталатын ** шамаларына қатысты математикалық жүйе шығарылады.

4. Ереже бойынша дифференциалдық теңдеулер жүйесі нақты процесті сипаттауға жеткіліксіз шексіз көп шешімге ие болады. Сондықтан, процесті сипаттайтын кейбір қосымша шарттар енгізіледі. Мұндай шарттарға көбінесе шекаралық (шеттік) шарттар жатады, яғни қарастырылып отырған ортаның шекарасында берілген шарттар және процесс басталатын уақыт мезетіне қатысты бастапқы шарттар. Математикалық модель мен қосымша шарттардың жиынтығы қарастырып отырған физикалық есептердің математикалық тұжырымы болып табылып, математикалық физика есептері деп аталады.

5. Математикалық физика есептерінің қисындылығы зерттеледі, яғни шешімнің бар болуы, оның жалғыздығы және есептің берілгендерінің кез келгенінің тұрақты-болмашы өзгерілуі шешімнің де болмашы өзгеруіне әкелетін бастапқы берілгендерге қойылатын шарттар анықталады.

Шешімнің бар болуы мен оның жалғыздығына қойылатын талаптарға есептің берілгендерінің ішінде үйлесімсіздіктің жоқ екені және олардың жалғыз шешімді бөліп алу үшін жеткілікті екені жатады. Орнықтылықты талап ету келесі себептермен қажет. Тәжірибеден алынған кез келген нақты есептердің берілгендерінде әрқашан өлшеу қателігі кездеседі, сондықтан берілгендердің болмашы қателігі шешімнің де болмашы қателігіне әкелуі қажет.

6. Сандық алгоритм мен ЭЕМ-де іске асыратын программалар құрылады және осылайша математикалық физиканың есептерінің жуықталған шешімі табылады.

7. Алынған шешімді талдаудың негізінде қарастырылған модельдің төнірегінде физикалық процесстің қасиеттері туралы қорытынды алынады.

Төменде нақты мысалдардың негізінде біз математикалық физиканың басты дифференциалдық теңдеулерімен және олар үшін қойылатын басты есептермен танысамыз.

***3.******II ретті теңдеулер типі***

Екінші ретті теңдеулерді қарастырайық.

 (1.2)

 нүктесін белгілейік және квадраттық форма құрайық.

 (1.3)

(1.2) теңдеу х0 нүктесінде эллипстік деп аталады, егер А квадратттық формасының таңбасы анықталған болса; гиперболалық деп аталады, егер осы нүктеде А квадраттық форма оны квадратттардың қосындысына келтіргенде, біреуінен басқасының анықталған белгісі болатын барлық коэффициенттерге ие болса, ал қалған бір коэффициент қарама – қарсы таңбамен берілсе; параболалық деп аталады, егер х0  нүктесінде А квадраттық формасын квадраттардың қосындысы түріне келтіргенде тек бір коэффициенті нольге тең, ал қалғандарының таңбасы бірдей болса.

(1.2) теңдеу эллипстік түрге, сәйкес гиперболалық түрге т.с.с. жатады D облысында, егер бар  нүктелерінде ол эллипстік, сәйкесінше гиперболалық және параболалық болса.

Егер коэффициенттер aij=const болса, онда теңдеулердің сол немесе басқа түрге жатуы тәуелсіз айнымалылар мәніне байланысты емес. Эллипстік теңдеудің қарапайым түріне Лаплас теңдеуін алуға болады; гиперболалық түрге толқындық теңдеу және параболалық түрге – жылуөткізгіштік теңдеуі жатады.

***4. Тұрақты коэффициентті II ретті теңдеулер.***

Тұрақты коэффициентті II ретті теңдеулер төмендегідей

 (1.4)

(aij, bi, c)=const. x=(x1,…xn) орнына ерекшеленбеген сызықтық түрлендірулер көмегімен жаңа тәуелсіз  айнымалылар енгіземіз.

  (1.5)

Мұнда,  анықтауышы нольден өзгеше.

  (1.6)

теңдеуді аламыз.

(5) теңдеуді (3) – ке қойып, келесіні аламыз

 (1.7)

Мұндағы,

 (1.8)

(1.8) теңдеудегі түрлендіру формулалары (1.4) тегі II ретті туындылары коэффициенттерін (1.5) теңдеуге ауыстырғанда квадраттық форманың түрлендіру формулаларымен сәйкес келетінін көру қиын емес.

 (1.9)

егер онда сызықтық түрлендіру жүргізсек

 (1.10)

мына түрге келеді

  (1.11)

Алгебрада әрдайым сik коэффициенттерін (1.9) квадраттық форма квадраттардың қосындысы түріне келетіндей таңдап алуға болатыны дәлелденген.



яғни (1.11) да , егер  және  болса. Коэффициенттер  немесе .  коэффициенттері таңбасы (1.4) теңдеудің типін анықтайды.

Түрлендірілген (1.7) теңдеу мына түрге келеді

 (1.12)

Осы түрі (1.4) теңдеудің канондық түрі деп аталады.

Барлық  деп алсақ, яғни (1.4) параболалық тип емес, онда  функция үшін



деп алсақ,

 (1.13)

түріндегі теңдеуді I ретті туындылы мүшелерден құралмайтынын тексеру қиын емес.

Эллипстік теңдеу үшін барлық  немесе , қажет болған жағдайда теңдеудің екі жағын да (-1) ге көбейтіп,  деп санауымызға болады. Осылайша, (1.4) тұрақты коэффициентті теңдеу  болғандағы (12) түрге келтіріледі. (1.4) гиперболалық теңдеу болғанда  және , ал  деп есептейміз. Онда барлық сызықты теңдеулер (1.4) гиперболалық типті теңдеу келесі түрге келеді

 (1.14)

 (1.15)

(1.15) теңдеуді канондық түрге келтіретін әрбір х0 нүктесі үшін түрлендіру, сәйкесінше басқа х1 нүктесіндегі түрлендіруге мүлде дәл келмейтінін айтуға болады. Сонымен қатар, екіден көп тәуелсіз айнымалылары бар (1.15) квадратттық форманы тіптен ең аз облыста да тәуелсіз айнымалыларды түрлендіру көмегімен де канондық түрге келтіру мүмкін емес.

Екінші ретті туындыларына салыстырмалы сызықты, екі тәуелсіз айнымалылы екінші ретті квазисызықты теңдеулерді қарастырайық:

 (1.16)

Мұндағы, . Егер жаңа ізделінді функцияларды енгізсек,  , , онда (1.16) теңдеуден келесі түрдегі бірінші ретті теңдеулер жүйесі пайда болады

 (1.17)

Кері жағдай дұрыс емес: кез келген бірінші ретті теңдеулерді екінші ретті теңдеулердің біреуіне келтіру.

Механика мен физикадағы көптеген есептер бірінші ретті жүйелерді зерттеуге келеді.

х, у тәуелсіз айнымалыларды ауыстыру көмегімен (1.16) теңдеуді канондық түрге келтіру керек.

,  екі рет дифференциалданатын функция болсын, якобианы

   (1.17)

Ескі айнымалылардың туындылары жаңа айнымалылардың туындыларымен келесі түрде өрнектеледі

, ,

 (1.18)

(1.18) теңдеудегі туындылардың мәнін (1.16) теңдеуге қойып, мынаны аламыз

 (1.19)

мұндағы,



  функциясын келесі шарттардың тек біреуі орындалатындай таңдап алуға болатынын көрсетеміз:

1.  

2.  

3.  .

Онда (5) түрлендірілген теңдеу өте қарапайым түрге келетіні анық.

Бірінші ретті дифференциялдық теңдеуді қарастырайық

 (1.20)

және барлық  облыстарындағы жағдайларды зерттейміз, мұндағы .

1. >0 болсын. Онда (2) теңдеу гиперболалық типке жатады деп айтады.  немесе  деп санаймыз. (Мысалы,  болсын). Онда (1.20) теңдеуді келесі түрде жазуға болады



Бұл теңдеуді екіге бөліп жазсақ:

  (1.21)

Осыдан, (1.21) теңдеудің әрбіреуінің шешімі (1.20) теңдеудің де шешімі болады.

(1.21) сәйкес қарапайым дифференциялдық теңдеулер жүйесін құрамыз

  (1.22)

(8) теңдеуді бір теңдеу түрінде жазуға болатынын байқаймыз.

 (1.23)

(8) теңдеудің интегралдары

  (1.24)

болсын. Онда олардың сол бөлігі (1.21) теңдеудің шешімі болатыны белгілі, ендеше (1.20) теңдеудің де шешімі. (1.23) теңдеу (1.16) теңдеуге сипаттамалық, ал (1.24) оның интегралдары (1.16) теңдеуге сипаттама деп аталады.

>0 гиперболалық типті теңдеулер үшін (1.24) нақты және әр түрлі. Осылайша біз екі әр түрлі нақты сипаттама аламыз.

 , (мұнда  - (6) теңдеудің шешімдері) қойып,  аламыз. Осыдан . (1.19) теңдеуді 2b – ға бөліп, біз оны келесі түрге келтіреміз

.

Міне, осы гиперболалық типті теңдеудің канондық түрі.

2. Қарастырылатын облыста =0 болсын, онда (1.16) теңдеу параболалық типке жатады. Қарастырылатын облыста (1.16) теңдеудің коэффициенттерін біруақытта нөлге ұмтылмайды деп санаймыз. Жалпылықты бұзбай, G да  деп санауға болады. Онда (1.21) дегі екі теңдеу де 

 (1.25)

түріне ұмтылады және сәйкес келеді. =0 кезінде (1.25) теңдеудің әрбір шешімі келесі теңдеуді де қанағаттандыратынын көру қиын емес

 (1.26)

(1.25) теңдеу тек қана *φ(x,y)=const* бір – ақ шешімге ие.

 қоямыз, мұнда φ1(x,y) – (1.25) теңдеудің шешімі, ал  орнына кез келген функцияны аламыз, тек оның якобианы  нөлден өзгеше болу керек.  болғандықтан, , онда *φ2=x* деп қабылдауға болады. Онда (1.19) теңдеудегі , ал коэффициент  болғанда келесі түрде болады

.

Қарастырып отырған облыста (1.25), (1.26) келісілгендей . (1.19) теңдеудегі  коэффициенті келесі түрге келеді

,

осыдан  кері жағдайда (11) ге сәйкес якобиан . (1.19) теңдеуді  бөліп, біз келесі түрге келеміз



Бұл параболалық типті теңдеудің канондық түрі.

3. Қарастырылып отырған облыста <0 болсын. Онда (1.16) теңдеу эллипстік типке жатады деп айтады. Бұл жағдайда (1.24) теңдеудің интегралдары комплексті – түйіндес болады және біз нақты сипаттама алмаймыз.

десек, мұнда φ1 және φ2 – (6) теңдеуді қанағаттандыратын комплексті түйіндес функциялар. (6) теңдеудегі  қойып



аламыз.

Осы теңдіктегі нақты және жорамал бөлігін нөлге теңестірсек келесі түрге келеді



.

Осыдан (1.19) теңдеудің көмегімен  және  бөлгеннен кейін (1.19) теңдеу келесі түрге ие

. (1.27)

Бұл эллипстік типтің канондық түрі. Егер (1.16) теңдеу сызықты болса, онда (1.27) теңдеу де сызықты болады.

**Ұсынылатын әдебиеттер**

# Негізгі әдебиеттер:

1. Орынбасаров М., Сахаев Ш.С. Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы. Алматы. «Қазақ университеті» баспасы.

2. Сахаев Ш.С., Төлегенова М.Б. Математикалық физика теңдеулерінің есептер шығару практикумы. Алматы. «Қазақ университеті» баспасы.

3. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1975.

4. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М. 1985.

5. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М., 1976.

6. Антипов Ю.Н., Омаров Т.Е. Руководство к решению задач по уравнениям математической физики. Караганда, Изд-во КарГУ, 1989.

**Қосымша:**

7. Владимиров В.С. Уравнениям математической физики. – М: Наука, 1981.

8. Абдыманапов С.А., Ефимов В.В. Уравнения математической физики. Программа, методические указания и контрольные Тапсырмалар для студентов-заочников математических специальностей. Караганда, КарГУ, 1992.

9. Владимиров В.С. и другие. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М: Наука, 1974.

10. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. – М: Наука,1980.

2 дәріс

***ДӘРІС ТАҚЫРЫБЫ:* Коши есебі. Коши – Ковалевская теоремасы**

**ЖОСПАР**

1. Ішек тербелістер теңдеуі үшін Коши есебі. Ішек тербелістер теңдеуі үшін Фурье әдісі.

2. Коши-Ковалевская теоремасы.

1. ***Ішек тербелістер теңдеуі үшін Коши есебі. Ішек тербелістер теңдеуі үшін Фурье әдісі.***

Көптеген физикалық процесстердің математикалық сипаты сызықты дифференциалдық және интегралдық немесе интегро- дифференциалдық теңдеулерге келтіріледі. Физикалық есептің өте кең тараған класстары

 (2.1)

түріндегі екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеуге келтіріледі.

Механиканың (ішектің, стерженнің, мембрананың тербелістері) көптеген есептері

 (2.2)

түрндегі тербеліс теңдеуіне келтіріледі, мұндағы нен, кеңістіктік координатасынан, уақыттан тәуелді белгісіз функция; - тербеліс процесі жүретін ортаның қасиеттерінен анықталады; бос мүше сыртқы ауытқудың интенсивтілігін (үдемелігін, қарқындылығын) өрнектейді. және  оператордың анықтамасына сәйкес (2.2) теңдеудегі



(2.2) теңдеуді шығаруды ішектің кішкене көлденең тербелісін мысалға ала отырып көрсетуге болады.

**1 анықтама.** Ішек деп - иілуге кедергі келтірмейтін, тартылған жіпті айтады.

жазықтығында ішек  осімен беттесетін өзінің тепе – теңдік жағдайының маңайында кішкене көлденең тербеліс жасайтын болсын. уақыт мезгілінде  - нүктесінде ішектің тепе – теңдік күйден ауытқу шамасын арқылы белгілейік. Сондықтан - уақыт мезгіліндегі ішектің теңдеуі.

Физикалық тұрғыдан қарастырғанда, стержен немесе ішектің тербеліс процесін бірмәнді сипаттау үшін қосымша бастапқы уақыт мезгіліндегі - жылжу шамасы мен  жылдамдығын беру керек және соңғы уақыт мезгіліндегі жылдамдық өзгерістерін беру керек.

**Шекаралық шарттар мысалы:** а) Егер стержень немесе ішектің соңы - заңы бойынша қозғалса, онда



б) Егер - соңына қандайда бір күш әсер етсе, онда



с) Егер стерженнің - соңы қатты бекітілген және - қаттылық коэффициенті болса, онда Гук заңына сәйкес



Осы сияқты



мембрананың кішкене көлденең тербеліс теңдеуін шығаруға болады.

**2 анықтама.** Егер - тығыздығы тұрақты болса, онда

 (2.3)

мембрананың тербеліс теңдеуі екі өлшемді тербеліс теңдеуі деп аталады.

***Коши есебі:***

(2.2) тербеліс теңдеуі үшін (гиперболалық тип) Коши есебі келесі түрде қойылады:  жартыжазықтығында (1) теңдеуді және  болғанда

 (2.4)

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын,  класындағы функциясын табу керек.

