№1 дәріс

Анықтамалар және негізгі ұғымдар. Бірінші ретті теңдеудің шешімінің геометриялық және физикалық мағынасы. Изоклиналар. Коши есебі

Айнымалылары бөлектенетін дифференциалдық теңдеулер

**Жоспар.**

1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің нормаль түрі.
2. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің геометриялық мағынасы. Интегралдық қисықтар.
3. Коши есебі. Жалпы шешу. Дербес шешу. Жалпы интеграл. Ерекше шешу
4. Айнымалылары бөлектенетін теңдеу.
5. Айнымалылары бөлектенген теңдеуді интегралдау үшін не істейсің.
6. Теңдеудің ерекше шешіміне күдікті шешуін табу. Шешімнің күдікті болмай ерекше болатыны.

Лекция мазмұны.

Координаттары белгіленген декарттық тікбұрышты жүйесінің евклид жазықтығын арқылы таңбалайық, ал және облысында берілген кейбір үзіліссіз функция болсын.



Бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді оқуды туындысы арқылы айқындалған

(1)



теңдеуінен бастайық. Мұнда тәуелсіз айнымалы (яғни аргумент), ал тің белгісіз функциясы.



**1-Анықтама.** Тәуелсіз айнымалы , белгісіз функция және оның бірінші ретті туындысы немесе ті байла-ныстырып тұратын қатынасты **бірінші ретті дифференциалдық теңдеу** деп атайды.



***Мысалы:***



**2-Анықтама.** Егер дифференциалдық теңдеудегі белгісіз функция бір ғана тәуелсіз айнымалының функциясы болса, онда оны **жай дифференциалдық теңдеу** деп атайды.

Бұл тарауда негізінен бірінші ретті жай дифференциалдық теңдеулерді қарастырамыз. Оның жалпы түрі былайша жазылады:

(2)



(1) теңдеуді **туындысы арқылы айқындалған не бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің нормаль түрі** деп атайды.

(2) теңдеудің шешуі жөнінде түсінік берейік:

Декарттық координаты болатын сандық түзудің кейбір аралығы болсын.



**3-Анықтама.**  аралығында анықталған функциясы **(1) теңдеудің шешуі** деп аталады, егер



1) те



2) барлық үшін



3) аралығында



.



Енді бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің симметриялық деп аталатын түріне тоқтала кетейік. (1) теңдеуді қарастырайық.



(3)



(3) бірінші ретті теңдеудің симметриялық түрі деп аталады, бұдан тиісті операциялар арқылы (1) теңдеуді алуға болады.

**Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің геометриялық мағынасы. Интегралдық қисықтар**

(1) теңдеудің түріндегі шешуін табудың ылғи да сәті түсе бермейді, көпшілік жағдайда түрінде айқындалмаған болып келеді. Жалпы (1) теңдеуді шешуін табу процесін оны интегралдау деп те атайды, (1) теңдеу шешуінің облысындағы сәйкес қисығының графигі интегралдық қисықтар деп аталады. жазықтықтағы тікбұрышты координаттар болсын. Онда, жоғарыда айтылғандай, (1) теңдеудің шешуінің графигі ретінде оған бір қисық сәйкес келеді. Осы қисықты бұдан әрі интегралдық қисық деп атаймыз. Кейде осы интегралдық қисықтың өзін шешу деп қарастыруға болады. (1) теңдеудің сол жағы осінің оң бағытымен қисығына нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың арасындағы бұрыштың тангенсі болатыны белгілі. Сондықтан сияқты кезкелген нүктеде облысында (1) теңдеу белгілі бір бағыт береді, яғни координаттары әр нүктеде салынған векторлар пайда болады. Осы әр нүктеден салынған векторлар өріс бағытын береді (1-сызба). Бұл бағыт кезкелген нүктесінде теңдеуі арқылы анықталады.



*y*

G

*(x, y)*

*(x, y)*

γ

*х*

0

(1-сызба).

Осы қасиеті арқылы интегралдық қисықтарды басқа толып жатқан қисықтардан ажыратып алуға болады (жазықтықтағы нүкте арқылы шексіз көп қисықтар жүргізуге болатынын ұмытпаңыз).

**Анықтама.** Егер интегралдық қисықтың әрбір нүктесінде (1) теңдеумен анықталатын өрістің көлбеу бағыты әрқашанда бірдей болса, онда оны **изоклина** деп атайды.

Изоклинаның теңдеуі

(4)



мұнда тұрақты сан, осімен интегралдық қисыққа жүргізілген жанама арасындағы бұрыш. Яғни (1) теңдеу өріс бағыттарының изоклинасы облысының барлық нүктесінде өріс бағыттары бірдей бұрыштық коэффициентіне тең қисықты айтады. Изоклина (1) теңдеу шешуін аналитикалық түрде таппай-ақ, оның интегралдық қисығының бейнесін алуға мүмкіндік береді.



***Мысалы:*** Изоклина арқылы теңдеуінің интегралдық қисықтарын жуықтап салу керек. Изоклина теңдеуі егер болса, онда Бұлардың барлығы өзара параллель түзулер. Берілген теңдеудің екінші туындысын тауып, оны экстремумға зерттегенде, экстремум нүктелерінің жоқ екенін білеміз. Енді өрістердің бағыты қандай болар еді.



Осы зерттеулер берілген теңдеу интегралдық қисықтарын жуықтап салуға мүмкіндік береді (2-сызба).

*0*

*y*

*k=-1*

*k=0*

*k=+1*

*y=2x+1*

*y=2x*

*y=2x-1*

*x*

*y=2x-2*

2-сызба

Өз бетімен шығаруға есептер

Изоклина әдісімен келесі дифференциалдық теңдеулердің интегралдық қисықтарының бейнесін сал.



***Ескерту:*** Дифференциалдық теңдеуді интегралдауды дифференциалдауға кері есеп деп қарастыруға болады. Мәселен, интегралдық есептеулерде берілген функциясының анықталмаған интегралы (алғашқы функциясы) табылады. Мұны теңдеу арқылы былай жазуға болады; егер алғашқы функцияны арқылы таңбалайтын болсақ немесе



. (5)



, (6)



мұндағы -кез келген тұрақты. (6) теңдіктен белгісіз функция бірмәнді болмайтындығы шығады, ал бұл (5) дифференциалдық теңдеудің шексіз көп шешуі болатынын көрсетеді. Егер шешуде кез келген тұрақты болса, оны жалпы шешу деп атайды. Ал -ға белгілі бір мән берсек дербес шешу шығады. Практика жүзінде (5) теңдеудің шексіз көп шешулерінің бәрін қарастырудың қажеті болмайды, көпшілік жағдайда дербес деп аталатын шешулер қарастырылады.



**Коши есебі**

(1) теңдеу үшін Коши есебі былай қойылады:

(1) теңдеудің толып жатқан барлық шешулерінің ішінен берілген сан мәні бойынша функцияның өзі сан мәнін алатындай



(7)



шешуін табу қажет, яғни

, (8)



мұндағы және бастапқы берілгендер, ал (8) бастапқы шарт деп аталады. Коши есебін геометриялық тұрғыдан былай өрнектейміз: (1) теңдеудің толып жатқан барлық интегралдық қисықтарының ішінен жазықтықта берілген арқылы өтетінін табу керек (3-сызба).



Егер саны бар болып, осы сан үшін аралығында болатындай шешуі анықталса, онда Коши есебінің тек бір ғана шешуі болады, басқа шешуі болуы мүмкін емес.



Егер Коши есебінің бір ғана емес бірнеше шешуі болса, онда нүктесінде жалғыз ғана шешуінің бар болуы бұзылады деп есептеледі.



*y*

*x*

0

*M0(x0,y0)*

*G*

3-сызба

**Жалпы шешу. Дербес шешу. Жалпы интеграл**

(1) теңдеудің шексіз көп шешулерінің тұрақтыға байланысты болатын



(9)



шешуі **жалпы шешу** деп аталады. Бұл геометриялық тұрғыдан жазықтығында интегралдық қисықтар тобын өрнектейді. Осы жалпы шешуден бастапқы берілгендер арқылы Коши есебінің шешуін алуға болады. (9) теңдікке мәндерін қоямыз.



(10)



(10) теңдікті (9) теңдікке қойып Коши түріндегі дербес шешуді алуға болады. немесе



(11)



***Мысал:*** Теңдеудің жалпы шешуі болсын. нүктесіне сәйкес Коши түріндегі шешуін тап.



-Коши түріндегі шешу (дербес шешу). Бұл геометриялық тұрғыдан нүктесі арқылы өтетін жалғыз ғана интегралдық қисықты көрсетеді (4-сызба).

*y*



-1

0

*x*



4-сызба

Егер (1) теңдеудің шешуі арқылы айқындалмаған



(12)



түрінде алынса, оны жалпы интеграл деп айтады. (12) теңдіктен

(13)



алынса, ол канондық түрдегі жалпы интеграл деп аталады. Канондық жалпы интегралдың негізгі бір қасиеті: егер -тің орнына теңдеудің кез келген бір дербес шешуін қойсақ, (13)-тің оң жағы әрқашанда тұрақты шама береді. Мәселен,



**Ерекше шешу**

Коши есебінің жалғыздық шарты бұзылатын әрбір нүктедегі шешу ерекше шешу деп аталады. Геометриялық тұрғыдан ерекше шешу теңдеу шешулерінің интегралдық қисықтар тобының құрамында болмайды, сондықтан да теңдеу жалпы шешуінің бар болатын облысында жатпайды.

Айнымалылары бөлектенетін дифференциалдық теңдеулер

Айнымалылары бөлектенетін теңдеулер (3) симметриялық түріндегі теңдеуге ұқсас.

(14)



тің берілген үзіліссіз функциялары, тің берілген үзіліссіз функциялары, айнымалылары бөлектенетін теңдеу деп аталады. Мұнда облысында (14) теңдеудің ерекше нүктелері болмайды деп алынады. Егер



болатын табылса, онда (14) теңдеудің шешуі болар еді, осыған ұқсас болатын табылса, онда (14) теңдеудің шешуі болады.



Егерде және болса, нүктесінің аймағында (14) теңдеу мына төмендегі теңдеумен пара – пар болар еді, себебі екі теңдеудің де шешулерінің жиыны бірдей.



(15)



Бұл айнымалылары бөлектенген теңдеу. Практика жүзінде (14) теңдеудің екі жағын өрнегіне бөліп (14) теңдеуден алуға болады. (15) интегралдау арқылы



(16)



жалпы интегралын табамыз. . (16) – да және , (біруақытта нольге тең емес) деп алып бастапқы берілгендерге сәйкес шешуін аламыз.



(17)



***Мысал:*** теңдеуін интегралдау керек. Теңдеудің екі жағын ****** өрнегіне бөлеміз. ****** айнымалылары бөлектенген теңдеу. Интегралдап жалпы шешуін табамыз. Сонда ******, . Мұнда мына шешулер



 

ерекше шешулер, себебі тұрақты шама -ның қандайда мәні болмасын оларды жалпы шешуден алуға болмайды. Бұл жағдайда Коши есебінің жалғыздық шарты бұзылады.

***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

**№2 дәріс**

**Біртекті теңдеулер. Біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеулер. Бірінші ретті теңдеудің симметриялық түрі**

**Жоспар.**

1. 1 -ретті теңдеудің симметриялық түрі.
2. Біртекті теңдеулер. Біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеулер түрлері және оларды шешу .
3. Жалпыланған біртекті теңдеу және оны интегралдау.

Лекция мазмұны.

Енді біртекті теңдеулердің кейбір қасиеттері қолданылатын сызықтық деп аталатын теңдеулерді қарастырайық.



теңдеуі берілсін. Бұдан шығады. Екі жағын функциясына көбейтейік, сонда



алсақ келесі теңдеу шығады.

(18)



осы теңдеу **бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің симметриялық түрі** деп аталады.

**1-Анықтама.**  функциялары  **өлшемді біртекті функция** деп аталады, егер барлық үшін



, (19)



мұнда деп алсақ,



немесе

(20)



**2-Анықтама.** Егер (18) теңдеуде функциялары бірдей өлшемдес болса, онда ол теңдеу **біртекті дифференциалдық теңдеу** деп аталады. (18) теңдеуге (20) қолдансақ:



(21)



Егер (18) теңдеу (21) түріне келтірілсе , онда ол біртекті теңдеу . Біртекті теңдеуді интегралдау үшін

(22)



ауыстыруын қолданайық, мұнда тің белгісіз жаңа функциясы, бұдан



(23)



(22), (23)-ті (18) – ге қойсақ:



(20) – ға сүйенсек



(24)



айнымалылары бөлектенетін теңдеу.

;



Егер деп алсақ, онда



немесе (25)



жалпы интеграл

**Ерекше шешу:** Айнымалылары бөлектенетін теңдеу алу үшін (24) – ті өрнегіне бөлгенде теңдеуінің түбірін жоғалтар едік. Сондықтан () бас нүктеге жақындап келетін жартылай түзулер ерекше шешуге күдікті шешу. Егер (21) теңдеудің жалпы шешуінің құрамында болса, ерекше шешу емес, ал егер болмаса-ерекше шешу. Қандайда болмасын шешуі болу үшін теңдеуді тепе-теңдікке айналдыру қажет.



***Ескерту:*** Біртекті теңдеу интегралдық қисықтарының өзіне тән бір қасиеттері бар. Мұны көрсету үшін (21) теңдеуді алайық. Бұл теңдеудің оң жағы бас нүктеден шығатын () жартылай түзулердің барлық нүктелерінде тұрақты мәндер қабылдайды. Сондықтан олар (21) теңдеудің изоклинасы болады. Жартылай түзулерден басқа бас нүктеден шығатын интегралдық қисықты алып, оның барлық нүктелердегі радиус-векторларын бірнеше есе көбейтсек немесе азайтсақ, жанамаларының бағыты алынған қисықпен бірдей болар еді. Демек осылайша алынған қисық (21) теңдеудің интегралдық қисығы.



***Мысал:***



біртекті теңдеу. ауыстыруын қолданамыз. Бұдан . Теңдеуге қойсақ



;



-ке бөлсек



немесе - осін жанап, бас нүкте арқылы өтетін дөңгелектер тобы. түбірі, олай болса ерекше шешу.



**3. Біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеулер**

(26)



теңдеуі берілсін. Егер болса, онда (26) біртекті теңдеу, сондықтан және нольге тең емес деп алынады. Мына төмендегі екі жағдайды қарастырайық.



* 1. яғни коэффициенттері пропорционал емес. Жазықтықта түзулерін қарастырайық.



Егер түзудің қиылысу нүктесі болса, онда



(27)



(27)-ні бойынша дифференциалдасақ, яғни



(28)



(27) және (28)-ді (26)-ға қойсақ



Біртекті теңдеу шығады.

* 1. яғни коэффициенттері пропорционал.



Демек, жазықтықтағы түзулер өзара параллель, cондықтан



Ендеше (26) теңдеу



түріне келтіріледі де, (29) сызықтық ауыстыруы арқылы одан айнымалылары бөлектенетін теңдеу аламыз.



Жоғарыдағы жағдайларды өзбеттеріңізбен дәлелдеңіздер.

**4. Жалпыланған біртекті теңдеулер**

(30)



теңдеуі берілсін.

**1-Анықтама.** Егер аргументтерін сәйкес -өлшемдес деп алғанда, (30) теңдеудің сол жағы біртекті функция болса, онда ол **жалпыланған біртекті теңдеу** деп аталады, яғни



(31)



орынды.

Жалпыланған біртекті (30) теңдеуді интегралдау үшін

(32)



ауыстыруын қолданамыз, мұнда жаңа тәуелсіз айнымалы, ал жаңа белгісіз функция.



(33)



(32)-нің екіншісін бойынша дифференциалдап орнына қойсақ



(34)



шығады. (30) теңдеуден

(35)



Біртекті қасиетін еске алсақ



немесе

(36)



теңдеуі шығады. Бұл теңдеуі сияқты.