Шеттік есеп дұрыс қойылған (корректілік) деп аталады, егер ол келесі шарттарды қанағаттандыратын болса:

1. Кейбір  функциялар класында шешімі бар болуы керек.
2. Кейбір  функциялар класында шешімі жалғыз болуы керек.
3. Шешімі берілгендерден (бастапқы және шекаралық шарттарда берілген функциялары, бос мүше, теңдеудің коэффициенттері, т.б.) үзіліссіз тәуелді болуы керек.

*1 мысал.* Келесі Коши есебінің шешімін табу керек.

*uxx + 2cos x uxy – sin2 x uyy – sin x uy = 0* (2.5)

*u* (2.6)

Ол үшін келесі амалдарды орындау керек:

1. Теңдеуді канондық түрге келтіру.

2. Канондық теңдеуді шешу.

3. Коши шарттарын қолданып, кез келген функцияны табу.

Шешу:

1. *А = 1; В = cosx; С = sin x; B2 – AC = 1>0,*

демек теңдеу гиперболалық типке жатады. Сипаттаушы теңдеу мынадай болады: . Оны интегралдау арқылы сипаттаушыларды табамыз:

.

Сонда ауыстыру мынадай болады:

*ξ = y – sin x – x*

*η = y – sin x + x*

Жаңа айнымалыларда туындыларды тауып, оларды (2.5) теңдеуге қойсақ теңдеудің канондық түрін:  аламыз.

2. Сонда (2.5) теңдеудің жалпы шешімі мынадай болады:

*u(x,y) = f1(y – sin x + x) + f2(y – sin x - x),*  (2.7)

мұнда *f1* және *f2* - екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функциялар.

3. (2.6) шартты пайдалансақ

*u*

*uy*

Екінші теңдеуді интегралдасақ:

*f1 (x) – f2 (-x) = ,* где *С = const.*

Кезкелген *f1 (x)* және *f2 (x)* функцияларын табу үшін мына жүйені шешу керек: *f1(x) + f2(-x) = φ0(x)*

*f1(x) – f2(-x) = *

Бұдан

*f1(x) = *

*f2(-x)=*

Табылған *f1* және *f2* функцияларын (2.7) шешімге қойсақ, онда





=.

Жауабы: *u(x,y)*=.

***2. Коши - Ковалевская теоремасы.***

***Теорема.*** Егер барлық берілген функциялары бір нүктенің кейбір манайыңда аналитикалық болса, онда сол нүктенің кейбір манайыңда Коши есебі аналитикалық шешіміне ие болады да ол аналитикалық класынан жалғыз болады.

Коши-Риман эллиптикалық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебі корректілі емес екенін келесі мысал арқылы көрсетейік.

*Адамар мысалы. * функциялар тізбегі Коши-Риман теңдеулер жүйесін

 және  болғанда келесі бастапқы берілгендерді

**

қанағаттандырады.

 болғанда бұл бастапқы берілгендер нольге ұмтылады. Тіпті олардың туындылары

* (*егер *к-*жұп) және

*(*егер *к-*тақ)  болғанда нольге ұмтылады.

Басқа жағынан қарағанда,  кез келген  болғанда шектелмеген. Ендеше бастапқы берілгендер шамасын бағалау үшін қандай норма алынса да, бұдан норманың болмашылығынан шешімнің болмашы екенінің шығатыны туралы айта алмаймыз (бұл жерде шешім оның модулінің максимумы бойынша бағаланады).

Яғни, берілген есеп дұрыс емес қойылған.

**Ұсынылатын әдебиеттер**

# Негізгі әдебиеттер:

1. Орынбасаров М., Сахаев Ш.С. Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы. Алматы. «Қазақ университеті» баспасы.

2. Сахаев Ш.С., Төлегенова М.Б. Математикалық физика теңдеулерінің есептер шығару практикумы. Алматы. «Қазақ университеті» баспасы.

3. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1975.

4. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М. 1985.

5. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М., 1976.

6. Антипов Ю.Н., Омаров Т.Е. Руководство к решению задач по уравнениям математической физики. Караганда, Изд-во КарГУ, 1989.

**Қосымша:**

7. Владимиров В.С. Уравнениям математической физики. – М: Наука, 1981.

8. Абдыманапов С.А., Ефимов В.В. Уравнения математической физики. Программа, методические указания и контрольные Тапсырмалар для студентов-заочников математических специальностей. Караганда, КарГУ, 1992.

9. Владимиров В.С. и другие. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М: Наука, 1974.

10. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. – М: Наука,1980.

3 дәріс

***ДӘРІС ТАҚЫРЫБЫ:* ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТИПТІ ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ОЛАРҒА КЕЛТІРІЛЕТІН ФИЗИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕР**

**ЖОСПАР**

1. Ішектің тербеліс теңдеуі

2. Толқындық - физикалық процесстер

3. Математикалық физика есептері және олардың үйлесімді қойылуы

***1. Ішектің тербеліс теңдеуі***

Пішінінің өзгеруіне кедергі етпей, еркін майыса алатын жіңішке серпімді жіптің тербеліс процесін қарастырайық. Бұл жағдайда серпімді жіпте пайда болатын кернеулер (керілу күші), оның лездік профилінің жанамасы бойынша бағытталған. Енді мұндай жіпті ішек деп атайтын боламыз.

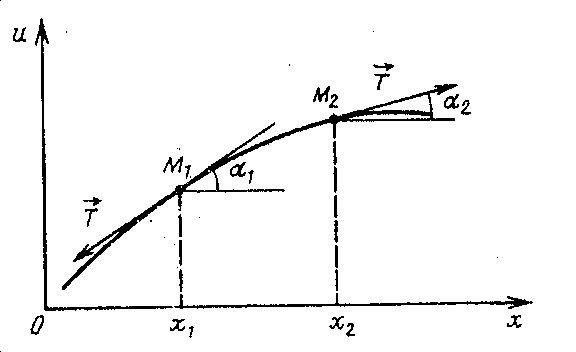
Тепе-теңдік жағдайында ішек  осі бойынша орналасқан болсын. Енді бөлшектерінің орын ауыстыруы бір жазықтықта өтетін және барлық нүктелері  осіне перпендикуляр қозғалатын ішектің тек көлденең тербелісін қарастырамыз.

 арқылы  уақыты мезетіндегі абсциссасы  ішектің нүктесінің тепе-теңдік жағдайынан ауытқуын белгілейміз.  бекітілген мәнінде  функциясының графигі  уақыты мезетіндегі ішектің пішінін бейнелейді (1.1 сурет).

Әрі қарай тек ішектің шамаларының мәндерімен салыстырғанда u ығысуы мен туындыларының кішілігі соншалықты, тіпті олардың квадраттары мен көбейтінділерін елемеуге де болатын болмашы көлденең тербелістерін қарастырамыз. Бұл жағдайда,





1.1-сурет.

Тербелістің болмашылығы болжамынан кез келген уақыт мезетінде ішектің ерекшелінген бөлігінің ұзындығының келесіге тең екені шығады:



Бұл болмашы тербеліс процесінде ішектің бөліктерінің ұзындықтарының ұзартылуын ескермеуге болатынын көрсетеді. Бұл жағдайда, Гук заңына сәйкес, ішектің әрбір нүктесінде *Т* керілуі өзгермейді.

Енді *Т* керілуі *х* нүктесінен тәуелсіз деп санауға болатынын көрсетеміз. Шынында да ішектің көлденең тербелісі үшін *M1M2*ішегінің бөлігінің шеткі нүктелерінде әсер ететін керілу күштерінің  осіне проекцияларының қосындысы нолге тең:



мұндағы -ішекке жүргізілген жанама мен кез келген уақыт мезетіндегі  осі арасындағы бұрыш.

Болмашы тербелістер үшін  орындалса, онда .

Ендеше,  барлық мәндері үшін  деп есептеуге болады. Мәжбүрлі түрде тербеліс жағдайында ішекке бағыты  осіне перпендикуляр болып саналатын сыртқы үлестірілім күш әсер етеді.

Ішектегі салмақтың үлестірімін, жалпы жағдайда, ішектің бойымен өзгеретін  сызықтық тығыздықпен сипаттаймыз. Тұрақты қимадағы біртекті ішек үшін  .

Енді ішектің болмашы көлденең тербелістері процесінің математикалық моделін құрайық. Бұл модельдің негізінде іргелілемелі қозғалыстың динамикалық заңы жатыр (Ньютон заңы), механикалық жүйе үшін ол келесі түрде болады:

 (3.1)

мұндағы  - барлық бөліктерінің импульстерінің қосындысына тең жүйенің импульсі, F – қорытындылайтын сыртқы күш.

Осындай механикалық жүйе ретінде ішектің  ерекшелінген бөлігін қарастырайық. Осы жүйенің қозғалысы  осіне перпендикуляр бағытта жүретініне байланысты, (3.1) теңдеуін  осіне проекция ретінде былай жазуға болады:

 (3.2)

Жүйенің импульсінің қосындысының проекциясы



болатындықтан,



Сыртқы күштердің проекциясы екі қосындыдан тұрады. Оның біреуі ішектің ерекшеленген бөлігінің шеткі нүктелеріне әсер ететін керілу күшін ескерсе, келесісі – ішектің осы бөлігінің бөлшектеріне әсер ететін мәжбүрлейтін күшінің қосындысын ескереді. Бұл проекциялар келесі қатынастармен анықталады:



Алынған өрнекті (3.2) формуласына қоя отырып, оны келесі интегралдық теңдеу түрінде жазамыз:

 (3.3)

 кесіндісін еркін таңдағандықтан, (3.3) теңдеуінен ішектің кез келген нүктесінде кез келген t уақыт мезетінде интеграл астындағы өрнек нольге ұмтылуы керек екені шығады, яғни

 (3.4)

Алынған қатынас ізделінді  функциясына қатысты екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеуді көрсетеді. Ол ішектің болмашы көлденең тербеліс процесін сипаттайды, және оны біртекті емес бірөлшемді толқындық теңдеу немесе жазық толқынды теңдеу деп атайды. Бұл теңдеу гиперболалық типті.

Тұрақты сызықтық тығыздық  жағдайында біртекті ішектің тербеліс теңдеуі мына түрде болады:

 (3.5)

мұндағы 

Егер  болса, онда біртекті теңдеу

 (3.6)

ішектің мәжбүрлейтін күш әсер етпейтін еркін тербелістерін сипаттайды.

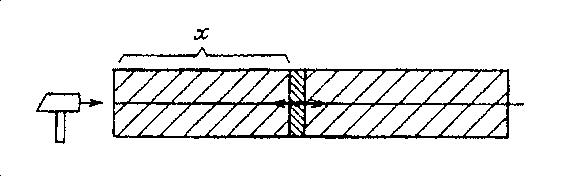
***2. Толқындық - физикалық процесстер***

(3.4)-(3.6) түрдегі теңдеулер тек ішектің тербелісін ғана емес, сонымен бірге толқынды деп аталатын басқа да физикалық процестерді сипаттайды.

Дербес жағдайда, оларға келесілер жатады:

**1. Тұрақты көлденең қималы стерженьнің бойлық немесе бұралатын тербелістері (1.2 сурет) .**

Бойлық тербелістер үшін  -  уақыты мезетіндегі *x* координаталы стержень элементінің өзінің тепе-теңдік жағдайынан бойлық ығысуы, ал , мұндағы -стержень материалының Юнг модулі, -тығыздық.



1.2-сурет.

Бұралатын тербелістер үшін  -  уақыты мезетіндегі *x* координаталы стерженьнің көлденең қимасының бұрылу бұрышы, ал . Мұнда *С* - стерженьнің бұрылу қатаңдығы, ал *І* – оның көлденең осіне қатысты стерженьнің ұзындығы бірлігінің инерция мезеті. *R* радиусты дөңгелектік қималы стержень үшін оларды мына формула бойынша есептеуге болады .

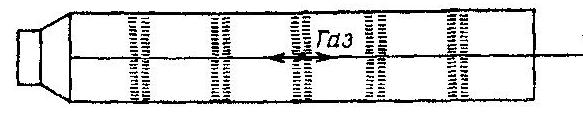
Сондықтан  , мұндағы *G* -материалдың ығысу модулі.

**2. Сұйықтар мен газдардағы жазық акустикалық (дыбыстық) толқындар (1.3 сурет).** Бұл процесте толқынды теңдеуге ортаның *p* қысымды,  тығыздықты қобалжуы немесе жылдамдық потенциалы бағынады.

Изэнтропикалық (адиабаталық) теңдеуі  жағдайындағы ағынды орталар үшін қобалжуының таралу жылдамдығы *a* (дыбыс жылдамдығы) мына өрнектен анықталады:

.

Дербес жағдайда, егер , мұндағы -газдың адиабатасының көрсеткіші, онда , мұндағы  - ортаның қысымының және тығыздығының қобалжымаған мәндері.

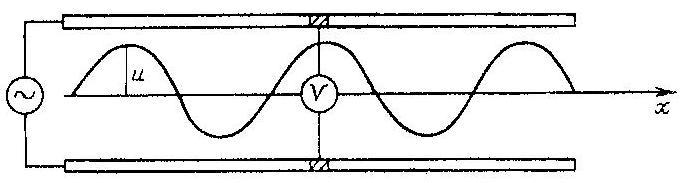


1.3 - сурет

**3. Шығын болмағандағы сызықтың электрлік қобалжуының таралуы (1.4-сурет).**

Мұндай процесс үшін  -кернеу немесе *х* координаталы сым элементтерінің  уақыты мезетіндегі ток күші.

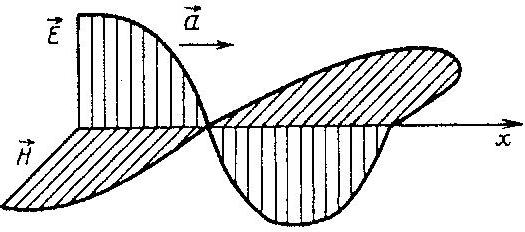
Егер *L* және *C* - сымдардың ұзындықтың бірлігіне үлестірілген индуктивтілігі мен сыйымдылығы болса, онда .



1.4-сурет.

**4. Өткізгіштік емес орталардағы жазық электромагниттік толқындар (сурет -1,5).**

Мұндағы  - электрлік (*E*) және магниттік (*Н*) өрістердің кернеулігі, , мұндағы *c* - вакуумдағы жарық жылдамдығы,  және -сәйкесінше ортаның диэлектрлік және магниттік өткізгіштігі.



1.5-сурет.

Дербес туындылы теңдеулердің қарапайым түрін қарастырайық:

+ (3.7)

(3.7) теңдеудің сипаттамалары болып түзу сызықтар табылады, олардың бойында

.

Осы түзулердің әрқайсысының теңдеуі түрінде берілуі мүмкін. Айырмашылығы - әрқайсысында әртүрлі болатын тұрақтыларында. Тұрақтыларының мәні осы түзулерді нөмірлейді.

 - қандай да дифференциалданатын (тегіс) функция болсын.  түзуінің бойында  туындысын есептейік:

 (3.8)

Осы туындыға арналған (3.8) формула бойынша (3.7) теңдеу әр түзудің бойында тұрақты екенін көрсетеді, яғни  мәні  нүктесінде тек нүкте жатқан  түзуінің «нөміріне» ғана тәуелді. Сәйкесінше, () мәні түзудің «нөмірі» болып табылады.

Егер  дифференцианалданатын функция болса,



Бұдан кез келген  тегіс функциясы  теңдеуінің шешімін береді, яғни (3.7) теңдеудің жалпы шешімі болып табылады.

Жалпы шешімнен нақты бір ғана шешімді белгілеу үшін, қосымша жағдайлар жиынтығын жасау қажет.

Тағы да жазықтықта  түзулерін қарастырайық.

 қисығы түзулерінің әрқайсысымен бір нүктеде ғана қиылыссын. Ал  осы қисықтың параметрлік теңдеуі болсын және осы қисықтың бойында  функциясы берілсін. Онда біздің жазықтықтың түзулерінде бірінші теңдеуді қанағаттандыратын  функциясын  қисығын нүктелерінде функциямыз  берілген мәндерін қабылдайтындай анықтау керек.

Берілген есепті шешу үшін  функциясының түрін анықтау керек. Осы мақсатпен әрбір  мәндері үшін  теңдеуінен өлшемін табамыз -тің мәні  түзуі мен  қисығының қиылысу нүктесі болады және ол біздің шартымыз бойынша жалғыз.  орынды делік. Сонымен қатар, егер  тегіс функция болса, ал  болса, онда құрастыпған функциясы да тегіс болады

.

 қисығының орыналасуының бірнеше жағдайын қарастырайық.

 қисығы ретінде Ox осінен немесе Ot осінен қандайда бір кесінді таңдауымызға болады. Тіпті  қисығы ретінде Ox және Ot остерінің бір-біріне қабысқан кесінділерін де таңдауымызға болады. Бірақ, ол үшін  функциясының элементтері 0 нүктесі арқылы өтетін,  түзуінің бойында дифференциалданатын  функциясын анықтауы керек. түзулерінің әрқайсысының бойында  мәні тұрақты болады, сәйкесінше, кесіндідегі -дің мәні кез-келген болмайды.

Енді шешімнің жалғыздығына тоқталсақ:

Ox осінің АВ кесіндісінде  мәндері берілген делік. Шешімі АВ кесідісін қиятын  түзулері арқылы құрылған жолақта пайда болады. Егер  функциясын үлгімен ав үлкен кесіндісіне жалғастырсақ, онда шешімін одан да кеңірек жолақта қарастыруға болады.  осындай әртүрлі әдіспен жалғастыруға болғандықтан, -ты АВ – да беру де түзулер құрған кеңірек жолақта әртүрлі болады.  теңдеулері арқылы құрылған АВ- мен қиылысатын жолақ – «жалғыздық облысы» болады.

Тағы да бір жағдай қарастырайық. Бұл жағдайда  қисығының орнына  түзулерінің біреуіндегі АВ кесіндісін алайық, мысалы, x- t = 0 бұл жағдайда  , болғандықтан -қа кез келген мән бере алмаймыз, ал бір жағынан  қисығының бойында , бұдан  функцияын тұрақты ретінде таңдау керектігі шығады. әйтпесе,

, 

есебінің ешқандай шешімі болмайды. Егер  таңдасақ, онда есептің шешімі мұнда  функциясы -ге шартты түрде тәуелді болады, ал қалған жағдайда кез келген мәнді қабылдайды.

Сонымен, қосымша шартты енгізу үшін кез келген қисықты ала бермейміз. Ол үшін -ның орналасуын  бойынша ескеру керек. Әдетте  -ның орнына (АВ) осінің кесіндісін таңдайды да, шешімін сипаттамалық жолақтан іздейді. Қосымша шарт  бұл жағдайда бастапқы шарт болып табылады, ал есептің өзі Коши есебі деп аталады.

Гиперболалық жүйелерге осындай бастапқы берілгендер ретінде барлық белгісіз функциялардың бастапқы мәндері қойылады. Сонымен қатар Ox осі сипаттама болмасын делік, яғни  - дың бастапқы мәндері үшін, жүйе арқылы t бойынша туынды анықтауға болады. Жүйе



түрінде берілгендіктен, бастапқы шарттар берілген кесінді  орындалады. Бұл жағдайда жүйе былай болып түрленеді.

,

яғни



***3. Математикалық физика есептері және олардың үйлесімді қойылуы***

Диференциялдық теңдеулер мен қосымша шарттар жиынтығы -математикалық физика есептері деп аталады. Математикалық физика есебі қандай да физикалық процесті бейнелеуі керек деген тұжырыммен оған тек математикалық есепке қажет емес бірнеше талап қояды.

Есеп үйлесімді деп аталады, егер оның шешімі:

1. Бар болса;
2. Жалғыз болса;
3. тұрақты болса, яғни есептің берілуінің аз ғана өзгерісі шешімінің аз өзгеруіне әкелсе.

Бар болу мен жалғыздық талабы есептің берілуінде артығы, сәйкес келмейтіні жоқтығы және жалғыз шешімді болу үшін жеткілікті екендігін білдіреді.

Шешімнің бар болуы мен оның жалғыздығына қойылатын талаптарға есептің берілгендерінің ішінде үйлесімсіздіктің жоқ екені және олардың жалғыз шешімді бөліп алу үшін жеткілікті екені жатады. Орнықтылықты талап ету келесі себептермен қажет. Тәжірибеден алынған кез келген нақты есептердің берілгендерінде әрқашан өлшеу қателігі кездеседі, сондықтан берілгендердің болмашы қателігі шешімнің де болмашы қателігіне әкелуі қажет.

Есеп корректілі емес деп аталады, егер ол кез келген емес бастапқы берілгендер негізінде шешілсе, немесе шешімі жалғыз болмаса, немесе шешім үшін және бастапқы берілгендер үшін шешімнің есептің берілгендерінен үзіліссіз тәуелділік болатындай норма табылмаса.

**Ұсынылатын әдебиеттер**

# Негізгі әдебиеттер:

1. Орынбасаров М., Сахаев Ш.С. Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы. Алматы. «Қазақ университеті» баспасы.

2. Сахаев Ш.С., Төлегенова М.Б. Математикалық физика теңдеулерінің есептер шығару практикумы. Алматы. «Қазақ университеті» баспасы.

3. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1975.

4. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М. 1985.

5. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М., 1976.

6. Антипов Ю.Н., Омаров Т.Е. Руководство к решению задач по уравнениям математической физики. Караганда, Изд-во КарГУ, 1989.

**Қосымша:**

7. Владимиров В.С. Уравнениям математической физики. – М: Наука, 1981.

8. Абдыманапов С.А., Ефимов В.В. Уравнения математической физики. Программа, методические указания и контрольные Тапсырмалар для студентов-заочников математических специальностей. Караганда, КарГУ, 1992.

9. Владимиров В.С. и другие. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М: Наука, 1974.

10. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. – М: Наука,1980.

4 дәріс

***ДӘРІС ТАҚЫРЫБЫ:* ЕКІ ТЕҢДЕУДІҢ ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРІ**

**ЖОСПАР**

1. Акустикалық теңдеу үшін Коши есебі.

2. Ішектің тербеліс теңдеуі. Даламбер формуласы.

1. ***Акустикалық теңдеу үшін Коши есебі.***

Бірінші реттегі екі тәуелсізтеңдеуден тұратын мысалды қарастырайық.

**.**  (4.1)

Жүйенің бірінші теңдеуінің шешімі мына түрде: , ал екіншісінің шешімі . (4.1) жүйеге *Ох* осіндегі  кесіндісінде келесі бастапқы шарттар қоямыз

.

Жүйенің шешімі *АВС* үшбұрышы *АВ* кесіндісіне тірелетін екі характерлік сызықтың қиылысуына болып табылатын *АВС*  үшбұрышының ішінде ғана болатыны айқын. Тек осы үшбұрыштың ішінде ғана шешімі бірмәнді болады.  түзулері бұл жүйенің характеристикасы, ал *АВС-*  характеристикалық үшбұрыш болады.

(4.1) түрдегі жүйеге тыныш ортадағы жазық дыбыс толқындарының таралуын сипаттайтын келесі жүйені келтіруге болады.

,  (4.2)

Мұндағы *u -* қобалжыған ортаның жылдамдығы, ал *р -* осы ортаның қысымы.  тұрақтылары тыныш ортаның қасиеттерімен байланысты: -оның тығыздығын,  - сығылуды сипаттайды. (4.2) теңдеудің екінші теңдеуін  -ге көбейтеміз. Алатын теңдігімізді



бірінші теңдеуге қосамыз (азайтамыз). Нәтижесінде ашық түрдегі мына жүйеге келеміз:

,

мұндағы . Бұл жүйенің жалпы шешімі келесі түрде болатыны белгілі:

.

-ді *u, p* арқылы өрнектейміз

 (4.3)

Бұл формулалар дыбыстың таралу теңдеуінің жалпы шешімін көрсетеді.

 шамалары *Риман инварианты* деп аталады. (4.3) формула Риман инвариантының үлестірілімінің   жылдамдығымен оңға қарай жылжуын, ал  инварианты солға қарай пішінін сақтап  жылдамдығымен жылжуын көрсетеді. Осыған байланысты  шамасы дыбыс толқындарының қобалжуының таралу жылдамдығы, немесе қысқаша, дыбыс жылдамдығы деп аталады.

 (4.4)

бастапқы берілгендерді қанағаттандыратын (4.2) теңдеулер жүйесінің шешімдерін іздейік

 деп алып, акустика теңдеуі үшін Коши есебінің шешімін келесі формулалар арқылы аламыз:



(2) жүйе үшін Коши есебі былай қойылған: (4.4) берілген бастапқы шарттары бойынша (2) жүйенің шешімін табу керек.

1. ***Ішектің тербеліс теңдеуі. Даламбер формуласы.***

Көбінесе (4.2) түрдегі бірінші ретті теңдеулер жүйесінің орнына *р* қысымы үшін екінші реттегі теңдеулер қойылып қарастырылады.

 (4.5)

Ол теңдеу жүйенің бірінші теңдеуін *х* бойынша, ал екіншісін *t* бойынша дифференциалдап, содан кейін  түрдегі аралас туындыны алып тастағаннан кейін шығады. Екінші ретті бұл теңдеуді көбінесе ішектің болмашы тербеліс теңдеуі деп атайды, өйткені ол жіп-ішектің тербелісін айқындайтын теңдеу түрімен бірдей. Сонымен қатар, ол ішектің тербелісін зерттеуге байланысты, алғашқы рет математикалық зерттеулерде пайда болады.

(4.5) теңдеу келесі бірінші реттегі жүйеге эквивалентті екені айқын

 (4.6)

(4.6) жүйенің екінші теңдеуі мынадай жалпы шешімге ие болады.



Төменде кез келген сыптығыр *G* функциясын белгілеу басқа *g* функциясының туындысы арқылы белгілеу ыңғайлы болады. *р*  үшін теңдеуді мына түрде жазуға болады



Оның жалпы шешімі: . Бұдан . Соңғы формуланы Даламбер (1747 ж.) тапқан. 1748 ж. Эйлер -ді  болғанда ,  функциясы арқылы көрсеткен.

 (4.7)

Бұл *Даламбер формуласы* деп аталатын мына формулаға алып келеді

 . (4.8)

Ол (5) теңдеу үшін Коши есебінің шешімін береді. Бұл теңдеу үшін екінші ретті Коши есебі келесі түрде қойылады:

(7) түрдегі бастапқы берілгендерді қанағаттандыратын (4.5) теңдеудің шешімін табу керек.

Коши есебін шешу формуласын (4.8) алу үшін  функцияларының жалпы шешімін  келесі шарттардан анықтау қажет

.

Бірінші теңдікті дифференциалдасақ,  туындылары үшін арналған теңдеулер жүйесіне келеміз:

Осы теңдіктерді интегралдаймыз.

мұндағы,  -берілгендер облысынан алынған кез келген нүкте, *а* және  - интегралдау тұрақтылары.  теңдігінен  деп қорытамыз. Сонымен, 

(4.8) формуласы Коши есебінің шешімі ретінде негізделді.

**Ұсынылатын әдебиеттер**

# Негізгі әдебиеттер:

1. Орынбасаров М., Сахаев Ш.С. Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы. Алматы. «Қазақ университеті» баспасы.

2. Сахаев Ш.С., Төлегенова М.Б. Математикалық физика теңдеулерінің есептер шығару практикумы. Алматы. «Қазақ университеті» баспасы.

3. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1975.

4. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М. 1985.

5. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М., 1976.

6. Антипов Ю.Н., Омаров Т.Е. Руководство к решению задач по уравнениям математической физики. Караганда, Изд-во КарГУ, 1989.

**Қосымша:**

7. Владимиров В.С. Уравнениям математической физики. – М: Наука, 1981.

8. Абдыманапов С.А., Ефимов В.В. Уравнения математической физики. Программа, методические указания и контрольные Тапсырмалар для студентов-заочников математических специальностей. Караганда, КарГУ, 1992.

9. Владимиров В.С. и другие. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М: Наука, 1974.

10. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. – М: Наука,1980.

5 дәріс

***ДӘРІС ТАҚЫРЫБЫ:* ІШЕКТІҢ ТЕРБЕЛІС ТЕҢДЕУІ ҮШІН ФУРЬЕ ӘДІСІ**

**ЖОСПАР**

1. Дербес шешім.

2. Жалпы шешім.

3. Физикалық интерпретация.

1. ***Дербес шешім****.*

Ішектің тербеліс теңдеуінің шешуін табу керек

**** (5.1**)**

шекаралық шарттары

 (5.2)

және бастапқы шарттары

  (5.3)

(5.2) шарттарды қанағаттандыратын (5.1) теңдеудің дербес шешімін іздейміз

 (5.4)

(5.4) теңдеуді (5.1) теңдеуге қойып,  аламыз немесе

 (5.5)

(5.5) теңдеу  барлық мәнінде тепе-тең қанағаттандырылса, (5.5) теңдеудің оң жағы  *х*-тен тәуелсіз болу керек, әйтпесе онда (5.5) теңдеудің сол жағы да *х*-тен тәуелді болады және керісінше.

Демек, (5.5) теңдеудегі  тұрақты болады және біз  және функциялары үшін екі қарапайым теңдеуге келеміз.

 (5.6)

 деп алып, (5.4) теңдеуді (5.2) теңдеуге қойғанда шығатыны

 (5.7)

*Х(х)* функциясын анықтау үшін келесі Штурм-Лиувилль есебіне келеміз: (5.7) шекаралық шарттарды қанағаттандыратын (5.6) теңдеудің екінші теңдеуінің  өзіндік функциясы болып табылатын  функциясы бар болатын, *λ*  параметрінің *өзіндік мән* деп аталатын мәнін табу керек.

Осы есепті шешу үшін  екінші теңдеуінің характеристикалық теңдеуін құрамыз:



бұдан . Демек, шешімнің түрі *λ* таңбасына байланысты.

**(а)**   теңдеуінің жалпы шешімі



Оны (5.7) теңдеуге қойсақ, тек қана егер анықтауышы  болғанда  және  үшін біртекті жүйеге келеміз

,

бұл мүмкін емес.

Сондықтан , (5.7) есебі бұл жағдайда шешілмейді.