Егер арқылы айқындалса, оңай интегралданады. Басқа жағдайларда параметр енгізу әдісін қолданамыз.



**2-Анықтама.** (18) симметриялық түріндегі 1-ретті дифференциалдық теңдеу жалпыланған біртекті деп аталады, егер бір саны табылып, ауыстыруы арқылы (18) және ға байланысты біртекті теңдеу болса.



Осыны өзбетіңізбен дәлелдеңіз.

***Ескерту:*** Мына төмендегі жалпы түрдегі

(37)



қарастырайық.

болғанда (21) теңдеу шығады. (37) –ні интегралдау үшін



(38)



ауыстыруы қолданылады.



(39)



айнымалылары бөлектенген теңдеуге келтірілді.



мұнда кез келген тұрақты.



***Мысалдар:*** 1)



біртекті теңдеу. ауыстыруын пайдаланамыз



-ті қойсақ жалпы шешімі, осін жанай, бас нүкте арқылы өтетін дөңгелектер тобы.



ерекше шешімі.



2)



,, біртекті теңдеу ауыс-тыруын пайдаланамыз.



; интегралдап, орнына -ды қойып, ал және - дың орнына мәндерін қойсақ жалпы шешімі шығады. ерекше шешімі.



3)



Демек ауыстыруын пайдаланамыз. Мұны бойынша дифференциалдап, теңдеудегі және орнына қойсақ айнымалылары бөлектенген теңдеу шығады. Интегралдасақ жалпы шешуі шығады.



Ерекше шешуге күдікті шешуді іздейік



ерекше шешу емес, себебі болғанда, ол жалпы шешуден шығады, ал ерекше шешу.



***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№3 дәріс

1 -ретті сызықтық теңдеулер және оған келтірілетін теңдеулер. Риккати арнайы теңдеуі

**Жоспар.**

1. Сызықтық теңдеу және оның түрлері. Сызықтық теңдеудің жалпы қасиеттері
2. Сызықтық теңдеудің түрлеріне байланысты интегралдау әдістері.
3. Біртекті емес сызықтық теңдеулерді интегралдау әдістері.
4. Біртекті емес сызықтық теңдеу шешімінің құрылымы. Сызықтық біртекті емес теңдеудің дербес шешімін табу.
5. Сызықтық теңдеуге келтірілетін теңдеулер. Оларды интегралдау үшін (сызықтық теңдеуге келтіру үшін) қолданылатын әдістер.

Лекция мазмұны.

**Анықтама.** Егер 1-ретті дифференциалдық теңдеу ізделетін белгісіз функция және оның туындысы бойынша сызықты болып келсе, оны **сызықтық теңдеу** деп атайды.



Мәселен,



деп алып, теңдеудің екі жағын бөлейік, сонда



(1)



Егер болса, оны біртекті сызықтық, ал болса, сызықтық емес 1-ретті теңдеу деп атайды.



Алдымен біртекті сызықтық теңдеуді интегралдайық.

(2)



Бұдан әрі (2) теңдеуді (1) теңдеуге сәйкес біртекті теңдеу деп атайды, бұл айнымалылары бөлектенетін теңдеу.



(3)



біртекті теңдеудің жалпы шешімі.

**1. Сызықтық теңдеудің жалпы қасиеттері**

10. Тәуелсіз айнымалы -ті , мұнда аралығында анықталған, әрі дифференциалдаланатын -ның функциясы арқылы ауыстырғаннан (1) теңдеудің сызықтық қалпы өзгермейді.



20. Іздеп отырған функциясын сызықтық түрде



ауыстырғаннан (1) теңдеудің сызықтық қалпы өзгермейді, мұнда белгісіз -тің жаңа функциясы, ал (бұл қасиеттердің дұрыстығын өз беттеріңізбен дәлелдеңіздер).



**2. Біртекті емес сызықтық теңдеуді интегралдау**

(1) теңдеуді интегралдаудың негізгі үш әдісі бар:

тұрақтыны варияциалау әдісі (Лагранж әдісі), теңдеудің сол жағын толық туындыға келтіру (Эйлер әдісі) және Бернулли әдісі.

**10 . Тұрақтыны вариациялау әдісі. Лагранж әдісі.**

Бұл әдістің мәнісі мынада: (1) теңдеудің жалпы шешуі оған сәйкес біртекті теңдеудің (3) жалпы шешуі түрінде ізделеді, бірақ тұрақтының орнына –те үзіліссіз дифференциалданатын функциясы алынады, яғни тұрақты шама вариацияланады.



Демек (1) теңдеудің жалпы шешуін

(4)



түрінде іздейміз.

Енді тің (1) теңдеуді қанағаттандыратын мәнін табуымыз қажет.



Ол үшін (4) ті бойынша дифференциалдаймыз.



(5)



(4) және (5)-ті (1)-ге қойсақ:



(6)



(6)-ны (4)-ке қойып, теңдеудің жалпы шешімін табамыз, яғни

(7)



**20. Эйлер әдісі.** Біртекті емес теңдеудің сол жағын толық туындыға келтіру немесе интегралдаушы көбейткіш әдісі.

(1) теңдеудің екі жағын көбейтсек, сонда



; интегралдасақ осыдан



(8)



(1) теңдеудің жалпы шешуі.

**30. Бернулли әдісі.**

(1) теңдеудің шешуін (9), мұнда анықталған, әрі дифференциалданатын функциялар түрінде іздейміз.



(9) ды бойынша дифференциалдайық



(10)



(9) және (10) (1) ге қойып және функциясын



теңдеуді қанағаттандыратындай етіп алайық, бұдан



(11)



интегралдасақ



(12)



жалпы шешу.

**3. Біртекті емес сызықтық теңдеу шешуінің құрылымы.**

**Теорема:** Егер (1) теңдеудің бір дербес шешуі болып, ал оған сәйкес (2) біртекті теңдеудің жалпы шешуі болса, онда (1) теңдеудің жадпы шешуі



(13)



формуласы арқылы өрнектеледі.

**Нұсқау:** Теореманы дәлелдеу үшін мұнда -тің белгісіз жаңа функциясы, ауыстыруын бойынша дифференциалдап, (1) теңдеуге қоямыз, содан -ті тауып қойсақ (13) шығады.



***Ескерту***: (7)формулада да жақшаны ашсақ:

(14)



(13) пен (14) ті салыстырсақ

(15)



шығады. (15) арқылы (1) теңдеудің бір дербес шешуін табамыз.

***Мысалдар:***

1) . Алдымен біртекті теңдеуді аламыз. Бұл айнымалылары бөлектенетін теңдеу, оның жалпы шешуі:



Берілген (1) біртекті емес сызықтық теңдеудің жалпы шешуін түрінде іздейміз, бойынша дифференциалдап, (1) теңдеудің орнына қойсақ, жалпы шешуі.



Жоғарыдағы теоремаға сәйкес берілген теңдеудің бір дербес шешуі болады. Осыны (15) формула бойынша тауып көрейік



***Ескерту:*** Егер (1) теңдеудің және дербес шешулері белгілі болса, онда



орынды. Бұдан мүшелеп алып тастасақ, мынау шығады



Демек (2) біртекті теңдеудің жалпы шешуі болар еді де, (1) біртекті емес теңдеудің жалпы шешуін теорема бойынша



;



**Қорытынды:** Егер теңдеудің және екі дербес шешуі белгілі болса, онда теңдеудің шешуін квадратурасыз табуға болады екен.



**4. Сызықтық теңдеуге келтірілетін теңдеулер**

**10. Бернулли теңдеуі**

(16)



мұнда нольден, бірден басқа кез келген тұрақты сан, түріндегі теңдеу Бернулли теңдеуі деп аталады.



Бұл теңдеуді алғаш рет Яков Бернулли (1695ж) қолданған, ал шешуін тапқан інісі Иван Бернулли. болғанда (16) теңдеу біртекті емес сызықтық теңдеу, ал болғанда айнымалылары бөлектенетін теңдеу болатынын көрсету қиын емес. (16) теңдеуді интегралдау үшін, оның екі жақын бөлейік:



, (17)



мұнда теңдеудің бірінші мүшесі қасындағы көбейткіштің бір тұрақты коэффицентке ғана айырмашылығы бар туындысы болып тұр. Сондықтан,



(18)



мұнда -тің жаңа белгісіз функциясы, ауыстыруын қолданған қолайлы. (18) ді бойынша дифференциалдасақ, сонда



(19)



(18), (19)-ды (17) ге қойсақ:

(20)



біртекті емес сызықтық теңдеу.

Демек, жалпы шешуі



Егер (18) еске алсақ

(21)



(16) Бернулли теңдеуінің жалпы шешуі:

**Ерекше шешу:** болғанда теңдіктің екі жағын бөлгенде шешуін жоғалтуымыз мүмкін, ал болғанда теңдеудің шешуі емес. болғанда (21) формула бойынша болғанда шығады, ол дербес шешу, себебі осінің нүктелері арқылы ешқандай интегралдық қисық өтпейді. Жоғарғы айтылғандарға байланысты болғанда ғана ерекше шешу болуы мүмкін.



**20. Риккати теңдеуі:**

**Анықтама.** Егер теңдеуінің оң жағы -ке байланысты квадрат үшмүшелік болса, яғни



(27)



оны Риккати теңдеуі деп атайды, мұнда және -те анықталған әрі үзіліссіз -тің функциялары, коэффициенттер.



Егер болса, онда (27) теңдеу Бернулли теңдеуі, ал болса біртекті емес сызықтық теңдеу болар еді, сондықтан қарастырамыз.



**Теорема:** Егер (27) теңдеудің бір дербес шешімі белгілі болса, оны Бернулли теңдеуіне келтіруге болады.



Дәлелдеу: Айталық (27) теңдеудің шешімі белгілі болсын, онда



(28)



орынды.

(29)



-тің жаңа белгісіз функциясы. (29)-ды (27)-ге қойсақ



(28)-ді еске алсақ,

(30)



Бернулли теңдеуі шығады.

(30)-ды

(31)



ауыстыруы арқылы

(32)



біртекті емес сызықтық теідеуге келтіріледі.

Практика жүзінде (29) және (31)-ді еске алсақ,

(33)



ауыстыруы (27) теңдеуді бірден сызықтық теңдеуге келтіреді.

***Мысал:*** Рикатти теңдеуі. дербес шешуі бірден сызықтық теңдеуге келтіру үшін пайдаланамыз



орнына қойсақ біртекті емес сызықтық теңдеу шығады. Осыдан -ды тауып, орнына қойсақ жалпы шешуі шығады. (өз беттеріңізбен шығарыңыздар). Рикатти теңдеуі жалпы шешуінің құрылымын қарастырайық.



(32) теңдеу шешуінің құрылымы:

(34)



болатыны белгілі. Мұнда (32) теңдеудің дербес шешуі, ал (32) теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешуі.



(33)-ті еске алсақ,



Демек, шешуінің құрылымы кез келген тұрақтыға байланысты бөлшек-сызықтық функция.

***Ескерту:*** 1) Егер Рикатти теңдеуінің екі дербес шешімі белгілі болса, онда оның жалпы шешуі бір ғана квадратура арқылы табылады (бір рет қана интегралданады).

Мәселен, Рикатти теңдеуінің және дербес шешімдері болса, онда (33) бойынша ауыстыру формуласы Рикатти теңдеуін сызықтық теңдеуге келтіріледі.



2) Егер Рикатти теңдеуінің үш дербес шешімі болса, ешбір квадратурасыз табылады (интегралдаудың қажеті жоқ). Мәселен, Рикатти теңдеуінің дербес шешімдері болсын.



Онда сызықтық теңдеудің шешімі болар еді. Демек, немесе





Сызықтық теңдеудің жалпы шешуін осы арқылы ешбір квадратурасыз табуға болады.

Енді мына мәселеге тоқталайық.

Алғаш рет 1841 ж. Лиувилль Рикатти теңдеуінің жалпы (27) түріндегі теңдеуі ылғида квадратура арқылы интегралдана бермейтінін көрсеткен.

Сондықтан, Рикатти теңдеуінің практикада көп қолданылатынын еске ала отырып, квадратура арқылы интегралданатын түріне тоқталайық.

Рикатти теңдеуінің квадратура арқылы интегралданатын кейбір қарапайым түрлері:

1) мұнда -кез келген тұрақтылар, айнымалылары бөлектенетін теңдеу болғандықтан квадратура арқылы интегралданады.



2) мұнда кез келген тұрақтылар. Бұлда айнымалылары бөлектенетін теңдеу.



3) біртекті теңдеу.



4) немесе



мұнда -тің жаңа белгісіз функциясы, ауыстыруы арқылы айнымалылары бөлектенетін теңдеуге келтіріледі.



5) жалпыланған біртекті теңдеу.



ауыстыруы арқылы айнымалылары бөлектенетін теңдеуге келтіріледі.



***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№4 дәріс

Толық дифференциалды теңдеулер. Интегралдаушы көбейткіш

**Жоспар.**

1. Толық дифференциалды теңдеу. Теңдеудің симметриялық түрі, толық дифференциалды болу үшін орындалатын қажетті және жеткілікті шарт.
2. Толық дифференциалды теңдеуді интегралдау әдісі.
3. Интегралдаушы көбейткіш. Интегралдаушы көбейткіштерді табудың кейбір әдістері.
4. Интегралдаушы көбейткіш және ерекше шешім.
5. Интегралдық көбейткіштің бар болуы жөніндегі теорема

Лекция мазмұны.

Анықтама. Егер

(35)



1-ретті симметриялық түрдегі теңдеудің сол жағы үзіліссіз дифференциалданатын функциясының толық дифференциалы болса, онда оны толық дифференциалды теңдеу деп атайды.



Мұнда және олардың дербес туындылары -облысында үзіліссіз, оған қоса облысында ешқандай ерекше нүкте болмауы қажет.



Анықтама бойынша

(36)



(37)



жалпы интеграл.

Мысал:



Жалпы интегралы



10. Жалпы интегралды табу

(37)



болатыны матанализден белгілі.

(36) және (37)-ні салыстырсақ; облысында



(38)



онда осыдан



(39)



барлық үшін математикалық анализ курсында қисықсызықты интеграл тарауында, егер бір байланысты аймақ болса, онда (35) теңдеу толық дифференциалды теңдеу болуының жеткілікті шарты (39) болатыны дәлелденген. Бір байланысты аймаққа жазықтық, дөңгелек, төртбұрыш жатады, ал дөңгелек сақина жатпайды.



функциясын табу үшін (38) алайықта, оның 1-теңдеудегі -ті тұрақты шама деп қарастырайық, сонда



(40)



Осыдан (38)-дің 2-теңдігі бойынша

(41)



(42)



жалпы интеграл немесе жалпы шешуі.

***1. Мысал:***



демек, берілген теңдеу толық дифференциалды теңдеу. Сондықтан,



;



жалпы шешімі.

***2. Мысал.*** Дифференциалдық теңдеуді шешу керек:

.



Шешуі. Мұнда , , онда берілген теңдеу толық дифференциалдық теңдеу.



,



пайдаланып, аламыз. Бұдан



немесе берілген теңдеудің жалпы шешімі.



20. Интегралдаушы көбейткіш.

(43)



толық дифференциалды теңдеу болмасын дейік.

Анықтама. Егер (43) теңдеудің екі жағын көбейткенде, ол толық дифференциалды теңдеу болса, онда оны интегралдаушы көбейткіш деп атайды. Анықтамаға сәйкес



(44)



толық дифференциалды теңдеу. Сондықтан

(45)



(жеткілікті шарты)

(46)



бұл 1-ретті дербес туындылы теңдеу.

Интегралдаушы көбейткішті табу үшін мына жағдайларды қарастырайық.