**(б)** .  жалпы шешімінің түрі  сәйкес келеді және (5.7) теңдеуден  екенін көреміз, яғни есеп шешілмейді.

**(в)** .  жалпы шешімінің түрі

 (5.8)

(8) теңдеуді (7) шектік шарттарға қойып, мынаны аламыз



бұдан, 

 (5.9)

(5.7) теңдеудің арқасында , ал - кез келген, анықтылық үшін  деп алып, (5.8) теңдеуден келесіні табамыз

 (5.10)

Бұдан көретініміз, (5.9) және (5.10) теңдеулері тек қана  болғанда қарастырылған, өйткені  мәнінде жаңа шешімдер бермейді. ( ) теңдеуі ((6) теңдеудің бірінші теңдеуі) болғанда мына түрге келеді



және оның жалпы шешімі мына формула арқылы есептеледі

. (5.11)

(5.10) және (5.11)-ді (5.4)-ші теңдеуге қойып, (5.1) теңдеудің (5.2) шекаралық шарттарын қанағаттандыратын шексіз дербес шешімдерінің тізбегін аламыз

 (5.12)

***2. Жалпы шешім****.*

(5.1) ішектің тербеліс теңдеуінің жалпы шешімін (5.12) дербес шешімдерінің шексіз қатары ретінде аламыз

**. (**5.13)

Егер (5.13) қатар *х* және  бойынша екі рет үзіліссіз дифференциалдасақ, онда

.

 функциясы (5.1) теңдеуді қанағаттандыратындықтан және салу бойынша  (5.2) шекаралық шарттарды қанағаттандырса, осы шарттарды (5.13) – тегі  да қанағаттандырады.  және  тұрақтыларын (5.3) бастапқы шарттарды қанағаттандыратындай етіп таңдауға болатынын көрсетейік. (5.13)-ті  бойынша дифференциалдайық

** (**5.14)

және (13) пен (14) –ті (3)-ке қоямыз

 . (5.15)

Сонда  және  берілген функцияларын синус бойынша Фурье қатарына жіктеуге келеміз. Белгілі болғандай, (5.15) жіктеу үшін  және  болуы қажет, және сонымен қатар

 (5.16)

(5.16)-ны (5.14)- ке қойсақ, онда (5.1), (5.3) есептерінің шешімін аламыз:

 (5.17)

Алдында көрсеткендей, егер (5.17) қатар бірқалыпты жинақталса, *х* және  бойынша мүшелеп дифференциалданса, ол (5.1)-( 5.3) есептерінің шешімін береді,. Бұл сұрақ жалпы екінші ретті гиперболалық теңдеу үшін курстың екінші бөлімінде зерттеледі.

1. ***Физикалық интерпретация***

**** деп алып, бұл көрсетімді (5.13) теңдеуге қойсақ

. (5.18)

Мұндағы әрбір қатардың мүшесі нүктелері  бірдей фазасымен,  амплитудасымен және  жиілігімен гармоникалық тербеліс жасайтын тұрғын толқын құрайды. Сонымен қатар, ішек биіктігі  тербелісінің жиілігінен тәуелді дыбыс шығарады.

(5.18) теңдеуінің шешімі гармоника ретін ұлғайтқанда амплитудасы жылдам кемитін, сөйтіп ішек шығаратын дыбыстың интенсивтілігіне болмашы әсер ететін және олардың барлық әрекеті дыбыстың тембрін құруға әкелетін жеке гармоникалардан құрастырылады.

**Ұсынылатын әдебиеттер**

# Негізгі әдебиеттер:

1. Орынбасаров М., Сахаев Ш.С. Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы. Алматы. «Қазақ университеті» баспасы.

2. Сахаев Ш.С., Төлегенова М.Б. Математикалық физика теңдеулерінің есептер шығару практикумы. Алматы. «Қазақ университеті» баспасы.

3. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1975.

4. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М. 1985.

5. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М., 1976.

6. Антипов Ю.Н., Омаров Т.Е. Руководство к решению задач по уравнениям математической физики. Караганда, Изд-во КарГУ, 1989.

**Қосымша:**

7. Владимиров В.С. Уравнениям математической физики. – М: Наука, 1981.

8. Абдыманапов С.А., Ефимов В.В. Уравнения математической физики. Программа, методические указания и контрольные Тапсырмалар для студентов-заочников математических специальностей. Караганда, КарГУ, 1992.

9. Владимиров В.С. и другие. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М: Наука, 1974.

10. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. – М: Наука,1980.

6 дәріс

***ДӘРІС ТАҚЫРЫБЫ:* ПАРАБОЛАЛЫҚ ТИПТІ ТЕҢДЕУЛЕР**

**ЖОСПАР**

1. Жылулықтың таралуының бірөлшемді станционарлы емес процесі

2. Диффузиялық типті физикалық процестер.

3. Бастапқы және шекаралық шарттар.

4. Максималдық мәндер принципінен шығатын салдарлар

***1. Жылулықтың таралуының бірөлшемді станционарлы емес процесі***

**Жылуөткізгіштік теңдеуі.** Дененің әртүрлі бөлігінде дененің көп қыздырылған бөлігінен аз қыздырылған бөлігіне жылыулықтың берілу процесі температураның u өзгеруімен байланысты. Сондықтан мұндай процесті сипаттау макроскопиялық теорияның жалпы жағдайда денеде стационарлы емес температуралық өрісті анықтауға келтіріледі.

 температурасын тек бір кеңістіктік *х* айнымалылы функция деп санай отырып, изотропты материалдың жазық қатпарына жылуөткізгіштің бірөлшемді жылу берілу процесін қарастырайық.

ρ материалының тығыздығын, оның *с* меншікті салмақтық жылу сыйымдылығын және *к* жылуөткізгіштік коэффицентін жалпы жағдайда біртекті емес ортада тек бір ғана *х* кеңістіктік координатасынан да тәуелді деп санаймыз.

Процестің математикалық моделін құру кезінде ортаны қозғалмайтын деп, ал температураның өзгеруіне байланысты материалдың көлемінің өзгеруін елемейтіндей аз деп болжаймыз. Бұл жағдайда жылуөткізгіштік процесін механикалық жұмыстарды орындауға қатысы жоқ деп санауға болады.

Материалдың қарастырып отырған қатпарында кейбір термодинамикалық жүйе ретінде табаны *∆S* ауданды цилиндр түріндегі және осі  координаталық осіне параллель *V* көлемді ерекшелеп аламыз.

Ерекшеленген *V* көлемі үшін жазылған термодиканың бірінші заңынан келесі формула шығады

 (6.1)

мұндағы *U* - цилиндрдің көлемі бойынша  ішкі энергияның көлем тығыздығын интегралдап, табуға болатын жүйенің ішкі энергиясы, яғни



Сондықтан уақыт бірлігінде жүйенің ішкі энергиясының өзгеруі мына түрде болады:

 (6.2)

Ерекшеленген цилиндрдің барлық тұйық беті  арқылы өтетін  жылу ағынын, яғни, уақыт бірлігінде осы бет арқылы берілетін жылулық санын,  жылу ағынының тығыздығының нормаль құраушысын  беті бойынша интегралдай отырып табуға болады. Сондықтан

,

мұндағы  - -ге бірлік сыртқы нормаль.

Фурьенің физикалық заңына сәйкес жылудың берілуінің жылуөткізгіштігі 

Қарастырылған жағдайда  жылу ағынының тығыздық векторының тек бір құраушысы  бар, ендеше, жылу ағыны ерекшеленген көлемнен цилиндрдің табаны арқылы ғана өтеді, сонымен қатар

 (6.3)

Ерекшеленген көлемнің ішінде эндо- немесе экзотермиялық реакциялардың болуы, электр қуатының өтуі, ұсақ тесікті (кеуекті) материалда ылғалдың булануы салдарынан және басқа да себептермен жылу бөлінуі немесе сіңірілуі мүмкін. Егер жылулық көзінің көлемдік тығыздығын (меншікті қуаттылығын)  деп алсақ, онда қарастырып отырған көлемде уақыт бірлігінде жылу саны бөлінеді  (*F>0*) немесе сіңіріледі (*F<0*):

 (6.4)

(6.2)- (6.4) өрнектерін (6.1) теңдеуіне қоя отырып,

 (6.5)

теңдеуін аламыз.

Цилиндр табанының  және координаталарын кез келген етіп таңдағандықтан (6.5) теңдеуіндегі интеграл нольге тең болуы тек интеграл астындағы функция нольге тең болған жағдайда ғана мүмкін.

Ендеше, сипатталып отырған жылу берілу процесі локальды түрде, яғни кеңістіктің әр нүктесінде, келесі дифференциалдық қатынас түрінде орындалады:

 (6.6)

Қарастырып отырған сығылмайтын ортадағы ішкі энергияның көлемдік тығыздығы  температурадан тәуелді екенін көреміз, ал туындысы материалдың көлемдік жылу сыйымдылықты анықтайды.Сондықтан

.

Ендеше (6.6) өрнегінен келесі дифференциалдық теңдеуді аламыз

 (6.7)

Біртекті материал үшін температурадан тәуелсіз *р, с* және *к* жылуфизикалық сипаттамаларымен (6.7) теңдеуін мына түрде жазуға болады:

 (6.8)

мұндағы  - материалдың температураөткізгіш коэффициентті деп аталатын тұрақты; .

(6.7) және (6.8) теңдеулері дербес туындылы параболалық типтегі дифференциалды теңдеу болып табылады. Олар бірөлшемді температуралық өрісті біртекті емес және біртекті денелердегі жылу берілу процесін сипаттайтын математикалық модельге негіз болады. Осындай теңдеулерді жылуөткізгіштік теңдеулері деп атаймыз.

Ескерту 6.1. Егер бүйір беті жылу өткізбейтін болса, көлденең қимасының ауданы жеткілікті аз болса және осьтік координатадан ғана тәуелі деп санай отырып, қима бойынша температураның таралуын елемеуге болса, онда (6.7) және (6.8) теңдеулері біртекті емес және біртекті материалдан орындалған тұрақты көлденең қималы стерженьнің температуралық өрісінің эволюциясын сипаттайды.

***2. Диффузиялық типті физикалық процестер***

Сонымен қатар, (6.7) және (6.8) теңдеулері жылуөткізгіштік процесін ғана емес, басқа да диффузиялық типті физикалық процестерді сипаттайды. Атап айтсақ, олардың қатарына келесілер жатады.

1. **Массаның тасымалының диффузиялық процесі.** Бұл процесте  функциясы жылжымайтын ортадағы диффундерленген заттардың көлемдік концентрациясының станционар емес өрісін сипаттайды, *с* - ұсақ тесіктілік (кеуекті) коэффициенті, ал *к* - диффузия коэффициенті. Бұл жағдайда ** параметрін бірге тең деп алуға болады.

2. **Заттағы бөлшектердің (мысалы, нейтрон) диффузиясы.** Осындай процесті сипаттағанда  функциясы -  уақыт мезетіндегі х координаталы орта нүктесіндегі бөлшектердің концентрациясы, *к* - бөлшектердің диффузиясының коэффициенті, ал . Мұндай процесс үшін жылу көздерінің меншікті қуаты  әдетте бөлшектердің концентрациясынан тәуелді, сонымен қатар , мұндағы α - бөлшектердің кәбею коэффициенті, ал β - сіңіру коэффициенті.

3. Өткізетін токпен салыстырғанда ауытқу токты елемеуге болатын **өткізуші ортадағы магнит өрістің өткізгіштігі (диффузиясы).** Бұл процесс үшін  - магнит өрістің кернеулігі, , σ - материалдың меншікті электрөткізгіштігі, μ - оның магнитті өткізгіштігі,  - СИ жүйесіндегі магниттік тұрақтысы .

***3.******Бастапқы және шекаралық шарттар***

Жылуөткізгіштік теңдеуінің көмегімен денедегі температуралық өрістің эволюциясын сипаттау үшін бастапқы уақыт мезетіндегі температураңың үлестірілуін білу қажет, яғни бастапқы шартты қою қажет. Қарастырып отырған бірөлшемді процесс үшін бастапқы шарт

 (6.9)

белгілі  тәуелділігі түрінде беріледі.

Осыдан басқа *S* денесінің бетіндегі жылулық жағдайын білу қажет, яғни кез келген уақыт мезетіндегі дене бетінің барлық нүктесінде шекаралық шарттар қою қажет. Бірөлшемді процесте сәйкес шекаралық шарттар  және  қатпарларының шекаралық беттерінде қойылады.

Шекаралық шарттар жылуөткізгіштік есептерінде әртүрлі тәсілдермен берілуі мүмкін.

1. Бірінші ретті шекаралық шарт, егер дене бетінің әр нүктесінде температура берілсе, яғни

 (6.10)

Мұнда  - *S* бетінің *Р* нүктесі мен  уақытындағы белгілі функциясы.

2. Екінші ретті шекаралық шарт, егердененің *S* бетіне  жылу ағынын қойғанда, мұндағы -жылу ағынының тығыздық векторы, ал  - S бетіне сыртқы бірлік нормалі. Фурье заңы бойынша



Ендеше, екнші реттік шекаралық шарт *S* бетіне температураның нормаль туындысын қояды және ол мына түрде жазылуы мүмкін:

 (6.11)

мұндағы  - белгілі функция. Бет жылу өткізбейтін жағдайда  және *S* барлық бетінде  біртекті шартқа ие боламыз.

3. Үшінші ретті шекаралық шарт Ньютон заңы бойынша температурасы  қоршаған сыртқы ортамен конвективті жылу алмасуы сәйкес келетін дене бетіндегі жылулық режимді сипаттайды. Ньютон заңы бойынша дененің шекарасындағы жылу ағымының тығыздығы дене мен қоршаған орта температураларының айырмасына тура пропорционал, яғни



Жылу алмасу (жылу беру) коэффиценті  ортаның қасиетіне, ал жалпы жағдайда  температураларының айырмасына да тәуелді. Алайда, есептердің көбінде  коэффицентін температурадан тәуелсіз және дененің барлық бетінде бірқалыпты тұрақты деп санаймыз.

Сонымен, үшінші реттік шекаралық шарт дене бетінің кез келген нүктесіндегі *и* температурасы мен оның  нормаль туындысының арасындағы байланысты көрсетеді:

, (6.12)

мұндағы .

Ескерту 6.2. Бірінші, екінші және үшінші ретті шарттарды жалпыланған шеаралық шарт түрінде біріктіруге болады.

, (6.13)

мұндағы α мен β - кейбір тұрақтылар;  - дене бетінде берілген функция.

(6.13) шартында , ал  деп алып (6.10) бірінші ретті шартын аламыз. Егер , ал  болса, онда (6.13) шарты екінші ретті (6.11) шартына ауысады. Соңында , ал  болса, (6.12) үшінші ретті шекаралық шартын аламыз.

4. Сызықты емес шекаралық шарт. Егер дене бетінен энергияны әкету механизмінің негізгісі сәулелену болып табылса, онда Стефан-Больцман заңы бойынша

 (6.14)

Мұнда  - жалпы жағдайда температурадан тәуелді материалдың қаралығының көрсеткіші;  - Стефан-Больцман тұрақтысы.

5. Екі дененің байланысының беткі қабаттары мен көпқатпарлы денелердегі температуралық өрісті сипаттау барысында түйіндестірудің шекаралық шарттарды, немесе, кейде төртінші ретті шекаралық шарт деп атайтын шарттарды қолданылады.

Идеал жылулық байланыс үшін мына шарттар

 (6.15)

Температура мен және  байланыс бетіндегі жылу ағынының теңдігін көрсетеді.