1) , бір ғана -тің функциясы болсын, онда (46) – дан немесе интегралдағаннан кейін



(47)



Мысал:



сондықтан берілген теңдеу толық дифференциалды теңдеу емес, интегралдаушы көбейткішті табу керек. Ол үшін (47)-де интеграл астындағы фунуцияны есептеу қажет.



демек немесе



толық дифференциалды теңдеу.

2) болсын. Бұл жағдайды өз-беттеріңізбен қорытып шығарыңыздар.



Нұсқау: (46) теңдеуді қарастыру қажет.

3) екі айнымалының функциясы болсын. Онда (46) былай жазылады:



а) егер болса, онда



б) егер болса, онда



Мысал:



түрінде іздейік, демек



толық дифференциалды теңдеу.

30. Интегралдаушы көбейткіш және ерекше шешім

(43) толық дифференциалды емес теңдеуді алайық. Интегралдаушы көбейткіш болсын. Онда



(48)



бұдан



а) жалпы интеграл



в)



бұдан мынадай қорытынды жасауға болады. Ерекше шешім интегралдаушы көбейткіштер -ке айналатын нүктелерде болады.



40. Интегралдық көбейткіштің бар болуы жөніндегі теорема:

Егер аймағында (43) теңдеудің жалпы интегралы болып және интегралының осы аймақта 2-ретті дербес туындылары бар болса, онда (43) теңдеудің интегралдаушы көбейткіші бар болады.



Дәлелдеу: жалпы интеграл болғандықтан . Демек,



(49)



және шамалары



(50)



жүйені қанағаттандырады. (50) біртекті жүйенің нольге тең емес шешуі бар, сондықтан



немесе бұдан



(51)



(52)



(52)-ні (49)-ға қойсақ

(53)



мұндағы интегралдаушы көбейткіш.



Теорема: Егер (43) теңдеудің интегралдаушы көбейткіші болып, ал оған сәйкес интегралы болса, онда үзіліссіз туындылары бар



(54)



(43) теңдеудің интегралдаушы көбейткіші болады.

Дәлелдеу: (43) теңдеудің екі жағын (54)-ке көбейтсек

(55)



(43) теңдеудің сол жағы функциясының толық дифференциалы, сондықтан (54) формуладан анықталған -де (43) теңдеудің интегралдаушы көбейткіші.



Қорытынды: 1) Кез келген интегралдаушы көбейткіш (54) формула арқылы табылады.

2) интегралдаушы көбейткіш жалғыз ғана емес, бірнешеу болуы мүмкін.

Салдар: Егер және (43) теңдеудің өзара тең емес интегралдаушы көбейткіштері болса, онда



(56)



(43) теңдеудің жалпы интегралы. (54)-ке сәйкес яғни жалпы интеграл.



***Мысал:***  теңдеудің интегралдаушы көбейткіштері



салдар бойынша



демек



жалпы интеграл.

Берілген айнымалылары бөлектенетін теңдеудің шешімін тауып, оның жалпы интегралы болатынын көрсетіңіздер.



***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№5 дәріс

Коши есебі шешуінің бар болуымен жалғыздығы жөніндегі мәселелер

**Жоспар.**

1. Эйлер сынық сызығы.
2. Пеано теоремасында функциясына қойылатын шарттар.



1. Пикар теоремасында функциясына қойылатын шарттар.



1. Пеано мен Пикаро теоремаларының негізгі айырмашылықтары.
2. Пеано кесіндісі.

Лекция мазмұны.

**1. Эйлер сынық сызығы**

(1)



теңдеуі берілсін және оң жағы аймағында анықталған және үзіліссіз болсын. Онда (1) теңдеу жазықтығында бір өрістер бағытын беретіні белгілі, оған қоса оң жағы үзіліссіз болғандықтан өрістер бағыты да үзіліссіз, сондықтан кез келген өзара жақын екі нүктедегі бағыттар бір-бірінен азғана айырмасы болады.



(1) теңдеудің оң жағы үзіліссіз болғандықтан, оның шешуіде үзіліссіз дифференциалданатын функция, сол себептен интегралдық қисығыда тегіс (үзілген жері жоқ) болуы керек.

Кез келген интегралдық қисықтың әр нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың бағыты өріс бағытымен бірдей болатын қасиетті пайдаланып (изоклина әдісі, 1-қараңыз) аймағында бастапқы берілген сәйкес Коши есебінің шешуін табайық.

*y*

*x*

0

*M-2*

*M0(x0,y0)*

*M-1*

*M1(x1,y1)*

*G*



5-сызба

Ол үшін аймағында нүктесі арқылы түзу кесіндісін жүргізейік, оның бұрыштық коэффициенті болатыны белгілі. Осы түзудің кез келген нүктесінің көлбеуі -ге тең түзу жүргізейік т.с.с.(5-сызба). Осындай түзулерді нүктесінен солға қарайда жүргізуге болады. Сонымен аймағында белгілі бір сынық сызық пайда болады. Осы сынық сызықты Эйлер сынығы деп атайды да. Қолданылған әдісті Эйлер әдісі дейді. аймағының нүктесі арқылы өтетін осы сынық сызықтар (1) теңдеудің интегралдық қисықтарының кейбір бейнесін бере алады. Олай болуы сынық сызықтардың саны -ке ұмтылғанда, оның әр буынының ұзындығы нольге тең болуына байланысты.



**2. Пеано теоремасы.**

Егер (1) теңдеудің оң жағы аймағында үзіліссіз және болса, онда (1) теңдеудің аралығында бастапқы шартты қанағаттандырарын ең жоқ дегенде бір шешуі бар болады.



(мұнда аралығы Пеано кесіндісі деп аталады).



1) жағдайда айтылғандарға байланысты нүктесі арқылы кез келген бағытпен шексіз көп сынық сызықтар жүргізуге болатыны белгілі, ал оның әр қайсысы әр түрлі интегралдық қисықтың бейнесін берер еді.



Осы сияқты Пеано теоремасыда Коши есебі шешуінің тек қана бар болуын қамтамасыз етеді, оның жалғыз болатындығын қамтамасыз ете алмайды.

Енді Коши есебі шешуінің бар болуымен қоса, жалғыздығында қамтамасыз ететін теореманы қарастырайық.

3. Пикар теоремасы

(1)



теңдеу және бастапқы мәндер берілсін, яғни ;



функциясына төмендегідей шарттар қойылсын:



10 -екі айнымалының тұйық аймағында үзіліссіз функциясы, ал ; мұнда кез келген сандар, функциясы аймағында үзіліссіз болғандықтан осы аймақта шенелген функция, сондықтан төменгі теңсіздікті қанағаттандыратын бір саны табылады,



(2)



*x0-a*

*x0*

*x0+a*

*x0+h*

*x0-h*

*M0(x0,y0)*

*y0+b*

*y0*

*y0-b*

6-сызба

20 функциясының мына төмендегі бойынша шенелген дербес туындысы бар, яғни



(3)



мұнда –тұрақты оң сан, ал . Бұл шартты Липшиц шартымен ауыстыруға болады, яғни үшін



(4)



мұнда айнымалысының кез келген екі мәні, ал -кез келген оң тұрақты сан. Осылайша жорығанда (1) теңдеудің (Пеано кесіндісі) аралығында -тің барлық мәндері үшін анықталған және үзіліссіз жалғыз ғана шешуі бар болады, мұнда



10. Алдымен (1) теңдеу шешуінің бар болуын дәлелдейік.

(Біртіндеп жуықтау әдісін қолданып Пикар дәлелдеген). Бастапқы шарты берілген (1) дифференциалдық теңдеуді оған балама мына интегралдық теңдеумен ауыстырайық

(5)



Бұл интегралдық теңдеу бастапқы шартты қанағаттандырады, себебі



Біртіндеп жуықтау әдісін қолданудың мәнісі мынада: (5) интегралдық теңдеуді біртіндеп жуықтау әдісімен шешеміз, яғни функциясына біртіндеп функциясының мәндерін қою арқылы (5) теңдеудің сол жағындағы -тің мәнін табамыз, мұнда



(6)



тізбегінің аймағынан шықпауын қамтамасыз ету қажет. Алдымен бірінші жуықтауды қарастырайық



(7)



болу үшін -тің өзгеруін интервалымен шектеу керек, мұнда немесе деп алынады, ал екені белгілі.



Онда

(8)



Бұл -дің аймағының шекарасынан шықпайтынын көрсетеді. Екінші жуықтау



(9)



(6), (8) жуықтаулардың екеуіде бастапқы шарттарды қанағаттандырады, себебі болғанда



айырманы бағалайық.

(10)



- де аймағының шекарасынан шығып кетпейді т.с.с. Енді жалпы формула құрайық



(11)



айырманы бағалайық

(12)



Барлық алғашқы жуықтаулар сияқты -де аймағының шекарасынан шығып кетпейді. Енді табайық, осы тізбектің шекті функциясы бастапқы шартта берілген (1) теңдеуді қанағаттандыратынын көрсетейік. Ол үшін төмендегі формаль қатарды құрайық



(13)



Осы қатардың жинақылығын дәлелдеу үшін, мына төмендегі айырмаларды бағалайық:

(14)



(15)



(16)



. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

(17)



Сонымен, (12) қатардың орнына мына қатарды қарастырайық:

(18)



бұл жинақты қатар, себебі Даламбер белгісі бойынша:



(17) қатардың сәйкес әрбір мүшесі (12) қатар мүшелерінен үлкен болғандықтан (екінші мүшесінен бастап) (12) қатарда жинақты, олай болса

(19)



бұл (6) тізбектің шекті функциясы және ол аралығында үзіліссіз. Бұған қоса функциясы (5) интегралдық теңдеуді қанағаттандырады, яғни



(20)



(20) ны бойынша дифференциалдасақ



(21)



Сондықтан (1) теңдеудің бастапқы шартты қанағаттандыратын шешуі бар.

20. Енді осы шешімнің жалғыздығын дәлелдейік. интервалында (Пеано кесіндісі) (1) теңдеудің және екі шешімі болсын дейік, бұл шешімдер нүктесінде бірдей, ал басқа нүктелерде әртүрлі, сондықтан



Айталық нүктесінде бұл айырма ең үлкен мәнін қабылдайтын болсын, айырманы бағалайық



мұнда жағдайда қарама-қайшы теңсіздік аламыз, себебі -ді өте аз шама ретінде таңдап алуға болады, мәселен десек, шығады. Сөйтіп, интервалында тең емес екі шешім бар деп жоруымыз қайшылыққа әкеп соғады, сондықтан теңдеудің жалғыз ғана шешімі бар.



Сонымен Пикар теоремасы Коши есебі шешімінің бар болуын ғана емес, сонымен бірге жалғыздығын да қамтамасыз етеді.

***Мысал:***  теңдеуі үшін шарты бойынша квадрат аймақта Коши есебінің шешуін біртіндеп жуықтау әдісін қолданып 3-жуықтауын табыңыздар? Коши есебінің дәл шешімімен осы жуықтау арасындағы қатесін табыңдар?



Берілген теңдеудің оң жағы бойынша үзіліссіз дифференциалданады және оның бойынша дербес туындысы бар, яғни



Сондықтан Липшиц шартын қанағаттандырады, ал



ал . Демек, Пикар кесіндісі ; жуықтауларды



формуласымен есептейміз.

1-жуықтау:



2-жуықтау:



3-жуықтау:



осы жуықтаумен теңдеудің дәл шешімі арасындағы айырмасы



***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№6 дәріс

Туындысы арқылы айқындалмаған 1-ретті дифференциалдық теңдеулер. Лагранж және Клеро теңдеуі

**Жоспар.**

1. Туындысы арқылы айқындалмаған теңдеудің түрлері.
2. Туындысы арқылы айқындалмаған 1-ретті дифференциалдық теңдеулер шешу әдісі.
3. Лагранж, Клеро теңдеулерін интегралдау, бір-бірінен айырмашылықтары. Ерекше шешімдері.

Лекция мазмұны.

Мына теңдеуді қарастырайық:

(1)



Мұндай теңдеулер үшін жай дифференциалдық теңдеулер теориясында көптеген есептер қарастырылады.

Интегралдау мәселесі:

1) Айталық (1) теңдеу арқылы айқындалған болсын, онда бірнеше теңдеулер жиынтығын алған болар едік, мәселен



(2)



мұнда



Бұл жағдайда (1) теңдеудің шешуін табу үшін, (2) теңдеудің әрқайсының шешуін табу қажет. Осы шешулердің жиынтығы (1) теңдеудің шешімі болар еді. Бұл жағдайда (1) теңдеудің шешімі түгелдей табылама, жоқпа? Деген сұрақ тууы мүмкін.

Есеп:

(3)



теңдеуі берілген. Бұл - қа қатысты квадрат теңдеу болғандықтан



екі 1-ретті дифференциалдық теңдеу шығады.



жалпы шешулері болатыны белгілі, мұнда кез келген тұрақтылар. Егер алсақ, ол әртүрлі топқа жататын екі интегралдық қисықтар бөлігінің жиынтығы болар еді. Мәселен,



*y*

*x*

+2

+1

1

0

*y=x2+1*

*y=2ex-1*

7-сызба

2) Айталық, (1) теңдеу арқылы айқындалған болсын, онда төмендегі теңдеулер жиынтығы шығады:



(4)



мұнда



Бұл теңдеулер бұрын қарастырылмаған, сондықтан оларды шешуге басқа әдістер қолдану қажет.

**1. Параметр енгізу әдісі.**

(4) арасынан жеке

(5)



теңдеуін қарастырайық. Қарастырылып отырған облыста -дың өз аргументтері бойынша дербес туындылары бар деп жориық.



Параметр енгізу әдісінің идеясы: Бұдан бұрын жай дифференциалдық теңдеулердің шешімін немесе интегралын декарт координатасында алған едік. Бұл әдісте шешулер мен интегралдарды параметрлік түрде алатын боламыз, мәселен:



(6)



мұнда параметр, жалпы шешу құрамында болатын кез келген тұрақты.



Ескерту: Математикалық анализ курсында параметрлік түрде берілген функцияда, оның параметрлерін әдетте арқылы таңбалап едік, ал жай дифференциалдық теңдеулер теориясында параметр арқылы таңбаланады. (5) параметр енгізу әдісін жүзеге асыру төмендегіше болады:



Айталық болсын, онда (5)-тен



шығады.

Осының екі жағынан дифференциал алып, қатынасын қолдансақ



немесе

(7)



шығады. Айталық (7) теңдеудің (ол айнымалылары бөлектенген, біртекті т. б. теңдеулер болуы мүмкін) жалпы шешуін таптық дейік, ол кез келген тұрақты.



Егер осыны (6)-ға қойсақ, (5) теңдеудің (6) параметрлік түрдегі шешуін табамыз:



мұнда



Мысал: Егер (6)-да параметрді шығарып тастауға болса, онда декарт координатасында теңдеудің жалпы шешуін алған болар едік.



Мысал:

(8)



берілген.

теңдеуіне параметр енгізу әдісін қолданамыз. болсын, онда



(9)



осыдан толық дифференциал алсақ

шығады.



1. Егер болса, онда (9)-дан бір шешімі шығады.



1. Егер болса, онда



немесе сызықтық теңдеу. Теңдеуді шешіп, оның жалпы шешуі табамыз. Осыны (9)-ға қойып берілген теңдеудің параметрлік түрдегі жалпы шешуін табамыз.