Денелердің байланыс бетіндегі  термиялық кедергісі мен идеал емес жылу байланысы үшін жылу ағынының теңдігі орын алады, алайда оларға пропорционал денелердің температураларының айырмасы пайда болады, яғни келесі шарт орындалады:

, (6.16)

мұндағы  - бірінші дененің  байланыс бетіне қатысты сыртқы нормалі.

Тұрақты коэффициентті



теңдеуі

, 

ауыстыруы арқылы

. (6.17)

түріне келтіріледі.

**Теорема** *(максималдық мән принципі).* Тұйық



облысында анықталған және үзіліссіз  функциясы



облысының нүктелерінде (1) жылуөткізгіштік теңдеуін қанағаттандыратын болса, онда осы  функциясы бастапқы мезетте немесе , немесе  шекаралық нүктелерінде максималдық және минималдық мәндерге жетеді.

*Теореманың физикалық мағынасы*: егер температура шекарада және бастапқы мезетте қандайда бір *М* мәнінен аспайтын болса, онда дененің ішінде шығу көздерінің жоқтығынан температура құрылмайды.

1. ***Максималдық мәндер принципінен шығатын салдарлар***

*Жалғыздық теоремасы.*

,

облысында анықталған және үзіліссіз  және  функциялары облыстың



нүктелерінде бірдей бастапқы және шекаралық



шарттарымен бірге

 (6.18)

жылуөткізгіштік теңдеуін қанағаттандырса, онда келесі тепе – теңдік орындалады:

.

2. Егер жылуөткізгіштік теңдеуінің  және  екі шешімдері



шарттарын қанағаттандырса, онда



облысының барлық нүктелерінде



теңсіздігі орындалады.

3. Егер жылуөткізгіштік теңдеуінің үш  және шешімдері

 және  болғанда 

шарттарын қанағаттандырса, онда осы теңсіздіктер



облысының барлық нүктелері үшін орындалады.

4. Егер жылуөткізгіштік теңдеуінің екі және шешімдері үшін келесі теңсіздік орындалса

,  және ,

онда



облысының барлық нүктелері үшін



теңсіздігі орындалады.

**Теорема** *(есептің физикалық тұрғыдан анықталу принципі).* Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бірінші шеттік есептің шешімі бастапқы және шекаралық мәндерден үзіліссіз тәуелді.

. (6.19)

(6.19) формула *жылу өткізгіштік теңдеуі үшін* *Пуассонның интегралдық формуласы* (немесе қысқаша - Пуассон формуласы) деп аталады.

 (6.20)

функциясын қарастырайық.  барлық мәнінде бұл функция  облысында (6.17) жылу өткізгіштік теңдеуінің шешімі болып табылады. ,t) функциясы *жылу өткізгіштік теңдеуінің іргелі шешімі* деп аталады.

**Ұсынылатын әдебиеттер**

# Негізгі әдебиеттер:

1. Орынбасаров М., Сахаев Ш.С. Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы. Алматы. «Қазақ университеті» баспасы.

2. Сахаев Ш.С., Төлегенова М.Б. Математикалық физика теңдеулерінің есептер шығару практикумы. Алматы. «Қазақ университеті» баспасы.

3. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1975.

4. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М. 1985.

5. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М., 1976.

6. Антипов Ю.Н., Омаров Т.Е. Руководство к решению задач по уравнениям математической физики. Караганда, Изд-во КарГУ, 1989.

**Қосымша:**

7. Владимиров В.С. Уравнениям математической физики. – М: Наука, 1981.

8. Абдыманапов С.А., Ефимов В.В. Уравнения математической физики. Программа, методические указания и контрольные Тапсырмалар для студентов-заочников математических специальностей. Караганда, КарГУ, 1992.

9. Владимиров В.С. и другие. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М: Наука, 1974.

10. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. – М: Наука,1980.

7 дәріс

***ДӘРІС ТАҚЫРЫБЫ:* ЖЫЛУ ӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУЛЕРІ ҮШІН 1 – ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕП**

**ЖОСПАР**

1. Есептің қойылымы

2. Максимум принципі

3. Жалғыздық теоремасы

4. Шешімнің тұрақтылығы туралы теорема.

5. Фурье әдісімен 1-ші шекаралық есептің шешімі

***1. Есептің қойылымы.***

** жазықтығында берілген тіктөртбұрыш,ал Г – t=0 төменгі негізден және жанындағы қабырғалардан құралатын Q шекарасының бөлігі болсын.  .Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бірінші шекаралық есеп деп,

 (7.**1)**

(7.1) теңдеудің шешімін табу және  келесі шартты

 **(7.2)**

Қанағаттандыратын есепті айтамыз.

(7.2) шарттың бастапқы екі теңдігі шекаралық шарт деп, ал қалған теңдік бастапқы шарт деп аталады.(7.2) шартты келесі түрде алуға болады:

 **(7.3)**

Мұндағы  және  Г-дағы үзіліссіздігі үшін  тұжырымдалады.

***2. Максимум принципі***

*Теорема 1.*  -да  болатындай (7.1) біртекті теңдеуін қанағаттандыратын  функция -да ең үлкен және ең кіші мән қабылдайды.

*Дәлелдеу.*  болсын.M>m үшін  шешімі бар болады деп алайық. нүктесінде болсын. Көмекші функцияны қарастырайық:

 **(7.4)**

Осы (7.4)-тен  екендігі шығады, демек -да  функцияның ең үлкен мәні М-нан кем емес. Бірақ Г-да



Ендеше,  функция  функциясымен бірге Г-да ең үлкен мән қабылдамайды.  үшін  болсын. Сонда  нүктеде алатынымыз :  (егер , онда , егер ,онда ). Сондықтан

 **(7.5)**

(7.4) теңдеуден келесі жағынан мынаны аламыз:

 **(7.6)**

(7.5) және (7.6) алынған қарама - қайшылық ең үлкен мән туралы сөйлемді дәлелдейді. Ал ең кіші мән туралы теорема да осыған ұқсас дәлелденеді.

Бұл 1 теоремадан шығатын салдарлар:

1. (7.1) теңдеудің  функцияның  болғанда Г-да нөльге айналатын шешімі -да нөльге тең болады.
2. Егер (,)  -  үшін 1 теңдеудің шешімі болса, онда -да  болады.
3. Егер  және 1 теңдеуді қанағаттандыратын болса, мұнда Г-да , онда -да  болады.

Шынында Г-дағы теңсіздік келесі - теңсіздікке эквивалент болғандықтан, екі рет салдарды қолдану арқылы қажеттіге келеміз.

Ескерту. (1) жылуөткізгіштіктің біртекті теңдеуі үшін  келесі максимумның күшейтілген принципінің ақиқаттығы дәлелденуі мүмкін: егер  1 теңдеуінің шешімі максимумға (минимумға) кейбір  ішкі нүктесінде жететін болса, онда барлық  үшін  орындалады.

1. ***Жалғыздық теоремасы***

*Теорема 2.*Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін 1-ші шекаралық есеп, сол сияқты (7.1) - (7.3) есеп бірден артық шешімге ие болуы мүмкін емес.

*Дәлелдеуі.*  - (7.1) - (7.3) есептің кез-келген екі шешімі болсын.Сонда олардың  айырмасы  болғанда (7.1) теңдеуді және  болғанда (7.3) шекаралық шартты қанағаттандырады. Салдар бірдің күшінен теорема бірге  аламыз, дәлелдеу керектігіміз осы еді.

1. ***Шешімнің тұрақтылығы туралы теорема***

*Теорема 3.*  - (7.1) теңдеудің төмендегідей

 (7.7)

 (7.8)

әртүрлі шарттардағы шешімдері болсын. Сонда 

*Дәлелдеу.* Шешімнің  айырымы  болғанда (7.1) теңдеуді және Г-да  шартты қанағаттандырады.  теорема бірге салдар үшті алып, -да тұжырымдалған  аламыз.

***5. Фурье әдісімен 1-ші шекаралық есептің шешімі.***

Келесі есепті қарастырайық:

біртекті теңдеуді

 (7.9)

шекаралық

 (7.10)

бастапқы

 (7.11)

шарттарды қанағаттандыратын  функцияны табу керек болсын. (0,0), (0,1) нүктелерде  үзіліссіздігі үшін  болуын талап ету қажет.

Сонымен қатар  үзіліссіз туындысы бар деп пайымдаймыз.

 (7.12)

Түрдегі (7.10) шекаралық шарттарды қанағаттандыратын (7.9) теңдеудің шешімін іздейміз.

(7.12) теңдеуді (7.9)-ға қойып,

 (7.13)

 (7.14)

аламыз.

Штурма – Лиувиль (7.14) есептің шешімі  Табылған  мәнді (7.13)-ке қоямыз: және жалпы шешімі: . - таңдап алынған тұрақты.Осылайша (7.9) теңдеу мен (7.10) шекаралық шарттарды қанағаттандыратын функция:



(7.11) бастапқы шартты қанағаттандыру үшін қатар құрамыз:

 (7.15)

Оны (7.11) шартқа қойып,алатынымыз:

 (7.16)

Бұл қатынас орынды, егер

 (7.17)

болса және қатар

 (7.18)

мұнда  шарт бойынша және  болғандықтан, абсолютті және бірқалыпты жинақталады.(7.17) өрнекті (7.15)-ке қойып, есептің шешімін аламыз:

 . (7.19)

*Алынған шешімнің негіздемесі.* (7.19) түрдегі  функцияның  функциясының қасиеттеріне ие екендігін көрсетейік.



теңсіздіктен (7.19) қатар -да

 (7.20)

қатармен мажорланатындығы шығады.

Математикалық анализдан белгілі (7.20) қатар  болғанда бірқалыпты жинақталса, демек (7.19) қатар -да абсолютті және бірқалыпты жинақталады. болғанда (7.19) қосындыдан шекке көше отырып, (7.19) қатардың (7.10), (7.11) шарттарды қанағаттандыратындығына көз жеткіземіз. Енді  сол сияқты

 (7.21)

қатарлар бірқалыпты жинақталады және (7.19) түрдегі  функция -та (H:t=T) (7.1) теңдеуді қанағаттандырады.

 (7.22)

қатарлардың бірқалыпты жинақтылығын тексеру үшін,  және k-ның үлкен мәнінде,  алатынымызды байқаймыз.

Демек, (7.22) қатар (7.20) қатармен мажорланады және бірқалыпты жинақталады.Сәйкесінше қалған (7.21) қатарлардың бірқалыпты жинақтылығы қалыптасады.Ендеше (7.19)-ды мүшелеп дифференциалдау арқылы  функциясының  және  туындыларын іздей отырып, салуы бойынша  (7.1) қанағаттандырғандықтан, төмендегіні аламыз:



Осылайша (7.19) қатар түрінде берілген  функция (7.1), (7.10), (7.11) есептерді қанағаттандырады.

**Ұсынылатын әдебиеттер**

# Негізгі әдебиеттер:

1. Орынбасаров М., Сахаев Ш.С. Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы. Алматы. «Қазақ университеті» баспасы.

2. Сахаев Ш.С., Төлегенова М.Б. Математикалық физика теңдеулерінің есептер шығару практикумы. Алматы. «Қазақ университеті» баспасы.

3. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1975.

4. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М. 1985.

5. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М., 1976.

6. Антипов Ю.Н., Омаров Т.Е. Руководство к решению задач по уравнениям математической физики. Караганда, Изд-во КарГУ, 1989.

**Қосымша:**

7. Владимиров В.С. Уравнениям математической физики. – М: Наука, 1981.

8. Абдыманапов С.А., Ефимов В.В. Уравнения математической физики. Программа, методические указания и контрольные Тапсырмалар для студентов-заочников математических специальностей. Караганда, КарГУ, 1992.

9. Владимиров В.С. и другие. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М: Наука, 1974.

10. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. – М: Наука,1980.

№ 8 дәріс

***ДӘРІС ТАҚЫРЫБЫ:* ЕКІ ТЕҢДЕУДІҢ ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРІ**

**ЖОСПАР**

1. Акустика теңдеуі үшін Коши есебі.

2. Гиперболалық жүйе үшін аралас есептердің қойылымы.

***1. Акустика теңдеуі үшін Коши есебі.***

Акустика теңдеуі үшін Коши есебі. Екі тәуелсіз теңдеуден тұратын 1-ші ретті жүйенің мысалын қарастырамыз

 (8.1)

Жүйенің бірінші теңдеуінің шешімі келесі түрде болады:

. Екінші теңдеудің шешімі .

***2. Гиперболалық жүйе үшін аралас есептердің қойылымы***

Нақты шешімді анықтау үшін кейде бастапқы берілгендерден өзге кейбір шекті шартарды беруге болатынын көрсетейік.

Мысалы,  үшін  теңдеуін шығарған кезде u – нің мәнін  мағынасында ғана емес, сонымен бірге қандай да бір  осінің кесіндісінде де беруге болады. Бұл шешім кезде бастапқы берілгендер мен шекаралық шарттардың берілу облысымен қиылысатын характеристикалар қиып өтетін x,t жазықтықтың барлық нүктелерінде  анықталады.Егер шешімді  болған жағдайда ғана іздестіру қажет болса, онда оның анықталу облысы 1-суретте көрсетілгендей түрде болады.  характеристикадағы шешімі  үзіліссіз болуы үшін, тегіс шекаралық шарттар



 келісім шарттарын қанағаттандыру қажет.  
 теңдеуі негізінде (0,0) нүктесінде туындылардың үзіліссіз болуы үшін  теңдігін алу керек.

Егер  екі рет үзіліссіз дифференциалданатын болса, онда 



болғандықтан  теңдігін қанағаттандыру қажет. (0,0) нүктесіндеқарастырылатын бұл теңдік  қалыптасқан шартқа айналады.Осылайша (0,0) нүктесінде үшінші ретті бастапқы және шекаралық шарттарын қалыптасуға болады. Қаншалықты тегіс шешімді алғымыз келеді, соншалық бастапқы және шекаралық берілгендерге қатал шарттарды қолдану керек. Қандай гиперболалық жүйеге қандай шекаралық шарттарды қою керектігін түсіну үшін келесі мысалды қарастырайық.

 (8.2)

жүйесінің  облысында  шешімін табу керек.



Бұл теңдеулер жүйесі



оң көлбеулі характеристикалардың екі үйіріне ( 2 – сурет) , теріс көлбеулі бір үйіріне

 (3 – сурет)



және бір

(4 – сурет),

вертикаль көлбеулі бір үйірге ие болады.

- ң мәнін кезде Ox осінің [0 , l] кесіндіде және  болғанда  осінде үшін беру керек:

. (8.3)

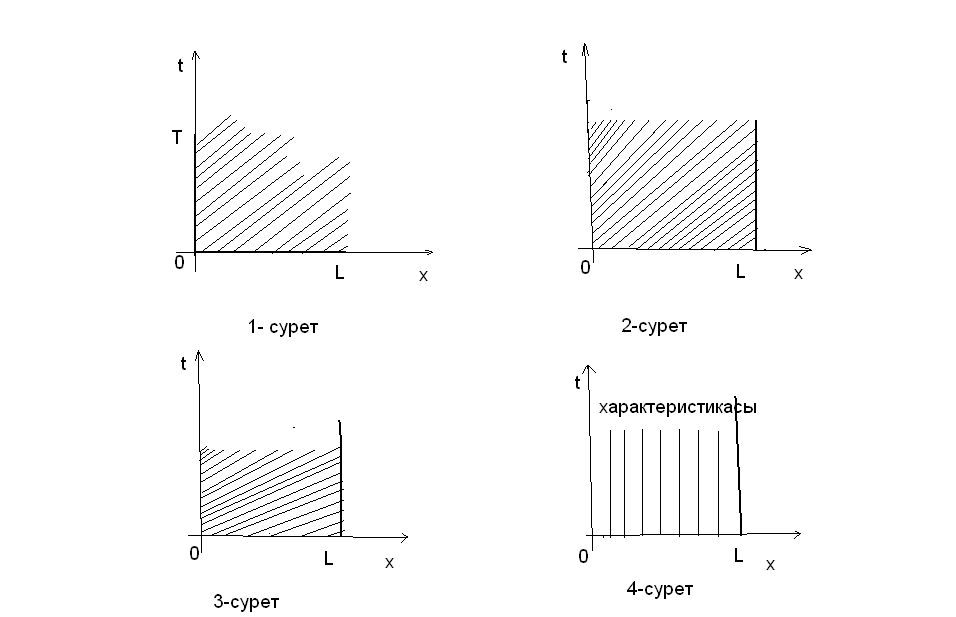
Сол сияқты  үшін де

 (8.4)

беруін жеткілікті.

 функциясы өзінің мәні бойынша  табанында және оң жақ шекарасында  анықталады. Бұл  (  характеристиканың) тұрақтының сызықтары бейнеленген сызбадан көрінеді(3 – сурет):

 (8.5)



Сөйтіп (8.1) жүйенің шешімі (8.2), (8.3), (8.4), (8.5) бастапқы және шекаралық шарттармен толық анықталады. Әр шекарада әртүрлі шарт қоюға мәжбүр болдық:сол жақ шекарадағы шарттар саны  оң көлбеулік характеристикалық жүйедегі шарттар санымен сәйкес келеді. t мінінің үлкеюіне байланысты бұл характеристикалар сол жақ шекарадан одан сәйкес Риман инварианттардвң мәндерін алып кетіп алыстап барады. Сол жақ шекара үшін  оң көлбеумен берілген характеристикаларды “алыстайтын”, ал оң жақ щекара үшін  берілген характеристикалар “келетін” деп аталады. Оң жақ шекара үшін  берілген характеристикалар “келетін”, берілгендер “алыстайтын” деп аталады.

Қарастырылған мысалда әрбір шекараға онда қанша одан “алыстайтын” характеристикалардың үйірі болса, сонша шекаралық шарттар беріледі.

Кез келген теңдеулердің (6) гиперболалық жүйесі

 (8.6)



*x=0* болғанда

 (i=1,2,…,) (8.7)

x=l болғанда

 (l=+1,…,n) (8.8)

шекаралық шарттармен және бастапқы шарттармен (8.6) теңдеулер жүйесі үшін аралас есепті құрайды. Егер жүйеге және бастапқы берілгендерге қандай да бір шектелген тегістікті салатын болсақ, онда осылай құрылған есептің жалғыз шешімі бар екендігін дәлелдеуге болады. Тіпті осында есептердің шешімі бастапқы мен шекаралық шарттардың коэффициентіне тәуелді болатындығын дәлелдеуге болады.

Енді екінші ретті теңдеулер үшін мүмкін болатын есептің ауыстырмасын ұштарында бекітілген шектердің көлденең тербелістер туралы есеп негізінде қарастырайық.Бұл есепте u(x,t) шектің ox осінен ауытқуын береді. Егер  шегінің ұштары бекітілген болса, онда

 (8. 9)

“шекаралық шарттар” орындалуы қажет.

Шектің тербеліс процесі оның бастапқы формасы мен жылдамдықтардың орналасуына байланысты болғандықтан, онда

 (8.10)

“бастапқы шарттарды” беру керек.

Осылайша қосымша шарттар (8.9) щекаралық және (8.10) бастапқы шарттардан құрылады, мұндағы  және  нүктенің берілген функциялар. Бұл шарттар

 (8.11)

шектің тербеліс теңдеуінің шешімін анықтау мүмкін.

Егер шектің ұштары берілген заң бойынша қозғалатын болса, онда (8.9) шарттары басқа түрге ие болады:

, (8.12)

мұндағы  және  - t уақытының берілген функциялары. Тура осылайша бір ұшы бекітілген, ал екінші босап тұратын пружинаның бойлық тербілісі үшін де есеп беріледі. Босап тұрған ұшының қозғалысы заңы берілмей, көбінесе анықтау керек функция болып табылады.

 бос ұшындағы

 (8.13)

ауытқуының  ілгіш нүктесіндегі пружинаның созылуы нөлге тең (сыртқы күштерінің болмауынан) болады, сондықтан бос ұшы шартының математикалық берілуі

 (8.14)

түрінде болады.

Егер  ұшы белгілі бір заңы бойынша қозғалып, ал  болғанда күш берілсе, онда



болады.

Әрі қарай шекаралық шарттардың үш негізгі типі туралы айтатын боламыз:

 1-текті шекаралық шарттар – берілген режим;

 2 – текті шекаралық шарттар – берілген күштер;

 3 – текті шекаралық шарттар – икемді бекіту.

Тура осылайша екінші  ұшындағы шекаралық шарттар да беріледі. Егер  - нің оң жақ бөлігінде берілетін функциялар нөлге тең болса, онда шекаралық шарттар біртекті деп аталады.

Жоғарыда айтылған шекаралық шарттардың комбинациясынан қарапайым шектік есептердің алты типін аламыз.

Егер екі ұшында 2- немесе 3- текті шекаралық шарттарды алсақ,онда сәйкес есептер екінші немесе үшінші шектік есептер деп аталады.

үшін

 (8.15)

теңдеу үшін бірінші шектік есепті құрастырайық.

(8.15) шартын қанағаттандыратын



Шекаралық шарттармен және



бастапқы шарттармен берілген,  облысында анықталған функцияны табу керек.

Енді қойылған есептің шекті жағдайларын қарастырайық. Шекарадан алыс орналасқан М0 нүктесіндегі шекаралық шарттардың әсері үлкен уақыт аралығынан кейін байқалады.

Егер бізді аз уақыт аралығындағы құбылыс, ол кезде шекараның әсері мәнсіз, қызықтырса, онда толық есептің орнына шектелмеген облысы үшін бастапқы шарттармен берілген шекті есепті қарастыруға болады: үшін  кездегі



бастапқы шарттармен берілген (8.15) теңдеуінің шешімін табу керек.Бұл есеп Коши есебі деп аталады.

Егер құбылыс бір шекараның жанында қарастырылса, ал екінші шекарадағы қызықтыратын уақыт аралығындағы шекаралық режимінің әсерінің аса мәні болмаса, онда бастапқы теңдеуден басқа



қосымша теңдеулер берілгенде,  жартылай шектелген түзудегі есепті құраймыз.

**Ұсынылатын әдебиеттер**

# Негізгі әдебиеттер:

1. Орынбасаров М., Сахаев Ш.С. Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы. Алматы. «Қазақ университеті» баспасы.

2. Сахаев Ш.С., Төлегенова М.Б. Математикалық физика теңдеулерінің есептер шығару практикумы. Алматы. «Қазақ университеті» баспасы.

3. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1975.

4. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М. 1985.

5. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М., 1976.

6. Антипов Ю.Н., Омаров Т.Е. Руководство к решению задач по уравнениям математической физики. Караганда, Изд-во КарГУ, 1989.

**Қосымша:**

7. Владимиров В.С. Уравнениям математической физики. – М: Наука, 1981.

8. Абдыманапов С.А., Ефимов В.В. Уравнения математической физики. Программа, методические указания и контрольные Тапсырмалар для студентов-заочников математических специальностей. Караганда, КарГУ, 1992.

9. Владимиров В.С. и другие. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М: Наука, 1974.

10. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. – М: Наука,1980.

9 дәріс

***ДӘРІС ТАҚЫРЫБЫ:* ФУРЬЕ ӘДІСІНІҢ ЖАЛПЫ СҰЛБАСЫ**

**ЖОСПАР**

1. Біртекті гиперболалық және параболалық типті теңдеулер үшін қойылған аралас есепті шешуде Фурье әдісі қолдану сұлбасы.

2. Біртекті емес тербеліс теңдеуі үшін аралас есепті шешуде Фурье әдісінің қолданылуы.

3. Біртекті емес гиперболалық және параболалық типті теңдеулер үшін қойылған аралас есепті шешуде Фурье әдісі қолдану сұлбасы.

1. ***Біртекті гиперболалық және параболалық типті теңдеулер үшін қойылған аралас есепті шешуде Фурье әдісі қолдану сұлбасы***

1. Шешімді  түрінде іздестіреміз. Теңдеуге апарып қойып,  үшін жүйе аламыз.  үшін шекаралық шартты табамыз да, меншікті мәндер мен меншікті функцияларды анықтайтын спектрлік есепті қоямыз. Оларды табамыз. Меншікті мәндерді нормалаймыз.

2. Кезкелген тұрақтылардан тәуелді  функцияларын табамыз.

3. Суперпозиция принципін пайдаланып шешімді



түрінде жазамыз. Өзіндік функциялардың ортонормаланғандығын пайдаланып, бастапқы шарттардан кезкелген тұрақтыларды анықтаймыз. Есептің ақтық шешімін жазамыз.

***Нұсқау.*** Қойылған есепті шешуде, уақытты үнемдеу мақсатында, спектралдық есептің шешімін шекаралық шарттарға байланысты, келесі 1- кестені қолданып бірден жазуға болады.

**1- кесте**

***Меншікті мәндер мен меншікті функциялар кестесі***

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Штурм-  Лиувилль есебі | өзіндік функциялар | өзіндік мәндері | нормирлеу тұрақты сандар |
| 1 |  |  | ,k=1, 2, … |  |
| 2 |  |  | k=0, 1, .. |  |
| 3 |  |  |  |  |
| 4 |  |  | *k*=0,1,… |  |
| 5 |  |  | теңдеуінің оң таңбалары түбірлері |  |
| 6 |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  |
| 8 |  |  |  |  |
| 9 |  |  |  |  |

***2. Біртекті емес тербеліс теңдеуі үшін аралас есепті шешуде***

***Фурье әдісінің қолданылуы***

Біртекті емес тербеліс теңдеуі үшін келесі есепті қарастырайық:

 (9.1)

  (9.2)

 (9.3)

мұндағы -кездегі үзіліссіз функциялар, - тұрақтылар және Есептің шешімін (9.2) шекаралық шарттарда ғана орынды болатын

 (9.4)

көбейтінді түрінде іздейміз. (9.4)- ті (9.1) – ге қойғанда,



немесе

 (9.5)

аламыз.

Соңғы теңдіктің сол жағы x-тен ғана, ал оң жағы t-дан ғана тәуелді және теңдік (9.5) қатынасының жалпы шамасы тұрақты болғанда ғана орындалады. Оны −λ арқылы белгілейік. Онда (9.5) – тен келесі екі қарапайым дифференциалдық теңдеулер алынады:

 (9.6)

 (9.7)

(9.2) шекаралық шарттарды қанағаттандыратын (9.4) түріндегі (9.1) теңдеуінің тривиальды емес шешімін алу үшін,

 (9.8)

шекаралық шарттарды қанағаттандыру керек. Осындай (9.7), (9.8) есептерінің тривиальды емес шешімі бар болатын λ параметрінің мәнін табу меншікті мәндер туралы есебі (Штурм – Лиувилль есебі) деп аталады. (9.7), (9.8) есептері тривиальды емес шешімге ие болатын λ парамертінің мәнін меншікті мән деп, ал шешімдердің өзідерін меншікті мәнге ие болатын меншікті функциялар деп аталады.

(9.7) теңдеуі мен (9.8) шекаралық шарттардың біртектігінен, меншікті функциялар тұрақты мүшесіне дейін анықталады. Әр меншікті мәнге бір ғана меншікті функция сәйкес келетінін байқау емес. Шынында, λ-ның қандай да бір мәнінде (9.7), (9.8) есептерінің екі сызықты тәуелсіз шешімдері бар деп тұжырымдайық. Онда (9.7) теңдеуінің жалпы шешімі де осы шарттарды қанағаттандырады. Бірақ бұл мүмкін емес, өйткені (9.8) шекаралық шарттардың біріншісін қанағаттандырмайтын бастапқы шарттар үшін (9.7) теңдеуінің шешімін табуға болады.Берілген есеп үшін шексіз көп нақты меншікті мәндер бар екенін дәлелдейік.Әр бір λк меншікті мәнге көбейткіш мүшесіне дейінгі дәлдікпен анықталатын Xk(x) меншікті функция сәйкес келеді. Бұл көбейткішті

 (9.9)

ретінде алайық. (9.9) шарттарды қанағаттандыратын меншікті функцияларды нормальды деп атайды.

**Тұжырым.** Әртүрлі меншікті мәндерге сәйкес келетін меншікті функциялар ρ(x) өлшеммен ортогональ болады, яғни

 . (9.10)

Дәлелдеуі: - екі әртүрлі меншікті мәндер, ал – сәйкес меншікті функциялар болсын. Осыдан шығатыны,

 .

Бірінші теңдеуді– ға, екіншісін -ға көбейтіп, мүшелеп аламыз. Шығатыны



немесе



Бұл теңдеуді 0-ден l-ге дейінгі шектерде интегралдаймыз.



табамыз.

(9.8) шекаралық шарттардан оң жағы нөлге тең екені шығады, яғни

.

Осыдан болғандықтан,



болады. Осыны дәлелдеу керектін.

-меншікті мән, – ортоганальды және нормальды жүйені құрайтын меншікті функциялар болсын. Осыдан



бар. Екі жағын -ға көбейтіп, интегралдап және (9.9) – ды ескеріп отырып мынаны



аламыз.

Бірінші қосындыны бөліктеп интегралдағанда келесі формулаға келеміз

. (9.11)

 деп тұжырымдайық. Онда (9.11) формуладан (9.7), (9.8) есептерінің барлық меншікті мәндер теріс емес екені шығады.

 шарты



немесе



шекаралық шарттар үшін орындалады және көрсетілген шекаралық есептің барлық меншікті функциялар толық жүйені құрайды.

Енді (9.6) теңдеуін қарастырайық. Оның кездегі жалпы шешімі (оны  деп белгілеп алайық)



түрінде болады(– кез келген тұрақтылар).



функцияның әрқайсысы (9.2) шекаралық шарттарды қанағаттандыратын (9.1) теңдеуінің шешімі болады.(9.3) бастапқы шешімдерді қанағаттандыру үшін



қатарын құрайық.

Егер бұл қатар одан x және t бойынша екі рет мүшелеп дифференциалдағаннан шығатын қатарлар сияқты бірқалыпты жинақты болса, онда оның қосындысы (9.2) шекаралық шарттарды қанағаттандыратын (9.1) теңдеуінің шешімі болады. (9.3) бастапқы шарттар орындалуы үшін

 (9.12)

болуы қажет.Осылайша біз кез келген функцияны (9.7), (9.8) есептермен шектелетін  меншікті функциялар бойынша ұатарға жіктеу есебіне келдік. Кез келген Φ(x) функциясы (9.7), (9.8) есебінің меншікті функциялар бойынша

 (9.13)

қатар түрінде жіктеледі.

(9.13) қатарды жинақталатын деп алып, -ны табуға болады, ол үшін (9.13) – тің екі жағын– ке көбейту керек:

. (9.8)

Әр [0,l] кесіндіде интегралданатын  функцияға оның сәйкес Фурье қатарын қояйық. Мұндағы αк (9.8) бойынша анықталады.