***Ескерту***: (1) теңдеуде арқылы анықталған түрлерін қарастырайық:



(10)



кез келген үшін бұған мысал келтіру қиын емес. (10)-ның әрқайсысын интегралдау мәселесі де параметр енгізу әдісімен шешіледі. Мәселен,



(11)



Мұнда -тың бірінші ретті дербес туындылары болуы қажет. Бұрынғыдай, алайық, онда



(12)



Егер -тің параметрлік түрдегі берілуін тапсақ, оны (12) қойып, -тің де параметрлік түрдегі берілуін табар едік. және айнымалыларына байланысты дифференциалдық теңдеу алу үшін (12)-нің екі жағынан дифференциал аламыз:



Екі жағын -ға көбейтіп және қатынасын еске алсақ, мынау шығады:



(13)



Бұл теңдеу және айнымалыларының дифференциалдық теңдеуі. Айталық, (13) шешуі болсын дейік. Онда осыны (12)-ге қойсақ, теңдеудің параметрлік түрдегі жалпы шешуін алған болар едік:



Егер (1) теңдеу арқылы айқындалатын болса, мәселен немесе



, (14)



онда ол Лагранж теңдеуі деп аталады. (14) теңдеудің болғандағы дербес түрі Клеро теңдеуі деп аталады, ол:



(15)



**2. Лагранж теңдеуін интегралдау**

(14) Лагранж теңдеуін алайық. деп алып және қатынасын пайдалансақ (14) теңдеуге эквивалент болатын жүйе аламыз:



(16)



мұнда және декарттық координаты бойынша берілген үзіліссіз дифференциалданатын функциялар. (15)-тің 1 теңдеуінен дифференциал алайық



сонда



немесе



бұдан



(17)



-ке байланысты 1-ретті сызықтық теңдеу шығады. (17) сызықтық теңдеу шешімінің құрылымы жөніндегі теорема бойынша, оның жалпы шешімі:



(18)



мұнда бір дербес шешімі, ал (17)-ге сәйкес біртекті сызықтық теңдеудің жалпы шешуі . Сондықтан



(19)



Бұл параметрлік түрдегі жалпы шешімі, одан параметр –ны шығарып тастап түрдегі жалпы шешуін аламыз.



***Мысал :***



сызықтық теңдеу



жалпы шешуі ; ал параметрлік түрдегі шешімі:



-ны шығарып тастасақ жалпы шешімі шығады.



**3. Клеро теңдеуін интегралдау**

болғандағы (14) теңдеудің дербес түрі



(20)



Клеро теңдеуі деп аталады. деп алсақ,



(21)



Екі жағынан дифференциал алып, қатынасты еске алсақ:



немесе



онда



(22)



жалпы интегралы

(23)



(24)



Осыдан -ны шығарып тастасақ шешуін аламыз, әдетте бұл ерекше шешу болады.



***Мысал:***  жалпы интегралы



Бұдан шығады, яғни жалпы интегралы түзу сызықтар параболаға жүргізілген жанамалар үйірі болады.



*y=Cx+C2*

*y*

*x*

0



Лагранж теңдеуін интегралдау әдісі:

1. алып, (14) теңдеуде -ті -ке ауыстырамыз.



2. Алынған қатысты сызықтық теңдеуінің шешімін табамыз, яғни түрінде болады, мұнда - кез келген функция.



3. Бастапқы теңдеудің шешімін параметр түрінде жазамыз:



Мысал. Теңдеуді интегралдау керек



Шешуі. қоямыз, онда . Екі жағын дифференциалдап,



аламыз, бұдан

немесе .



Бірінші ретті x –қа қатысты сызықты теңдеу алдық, оны 3-тақырыптағы үлгіге қарап шығарамыз,



Табылған x-тің мәнін қойып,

,



берілген Лагранж теңдеуінің шешімін алдық.

Анықтама. Клеро теңдеуі



түрінде болады.

Шешу әдісі. Клеро теңдеуінің жалпы шешімі



түрінде болады. Клеро теңдеуінің жалпы шешімі параметрлік түрде



болады.

Лагранж және Клеро теңдеулерін де параметр әдісі арқылы шешеміз.

**Мысал**. Теңдеуді интегралдау керек

.



Шешуі. қоямыз, онда аламыз. Теңдеуді дифференциалдап, -ті -ке ауыстырып,



,



бұдан



аламыз.

### Бірінші көбейткішті нөлге теңестіріп, , бұдан аламыз және берілген теңдеудің жалпы шешімі болады, бір параметрден тәуелді түзулер үйірі. Екінші көбейткішті нөлге теңестіре отырып,



аламыз. Осы теңдеуден және -ден p-дан құтылып, теңдеудің шешімін аламыз (ерекше шешім).



Геометриялық тұрғыдан иілгіш түзулер үйірінің қисығы.



***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№7 дәріс

Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті теңдеулер.

**Жоспар.**

1. Реті төмендетілетін жоғарғы ретті теңдеулер түрлері.
2. Теңдеу ретін төмендету үшін белгісіз функция туындысын ауыстыру жағдайлары.
3. Теңдеу құрамында тәуелсіз айнымалы болмайтын жағдайдағы ауыстырудың ерекшеліктері.

Лекция мазмұны.

Мына теңдеуді қарастырайық:

(1)



Егер болса, онда (1) теңдеу жоғарғы ретті жай дифференциалдық теңдеу деп аталады.



***Ескерту*:** болғандағы жағжайда жай дифференциалдық теңдеуді шешудің толып жатқан әдістерін білеміз. Осыған байланысты жаңа айнымалылар арқылы ауыстыру формуласын қолданып, (1) теңдеудің ретін төмендетуге болар ма еді, тіпті кейде осы ауыстыруларды біртіндеп қолданып дифференциалдық теңдеуді 1-ретке дейін түсіруге болатын шығар.



Осындай есептерді шешу үшін, төмендегі 5 жағдайды қарастырайық:

1) (1) теңдеу -ке, оның кейбір ретті туындыларына байланысты былай берілген, мәселен,



(2)



Бұл жағдайда

(3)



Ауыстыруы арқылы (2) теңдеудің реті бірден төмендедетіледі; яғни



(4)



***Мысал:*** теңдеуі берілсін.



, онда



Екі рет интегралдап, белгісіз функция -ті табамыз.



***Ескерту*:** Егер болса, оған 1-ретті теңдеудегі қолданған әдістер жеткілікті, ал онда мүмкін тағы да бір айырбастау қолдану қажет болар.



Айталық, (4) теңдеудің жалпы шешуі табылды дейік.



Онда (3)-ке сәйкес



Мұны шешу қиын емес.

2) (1)теңдеу -ке байланысты емес, яғни



(5)



Бұл теңдеудің реті мына төмендегі ауыстыру арқылы төмендетілетінін көрсетейік:

(6)



т.с.с.

математикалық индукция заңы бойынша, болғанда



(7)



Мұнда -өзінің айнымалыларына байланысты көпмүшелік.



Барлық үшін (7)-ні (5) қойып, реті 1-ге төмендетілген ретті теңдеу аламыз, ол -ке байланысты болады, яғни



Мысал:



теңдеудегі орнына қойсақ.



шығады.



3) (1) теңдеудің сол жағы дәл туынды болатын жағдай.

Айталық (1) теңдеудің сол жағы қандайда бір функциясының толық туындысы болсын дейік, яғни



(8)



немесе

;



Бұл теңдеу барлық айнымалылары бойынша орындалады. Сол себептен (1) теңдеудің жалпы интегралы



болады.

Демек, берілген теңдеудің реті бірге төмендетіледі. Егер (1) теңдеудің сол жағы басқа бір функцияның дәл туындысы болмаса, онда оған келтіру үшін теңдеудің екі жағын интегралдаушы көбейткіш деп аталатын функциясына көбейту қолайлы.(егер ондай функция бар болса, табылса).



Бұл жағдайда (1) теңдеудің жалпы интегралын табумен бірге, оның ерекше шешуін де табуға болады, мәселен

теңдеуін шешу керек.



***Мысал:***



4) (1) теңдеу белгісіз функция және оның туындылары бойынша біртекті болатын жағдай. (1) теңдеу біртекті деп аталады, егер барлық үшін



(9)



теңдігі орындалатын болса,

Бұл жағдайда

(10)



жаңа белгісіз функция.



Онда:



(10)



Немесе (10)-ды интегралдасақ,

(11)



(12)



(12)-ні (1) теңдеуге қойып, біртекті қасиетін пайдаланып, теңдеудің екі жағын

-ке қысқартсақ, реті 1-ге төмендетілген –ке байланысты



(13)



теңдеу шығады.