Осыдан



табамыз. Мұндағы - өлшеміне ортогональды болатын функциялар жүйесі бойынша жіктеу кезіндегі функциялардың Фурье коэффициенттері.

1. ***Біртекті емес гиперболалық және параболалық типті теңдеулер үшін қойылған аралас есепті шешуде Фурье әдісі қолдану сұлбасы.***

Тұрақты коэффициенті *біртекті емес дифференциалдық теңдеуді*  қарастырайық:

,  (9.14)

мұнда  функциясы келесі шарттарды қанағаттандырады:

, , (9.15)

,  (9.16)

1. Д.т. шешімін мына түрде іздеймыз

,

мұндағы -лар



**

спектрлік немесе Штурм-Лиувилль есебінің өзіндік функциялар.

2. Спектрлік есепке кіретін теңдеуінің жалпы шешімін тауып және  шартын қолданып,  өзіндік функциялар мен  (k=1,2,….) өзіндік мәндерін табамыз.

3.  табу үшін





Коши есебін құрастырамыз. Мұнда

,

 ,

ал  - бастапқы берілген функциялар.

Коши есебін шешіп, -ларды табамыз.

4. Қойылған аралас есептің шешімі мына түрде болады:



*Ескерту.*Параболалық типті дифференциалдық теңдеуінде  мүшесі болмайды, ал . Одан басқа бастапқы шарттарының тек қана біріншісі беріледі. Онда  функциялары үшін Коши есебі келесі түрде жазылады:

.

**Ұсынылатын әдебиеттер**

# Негізгі әдебиеттер:

1. Орынбасаров М., Сахаев Ш.С. Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы. Алматы. «Қазақ университеті» баспасы.

2. Сахаев Ш.С., Төлегенова М.Б. Математикалық физика теңдеулерінің есептер шығару практикумы. Алматы. «Қазақ университеті» баспасы.

3. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1975.

4. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М. 1985.

5. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М., 1976.

6. Антипов Ю.Н., Омаров Т.Е. Руководство к решению задач по уравнениям математической физики. Караганда, Изд-во КарГУ, 1989.

**Қосымша:**

7. Владимиров В.С. Уравнениям математической физики. – М: Наука, 1981.

8. Абдыманапов С.А., Ефимов В.В. Уравнения математической физики. Программа, методические указания и контрольные Тапсырмалар для студентов-заочников математических специальностей. Караганда, КарГУ, 1992.

9. Владимиров В.С. и другие. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М: Наука, 1974.

10. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. – М: Наука,1980.

10 дәріс

***ДӘРІС ТАҚЫРЫБЫ:* ЭЛЛИПСТІК ТИПТІ ТЕҢДЕУЛЕР.**

**ЛАПЛАС ЖӘНЕ ПУАССОН ТЕҢДЕУЛЕРІНЕ ӘКЕЛЕТІН ЕСЕПТЕР**

**ГАРМОНИКАЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ**

**ЖОСПАР**

1. Сығылмайтын сұйықтың потенциал қозғалысы.

2. Электростатикалық өрістің потенциалының теңдеуі.

3. Магнитостатикалық өрістің теңдеуі.

4. Жылуөткізгіштіктің стационарлық есебі.

5. Сығылмайтын сұйықтың потенциалдық ағыны.

6. Ньютондық потенциал.

7. Гармониялық функциялардың қасиеттері

***1. Сығылмайтын сұйықтың потенциал қозғалысы.***

Сұйық  жылдамдықпен қозғалсын. *S* бетпен шектелген сұйықтың кез келген белгіленген қандай да бір *V* көлемін қарастырайық. Осы көлемдегі сұйықтың *m* массасы  тығыздықпен мына қатынаспен байланысты.

 (10.1)

Бұл масса *S* беті арқылы өтетін сұйық ағыны есебінде өзгеруі мүмкін, сонымен қатар

 (10.2)

мұндағы  -  бетінің сыртқы нормалі. Ендеше (10.1) және (10.2) теңдеулерінен келесіні аламыз

 (10.3)

Остроградский формуласы бойынша беттік интегралды түрлендіреміз, (10.3) формуласын мына түрде жазамыз

.

Осыдан ерекшеленген *V* көлемінің кез келгендігіне байланысты

.

Бұл теңдеуді тұтас ортаның үзіліссіздік теңдеуі деп атаймыз. Сығылмайтын сұйық үшін тығыздық , ендеше үзіліссіздік теңдеуінен келесі шығады:

 (10.4)

Сығылмайтын сұйықтың тұрақталған ағынын қарастырайық, мұндағы . Егер бұл ағын құйынсыз болса, онда  жылдамдықтарының потенциалы бар болады, яғни

 (10.5)

(10.5) өрнегін (10.4) өрнегіне қойсақ, келесіні аламыз



немесе

,

яғни жылдамдықтардың потенциалы Лаплас теңдеуін қанағаттандырады.

***2. Электростатикалық өрістің потенциалының теңдеуі***

Электр өрісі, диэлектрлік өткізгіш ортасында, осы өрістің кернеулігін  сипаттайды. Вакуумдегі электростатикалық өріс үшін арналған Гаусс теоремасын жазайық:

. (10.6)

Мұнда  - СИ жүйесіндегі электр тұрақты,  электр зарядтардың көлемдік тығыздығы, *V - S* тұйық бетімен шектелген кеңістіктің қандай да бір көлемі. Острогадский теоремасының көмегімен (10.6) қатынасын дифференциалдық пішінге келтіреміз

 (10.7)

өріс кернеулігінің  осы өрістің  потенциалымен байланысын ескере отырып, (10.7) өрнегінен электростатикалық өрістің потенциалы үшін арналған теңдеуді аламыз

 (10.8)

(10.8) біртекті емес теңдеуі, мұндағы  - берілген функция, Пуассон теңдеуі деп аталады.

1. ***Магнитостатикалық өрістің теңдеуі***

Егер ортада магниттік өрістің тұрақты магнит өткізгіштік кернеулігі  уақыттан тәуелсіз болса, онда ол өріс үшін келесі магнитостатикалық теңдеулері орын алады



, (10.9)

мұндағы -өткізілетін токтың тығыздығы.

 кернеулігімен  векторлық потенциалдық калибрлеу қосымша шартымен байланысты  векторлық потенциалын  қатынасымен енгіземіз. Бұл жағдайда (10.9) теңдеулерінің біріншісі тепе-теңдік түрінде орындалады, себебі   ал екіншісінен

 (10.10)

екенін табамыз.

Векторлық анализдің белгілі формуласынан  [VII]  шартын ескере отырып, (10.10) өрнегінен векторлық потенциал үшін арналған теңдеуді аламыз

 немесе 

Ендеше  векторының компоненттері Пуассон теңдеулерін қанағаттандырады, мұндағы , ,  - берілген функциялар.

Лаплас және Пуассон теңдеулері екнші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер болып табылады және эллипстік типті теңдеулер қатарына жатады.

Сонымен қатар, бұл теңдеулердің көмегімен біртекті денелердің станционарлы жылу жағдайлары, орнықтырылған диффузиялық процестер, тартылу өрісінің потенциалы туралы және т.б. да есептерді шешуге болады.

***4. Жылуөткізгіштіктің стационарлық есебі.***

 температурасы уақытқа байланысты (бекітілген немесе стационарлық температура) өзгермегенде  біртекті денеде жылудың таралуы туралы есептің дербес түрін қарастырайық.  болғандықтан, 4 дәрісдағы (10.6)-теңдеуі мына түрде болады

 (10.11)

 денесінің ішінде жылу ағындары болмағанда (1) теңдеуі мына түрде болады

 (10.12)

(10.11) теңдеуі *Пуассон теңдеуі*, ал (10.12) теңдеуі *Лаплас теңдеуі* деп аталады.

 температурасын біртекті анықтау үшін енді  денесінің  шекарасындағы жылулық режимін білу жеткілікті. Нәтижесінде мына есептерге келеміз:  облысында (10.11) (немесе (10.12)) теңдеуінің шешімін бір-бірден 4 дәрісдағы (10.9), (10.10) және (10.11) теңдеулерінің *шекаралық (шеттік)* шарттарынан табу. Шыққан есептер *шекаралық* немесе *шеттік* есептер деп аталады: (10.1), (10.9) 4 дәрісда – *Дирихле есебі*, (10.1), (10.10) 4 дәрісда– *Нейман есебі*, (1), (11) 4 дәрісда – *қисық туындылы есеп* немесе *үшінші шеттік есеп.*

1. ***Сығылмайтын сұйықтың потенциалдық ағыны***

Сығылмайтын сұйықтың бекітілген қозғалысын қарастырайық (). Бұл жағдайда үзіліссіздіктің теңдеуі ((5) §2) мына түрде болады

 (10.13)

Сұйықтың қозғалысы құйынсызнемесе, басқаша айтқанда, потенциалды болсын, яғни жылдамдық потенциалды вектор болады

 (10.14)

(10.14)-ті (10.13)-ке қойып,

 (10.15)

аламыз, яғни  жылдамдығының потенциалы Лаплас теңдеуін қанағаттандырады.

Пуассон мен Лаплас теңдеулері үшін шекаралық есептеріне басқа да жаратылыстанудың стационарлық есептерін келтіреді (мысалы, электростатистиканың, магнитостатистиканың).

1. ***Ньютондық потенциал.***

*Лапластың тартылыс потенциалы үшін теңдеуіне әкелген жұмыстарының тарихи ескертулері.*

 теңдеуі ( жазықтық жағдайында) оны бірінші жазған математик есімімен, Лаплас теңдеуі атына ие.

Ньютонның бүкіләлемдік тартылыс заңы былай айтылатынын білеміз: *«Кез келген екі дене арасында олардың массасына тура пропорционал және олардың арасындағы қашықтықтың квадратына кері пропорционал тартылыс күші болады»*. Бір-бірінен үлкен қашықтықта орналасқан екі дене бірі екіншісіне әсер ететіндігі, әрине, таңқаларлық жағдай. Үлкен қашықтықта әсер ететін күштің айқын формуласынан бас тарту Лапласты келесі ұйғарымға алып келді.

Қандай да бір тартатын дененің бар болуы барлық кеңістікте  нүктесінде  интенсивтілігі



формуласымен есептелетін кейбір субстанцияның пайда болуына алып келеді.

Мұнда  - кейбір тұрақты,  - тартатын дененің координаты,  - оның массасы.  нүктесінде орналасқан бірлік масса денесіне әсер етуші тартылыс күшінің  компоненттерін анықтау үшін



деп ұйғару керек.

 функциясы  векторлық өрісінің потенциалы деп аталатынын білеміз.

Егер тартылыс денелері бірнеше болса (олардың  массалары  нүктелерінде орналасқан), онда күшті сол формулалармен табуға болады, егер  потенциалы ретінде мына функцияны алсақ



Лаплас тартылысты оқу кезінде  функциясының өзін емес, тек осы функцияны қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеуді қолдануды ұсынды. Ол теңдеу былай алынады.  туындыларын табамыз. Одан



аламыз, сәйкесінше,



Оларды тағы да дифференциалдаймыз және қосамыз, нәтижесінде мынаны аламыз



 теңдігінен  шығатыны айқын. Осы теңдеу Лаплас теңдеуі болады. Сондықтан, Лаплас алыстан әсер ету күшінің айқын формулаларын  өлшемі өрісінің дифференциалдық теңдеуімен алмастыруды ұсынды. Дифференциалдық теңдеу  өрісінің көрші элементтерінің арасындағы өзара қатысын сипаттайды деп есептеуге болады.

Енді біз нүктелік массалардың потенциалына емес,  нүктесінде тығыздығы  кейбір көлем бойынша таралатын массамен құрылған тартылыс өрісті аламыз. Қандай да бір шардан тыс жатқан барлық нүктелер үшін  болсын, яғни  болғанда. Бұл шарды әрқайсысына  массасы бағытталған қабырғалары  болатын элементар көлемдерге бөлеміз. Осы массамен көтерілетін тартылыс күшінің потенциалы  нүктесінде мынадай мән қабылдайды



Барлық элементар көлемдерді есепке алатын  қосындылық потенциалы  тең.  шарының шексіз ұсақталуы кезіндегі шегіне формальді түрде көшу кезінде, потенциалды *көлемді* немесе *ньютондық потенциал* атына ие келесі интеграл түрінде көреміз ( тұрақтысы қарапайымдылық үшін жазылмаған):



Егер  үзіліссіз бірінші туындылары бар болса, онда  потенциалы Пуассон теңдеуін қанағаттандыратынын көрсету қиын емес:

.

Тартылмайтын массаларда, яғни  болғанда бұл теңдеу Лаплас теңдеуімен сәйкес келеді. Бүкіләлемдік тартылыс заңымен байланысты есептерде тығыздықтар  екенін байқаймыз. Бірақ физикада әсерлесу күші тартылыс теориясындағыдай  сипатталатын тағы бір облыс бар, ол – электростатистика. Мұнда  екі материалдық нүктелердің заряды,  - диэлектрикалық тұрақты. Электростатистикада зарядтарға белгі тіркеп жазу керек. Электростатикалық әсерлесу заңымен – Кулон заңымен – гравитациялық потенциалдан тек  тығыздығы оң мәндермен қатар, теріс мәндер қабылдай алатынымен ғана ерекшеленетін электростатикалық потенциал байланысты (бұл мұнда заряд тығыздығы).

Электростатикалық өріс кернеулігінің келесі компоненттері бар



Осыдан, (5.6) теңдеуін электростатикада *Гаусс теоремасы* атына ие



түрінде көшіріп жазуға болады.

**Лемма 1.** * болғанда ньютондық потенциал нөлге ұмтылады.*

**Дәлелдеу.** Ньютондық потенциалды



түрде жазамыз, мұндағы  -  мен  арасындағы қашықтық. 0 – координат басы,  болсын. Сонда



 болғандықтан,  және 

Сонымен, тек кейбір сфераның ішінде нөлден өзгеше, үздіксіз дифференциалданатын тығыздықтағы ньютондық потенциал шексіздікте нөлге ұмтылатын (5.6) теңдеуінің шешімі болады.

***7. Гармониялық функциялардың қасиеттері***

**Теорема 1.** Егер   аймағында гармоникалық функция болса, онда

 (10.16)

шынымен де, ескере отырып, (10.16) аламыз.

**Теорема 2. ** аймағындағы **** гармоникалық функцияның ****кезінде барлық реттегі туындысы бар болады.

**** ішінен кез келген нүктесін алайық және оны  контурымен қоршайық. Онда (10.16) анықтамасы бойынша . (15.8) формуласын қолдана отырып алатынымыз

 (10.17)

 болғанда,  келесі айнымалысы бойынша кез келген реттегі туындысы болады және интеграл белгісі астындағы (10.17) дифференциялдану күшіне сәйкес  -нің де осындай қасиеті болады.

**Теорема 3. (Орташа арифметикалық жөнінде)**

**** шеңберіндегі  орталығында гармоникалық функцияның  мәні оның  шеңбер мәнінің орташа арифметикалығына тең болады.

 болсын.  нүктесі үшін шеңберіне (10.17) формуласын қолданайық және  шеңберінде ішкі нормаль бағытымен сәйкес келетінін ескерейік.  сондықтан



Онда



(10.15) формулаға байланысты

 (10.17)

 қолданайық.  болсын, онда  яғни  контуры үшін (10.17) формуласы дұрыс. Бұдан  кезінде шекке көше отырып, Г үшін де (10.17) формуласын аламыз.

**Теорема 4 (максимум принціпі).** Шектелген  аймағының ішіндегі гармоникалық функциясы  шекарасында өзінің көп және аз мәніне ие болады, сонымен қатар  болғанда,  болады.

**Дәлелдеуі.**  кейбір  ішкі нүктесінде көп мәнге ие болсын.  шеңберін сызайық және  интеграл асты функциясын және оның  ауыстыра отырып алатынымыз:

 (10.18)

дегенмен теңдік белгісі  болған кезде ғана жетеді.  тұжырымы бойынша  -да  үлкен мәні болғандықтан, біз (10.18) формулада теңдік орны бар дей аламыз және сонымен қатар егер , онда  кезінде .

Енді осыған  теңдеуі шығатынын көрсетейік.  болсын. Бізге  екенін көрсету керек. -ді  сынық сызығымен мен құрастырайық және  шекарасынан  қысқа ара қашықтығы болсын делік.  шеңберінде  жоғарыда дәлелдегендей болады.  сызығының  қиылысқандағы соңғы нүктесі болсын. Бізге екенін көрсету керек. -ді сынық сызығымен -мен құрастырайық және  шекарасынан  қысқа ара қашықтығы болсын дейік.  шеңберінде  жоғарыда дәлелдегендей болады.  - сызығының қиылысқанда соңғы нүкте болсын. Бізде  бар, осылайша,  шеңберінде  болады. -дің  қиылысқандағы соңғы нүкте. Жоғарғыдағыдай  кезінде  болатынына көз жеткіземіз және т.с.с.

Сызығының шеткі қадамдар санынан кейін  шеңберімен жабылады және сонымен қатар  нүктесі кейбір шеңбердің ішінде болады, яғни . Ұқсас түрде -ның ішінде  кіші және үлкен мәніне ие болуы мүмкін еместігі шығады. Вейерштрасс теоремасы бойынша  функциясы  үлкен және кіші мәнге ие болуы керек, сондықтан бұл мәндер  шекарасында жатады.

**4 –теоремадан шығатын салдарлар**.

1. Гармоникалық функциялар  және  болса, онда ;

2. Егер  -ғы гармоникалық функциялар  және  болса, онда ;

3. Егер -ғы  және  гармоникалық функциялар және  бөлек санымен -да , онда барлық -да .

Шын мәнінде -ғы теңсіздік келесісіне эквивалентті болады.



2 салдарын екі рет қолдана қажет етіліп отырғанды аламыз.

Нағыз ұқсас қасиеттердің  гармоникалық функциясы болады, бірақ (10.16) және (10.17) қатынасы келесісіне көшеді.



**Ұсынылатын әдебиеттер**

# Негізгі әдебиеттер:

1. Орынбасаров М., Сахаев Ш.С. Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы. Алматы. «Қазақ университеті» баспасы.

2. Сахаев Ш.С., Төлегенова М.Б. Математикалық физика теңдеулерінің есептер шығару практикумы. Алматы. «Қазақ университеті» баспасы.

3. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1975.

4. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М. 1985.

5. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М., 1976.

6. Антипов Ю.Н., Омаров Т.Е. Руководство к решению задач по уравнениям математической физики. Караганда, Изд-во КарГУ, 1989.

**Қосымша:**

7. Владимиров В.С. Уравнениям математической физики. – М: Наука, 1981.

8. Абдыманапов С.А., Ефимов В.В. Уравнения математической физики. Программа, методические указания и контрольные Тапсырмалар для студентов-заочников математических специальностей. Караганда, КарГУ, 1992.

9. Владимиров В.С. и другие. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М: Наука, 1974.

10. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. – М: Наука,1980.

№11 лекция

Анықтамалар және негізгі ұғымдар. Бірінші ретті теңдеудің шешімінің геометриялық және физикалық мағынасы. Изоклиналар. Коши есебі

Айнымалылары бөлектенетін дифференциалдық теңдеулер

**Жоспар.**

1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің нормаль түрі.
2. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің геометриялық мағынасы. Интегралдық қисықтар.
3. Коши есебі. Жалпы шешу. Дербес шешу. Жалпы интеграл. Ерекше шешу
4. Айнымалылары бөлектенетін теңдеу.
5. Айнымалылары бөлектенген теңдеуді интегралдау үшін не істейсің.
6. Теңдеудің ерекше шешіміне күдікті шешуін табу. Шешімнің күдікті болмай ерекше болатыны.

Лекция мазмұны.

Координаттары  белгіленген декарттық тікбұрышты жүйесінің евклид жазықтығын  арқылы таңбалайық, ал  және   облысында берілген кейбір үзіліссіз функция болсын.

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді оқуды туындысы арқылы айқындалған

 (1)

теңдеуінен бастайық. Мұнда тәуелсіз айнымалы (яғни аргумент), ал тің белгісіз функциясы.

**1-Анықтама.** Тәуелсіз айнымалы , белгісіз функция және оның бірінші ретті туындысы  немесе ті байла-ныстырып тұратын қатынасты **бірінші ретті дифференциалдық теңдеу** деп атайды.

***Мысалы: ***



**2-Анықтама.** Егер дифференциалдық теңдеудегі белгісіз функция бір ғана тәуелсіз айнымалының функциясы болса, онда оны **жай дифференциалдық теңдеу** деп атайды.

Бұл тарауда негізінен бірінші ретті жай дифференциалдық теңдеулерді қарастырамыз. Оның жалпы түрі былайша жазылады:

 (2)

(1) теңдеуді **туындысы арқылы айқындалған не бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің нормаль түрі** деп атайды.

(2) теңдеудің шешуі жөнінде түсінік берейік:

Декарттық координаты  болатын  сандық түзудің кейбір аралығы  болсын.

**3-Анықтама.**  аралығында анықталған  функциясы **(1) теңдеудің шешуі** деп аталады, егер

1)  те

2) барлық  үшін 

3)  аралығында

.

Енді бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің симметриялық деп аталатын түріне тоқтала кетейік. (1) теңдеуді қарастырайық.



 (3)

(3) бірінші ретті теңдеудің симметриялық түрі деп аталады, бұдан тиісті операциялар арқылы (1) теңдеуді алуға болады.

**Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің геометриялық мағынасы. Интегралдық қисықтар**

(1) теңдеудің  түріндегі шешуін табудың ылғи да сәті түсе бермейді, көпшілік жағдайда  түрінде айқындалмаған болып келеді. Жалпы (1) теңдеуді шешуін табу процесін оны интегралдау деп те атайды, (1) теңдеу шешуінің  облысындағы сәйкес қисығының графигі интегралдық қисықтар деп аталады.  жазықтықтағы тікбұрышты координаттар болсын. Онда, жоғарыда айтылғандай, (1) теңдеудің  шешуінің графигі ретінде оған бір қисық сәйкес келеді. Осы қисықты бұдан әрі интегралдық қисық деп атаймыз. Кейде осы интегралдық қисықтың өзін шешу деп қарастыруға болады. (1) теңдеудің сол жағы  осінің оң бағытымен  қисығына  нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың арасындағы бұрыштың тангенсі болатыны белгілі. Сондықтан  сияқты кезкелген нүктеде  облысында (1) теңдеу белгілі бір бағыт береді, яғни координаттары  әр нүктеде салынған векторлар пайда болады. Осы әр нүктеден салынған векторлар өріс бағытын береді (1-сызба). Бұл бағыт кезкелген  нүктесінде  теңдеуі арқылы анықталады.

*y*

G

*(x, y)*

*(x, y)*

γ

*х*

0

(1-сызба).

Осы қасиеті арқылы интегралдық қисықтарды басқа толып жатқан қисықтардан ажыратып алуға болады (жазықтықтағы нүкте арқылы шексіз көп қисықтар жүргізуге болатынын ұмытпаңыз).

**Анықтама.** Егер интегралдық қисықтың әрбір нүктесінде (1) теңдеумен анықталатын өрістің көлбеу бағыты әрқашанда бірдей болса, онда оны **изоклина** деп атайды.

Изоклинаның теңдеуі

 (4)

мұнда тұрақты сан,  осімен интегралдық қисыққа жүргізілген жанама арасындағы бұрыш. Яғни (1) теңдеу өріс бағыттарының изоклинасы  облысының барлық нүктесінде өріс бағыттары бірдей  бұрыштық коэффициентіне тең қисықты айтады. Изоклина (1) теңдеу шешуін аналитикалық түрде таппай-ақ, оның интегралдық қисығының бейнесін алуға мүмкіндік береді.

***Мысалы:*** Изоклина арқылы ****** теңдеуінің интегралдық қисықтарын жуықтап салу керек. Изоклина теңдеуі ****** егер  болса, онда    Бұлардың барлығы өзара параллель түзулер. Берілген теңдеудің екінші туындысын тауып, оны экстремумға зерттегенде, экстремум нүктелерінің жоқ екенін білеміз. Енді өрістердің бағыты қандай болар еді.



Осы зерттеулер берілген теңдеу интегралдық қисықтарын жуықтап салуға мүмкіндік береді (2-сызба).

*0*

*y*

*k=-1*

*k=0*

*k=+1*

*y=2x+1*

*y=2x*

*y=2x-1*

*x*

*y=2x-2*

2-сызба

Өз бетімен шығаруға есептер

Изоклина әдісімен келесі дифференциалдық теңдеулердің интегралдық қисықтарының бейнесін сал.

******

**Коши есебі**

(1) теңдеу үшін Коши есебі былай қойылады:

(1) теңдеудің толып жатқан барлық шешулерінің ішінен берілген  сан мәні бойынша функцияның өзі  сан мәнін алатындай

 (7)

шешуін табу қажет, яғни

 , (8)

мұндағы  және  бастапқы берілгендер, ал (8) бастапқы шарт деп аталады. Коши есебін геометриялық тұрғыдан былай өрнектейміз: (1) теңдеудің толып жатқан барлық интегралдық қисықтарының ішінен жазықтықта берілген  арқылы өтетінін табу керек (3-сызба).

Егер  саны бар болып, осы сан үшін  аралығында  болатындай  шешуі анықталса, онда Коши есебінің тек бір ғана шешуі болады, басқа шешуі болуы мүмкін емес.

Егер Коши есебінің бір ғана емес бірнеше шешуі болса, онда  нүктесінде жалғыз ғана шешуінің бар болуы бұзылады деп есептеледі.

*y*

*x*

0

*M0(x0,y0)*

*G*

3-сызба

**Жалпы шешу. Дербес шешу. Жалпы интеграл**

(1) теңдеудің шексіз көп шешулерінің  тұрақтыға байланысты болатын

 (9)

шешуі **жалпы шешу** деп аталады. Бұл геометриялық тұрғыдан  жазықтығында интегралдық қисықтар тобын өрнектейді. Осы жалпы шешуден бастапқы берілгендер  арқылы Коши есебінің шешуін алуға болады. (9) теңдікке  мәндерін қоямыз.

 (10)

(10) теңдікті (9) теңдікке қойып Коши түріндегі дербес шешуді алуға болады.  немесе

 (11)

***Мысал:*** Теңдеудің жалпы шешуі ****** болсын.  нүктесіне сәйкес Коши түріндегі шешуін тап.



******-Коши түріндегі шешу (дербес шешу). Бұл геометриялық тұрғыдан  нүктесі арқылы өтетін жалғыз ғана интегралдық қисықты көрсетеді (4-сызба).

*y*



-1

0

*x*

4-сызба

Егер (1) теңдеудің шешуі арқылы айқындалмаған

 (12)

түрінде алынса, оны жалпы интеграл деп айтады. (12) теңдіктен

 (13)

алынса, ол канондық түрдегі жалпы интеграл деп аталады. Канондық жалпы интегралдың негізгі бір қасиеті: егер -тің орнына теңдеудің кез келген бір дербес шешуін қойсақ, (13)-тің оң жағы әрқашанда тұрақты шама береді. Мәселен, 

**Ерекше шешу**

Коши есебінің жалғыздық шарты бұзылатын әрбір нүктедегі шешу ерекше шешу деп аталады. Геометриялық тұрғыдан ерекше шешу теңдеу шешулерінің интегралдық қисықтар тобының құрамында болмайды, сондықтан да теңдеу жалпы шешуінің бар болатын облысында жатпайды.

Айнымалылары бөлектенетін дифференциалдық теңдеулер

Айнымалылары бөлектенетін теңдеулер (3) симметриялық түріндегі теңдеуге ұқсас.

 (14)

 тің берілген үзіліссіз функциялары,  тің берілген үзіліссіз функциялары, айнымалылары бөлектенетін теңдеу деп аталады. Мұнда  облысында (14) теңдеудің ерекше нүктелері болмайды деп алынады. Егер

 болатын  табылса, онда  (14) теңдеудің шешуі болар еді, осыған ұқсас  болатын  табылса, онда  (14) теңдеудің шешуі болады.

Егерде  және  болса,  нүктесінің аймағында (14) теңдеу мына төмендегі теңдеумен пара – пар болар еді, себебі екі теңдеудің де шешулерінің жиыны бірдей.

 (15)

Бұл айнымалылары бөлектенген теңдеу. Практика жүзінде (14) теңдеудің екі жағын  өрнегіне бөліп (14) теңдеуден алуға болады. (15) интегралдау арқылы

 (16)

жалпы интегралын табамыз.  . (16) – да  және ,  (біруақытта нольге тең емес) деп алып  бастапқы берілгендерге сәйкес шешуін аламыз.

 (17)

***Мысал: *** теңдеуін интегралдау керек. Теңдеудің екі жағын ****** өрнегіне бөлеміз. ****** айнымалылары бөлектенген теңдеу. Интегралдап жалпы шешуін табамыз. Сонда ******, . Мұнда мына шешулер

ерекше шешулер, себебі тұрақты шама -ның қандайда мәні болмасын оларды жалпы шешуден алуға болмайды. Бұл жағдайда Коши есебінің жалғыздық шарты бұзылады.

***Ұсынылатын әдебиеттер:***

* 1. Сүлейменов Ж. Дифференциялдық теңдеулер: Алматы,1996.
* 2. Сматов Т.С. Жай дифференциалдық теңдеулер курсы (интегралдау әдістері). ҚарМУ, Қарағанды-2006.
* 3. Әбдіманапов С., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. «Нұржол», Астана-2004.
* 4. Сүлеймен Ж. Дифференциалдық теңдеулер курсы: оқулық; Әл - Фараби атын. Қазақ ұлттық ун-ті. - Алматы: Қазақ ун-ті, 2009. - 440 б.
* 5. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.- М.: Наука, 1969.
* 6. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления.- Москва-Санкт-Петербург: ФМ, 2001.
* 7. Сүлейменов Ж.С. Бірінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулерді интегралдау әдістері- Алматы: Кітап, 1982. - 112 бет.
* 8. Тихонов А. Н. Дифференциальные уравнения: Учеб.пособие для вузов/ 2-е изд.,перераб.и доп.. - М.: Наука, 1985. - 231 с.: ил.. - (Курс высшей математики и математической физики; Вып.7)
* 9. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: ВШ, 1978.
* 10. Айдос Е. Ж. Жоғары математика-3: оқулық. - Алматы: Бастау. - 2008. 3 т. - 2008. - 536 б.
* 11. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1992.