Егер (13) теңдеудің жалпы шешуін табуға мүмкіндік болса, мәселен



Онда оны (10)-ға қойып белгісіз функция –ті табамыз



(14)



Егер (13) теңдеудің жалпы шешуі табылмайтын болса, онда оның ретін тағы да төмендету үшін жоғары да айтылған жағдайдың бірін қолдануға тура келеді.



Мысал: біртекті (2 өлшем)



ауыстыруын қолданамыз.



Сонда шығады.



5) (1) теңдеу жалпыланған біртекті болатын жағдай.

Егер аргументтерін сәйкес бір, өлшемдес шамалар деп есептесек, яғни



(15)



орындалатын болса, онда (1) теңдеу жалпыланған біртекті теңдеу деп аталады. Бұл жағдайда (1) теңдеуді интегралдау үшін, белгілі жалпыланған біртекті теңдеудің қасиеттерін пайдаланып және орнына



(16)



ауыстыруын пайдаланамыз.

Сонда



Мынаны еске алу қажет: белгісіз функцияның бойынша туындыларын енгізілген жаңа функциясының жаңа бойынша туындыларымен ауыстыру қажет.



Бұл жағдайда

(17)



(15) және (16)-ны (1)теңдеуге қойып, екі жағын – ға қысқартсақ:



(18)



теңдеуі шығады.

Бұл теңдеуде тәуелсіз айнымалы болғандықтан 2) дегі әдіспен (18)-дің ретін бірге төмендетуге болады.



***Мысал:*** теңдеуін интегралдау керек.



Теңдеудегі айнымалыларын сәйкес дәрежелі шамалар деп есептеп, қосылғыштардың дәрежесін өзара теңестіреміз:



бұдан



Бұл теңдіктердің бәрін бірдей қанағаттандыратын саны бар, сондықтан берілген теңдеу жалпыланған біртекті, ендеше



ауыструын қолданамыз, сонда

теңдеуі шығады.



Бұл теңдеу құрамында жаңа айнымалы жоқ, сондықтан әрі қарай ауыстыруын қолданамыз, сонда орындарына қойсақ,



шығады немесе , және



2-теңдеуге сәйкес немесе ,



1-теңдеуден (айнымалылары бөлектенген теңдеу)



шығады.

Сонымен ауыстыруын еске алып және болғанда жалпы шешуі. Ал шешуі осыдан болғанда шығады.



Реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулердің кейбір түрлерін көрсетейік.

1. түріндегі теңдеуін n – еселік интегралдаудан кейін келесі жалпы шешім шығады:



2. түріндегі теңдеу, яғни теңдеу құрамына ізделінді функция мен оның k-1 ретті туындысына дейінгілері кірмейді.



ауыстыруынан кейін теңдеу келесі түрге келеді: .



Бұл теңдеуден анықтайтынымыз: , бұдан кейін кері ауыстыруын жасап, теңдеуін рет интегралдап - ті табамыз.



3. түріндегі теңдеу, яғни теңдеу құрамына тәуелсіз айнымалы кірмеген жағдай, ауыстыруынан кейін барлық туындылары - тан тәуелді жаңа функциясының туындысы арқылы өрнектеледі:



; ;



және т.с.с.



Бұл өрнектерді теңдеуге қоя отырып, (n-1) ретті дифференциалдық теңдеуді аламыз.

4. аргументтеріне қатысты біртекті түріндегі теңдеу, яғни теңдеу ауыстыруы арқылы шығады.



5. түріндегі жалпыланған-біртекті теңдеу, яғни келесі ауыстыруларды жасағанда өзгеріс болмайды:



.



Мұндай теңдеудің ретін ауыстыруы арқылы төмендетуге болады.



6. Теңдеудің реті оңай төмендетіледі, егер теңдеудің екі жағын да қандай да бір функцияның бойынша толық туындысына келтіруге болатын болса.



Мысалға, және т.с.с.



***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№ 8 лекция

Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер. Жалпы теория.

**Жоспар.**

1. -ретті сызықтық теңдеу түрлері.



2. Сызықтық дифференциалдық оператордың қасиеттері.

3. теңдеудің дербес шешімдері болған жағдайдағы олардың өзара сызықтық тәуелсіздігі.



4.Теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесін табу.

5. Теңдеу жалпы шешуін құру.

Лекция мазмұны.

Анықтамалар және сызықтық оператор қасиеттері

(1)



ретті дифференциалдық теңдеу деп аталады, мұнда айнымалының функциясы, ал ізделінетін белгісіз функция.



Егер (1) теңдеу жоғарғы туындысы арқылы айқындалса, мына түрде болады:

(2)



Егер (1) теңдеу

(3)



түрінде берілсе, оны -ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу деп атайды, мұнда аралығында үзіліссіз берілген функциялар. (3) теңдеудің сол жағын арқылы белгілеп, оны сызықтық дифференциалдық оператор деп атаймыз,



Оператор қасиеттері:

1. -const, оператордың біртектілігі



1. оператордың аддитивтігі



Біртекті және аддитивті оператор әрқашанда сызықтық болатынын еске алайық.

1. Жоғарғы қасиеттерінен

(4)



оңай шығады, кез-келген тұрақты. (3) теңдеуді оператор арқылы қысқаша (3) жазуға болады, мұны біртекті емес сызықтық теңдеу, ал егер , яғни



(5)



болса біртекті сызықтық теңдеу деп атайды.

Коши есебі.

(3) сызықтық теңдеу үшін бұл есеп былайша қойылады:



кез – келген саны берілгенде, бастапқы шарттарды қанағанттандыратын (3) теңдеудің шешуін табу қажет. Біртекті (5) теңдеудің шешімі жөнінде



Теорема: Егер

(6)



біртекті теңдеудің шешімдері болса, онда сызықтық комбинация



теңдеудің шешімі болады.

Мұны дәлелдеу (4) қатынастан шығады. Біртекті теңдеудің шешімдер тобына тікелей қатысы бар сызықтық тәуелсіз функциялар ұғымын енгізейік.

Функциялар тобының сызықтық тәуелділігімен тәуелсіздігі.

Анықтама. (6) функциялар –те сызықты тәуелді болады, егер ең жоқ дегенде біреуі нольге тең емес сандары бар болып



(7)



болса,; Егер(7) тепе-теңдік тек қана барлық болғанда ғана орындалса, онда (5) функциялар тобы –да сызықты тәуелсіз болады.



Анықтама. -те үзіліссіз коэффициенттері бар (5) біртекті -ретті дифференциалдық теңдеудің сызықты тәуелсіз шешімдері осы теңдеу **шешімдерінің фундаментальдық жүйесі** деп аталады.



(5) біртекті –ретті теңдеудің жалпы шешімін табу үшін, алдымен оның шешімдерінің фундаментальдық жүйесін, яғни өзара сызықты тәуелсіз



шешімдерін табу керек.

Вронский анықтауышы.

(6) функциялар тобы берілсін. Осы функциялар және олардың –ретті туындыларынан құрылған



(8)



анықтауышты Вронский анықтауышы деп атайды. Осы анықтауыш арқылы (6) функциялар тобының сызықты тәуелді не тәуелсіз болатынын білуге болады.

1. теорема: Егер –те ретке дейінгі туындылары бар (6) функциялар тобы өзара сызықты тәуелді болса, онда



Дәлеледеу: (6) функциялар тобы –да сызықты тәуелсіз болғандықтан, анықтама бойынша барлығы бірдей нольге тең болмайтын сандары бар болып, аралығында (7) қатынас орындалады. (6) қатынасты рет дифференциалдап, мына төмендегідей жүйені аламыз:



(9)



Бұл жүйенің мардымсыз емес (нольдерден басқа, себебі, ең жоқ дегенде бір ) шешімі бар. Ал бұл жүйенің негізгі анықтауышы нольге тең болғанда орындалады, ол Вронский анықтауышы еді, басқаша . Теорема дәлелденді.



***Мысал:*** берілген. аралығында осы функциялардың сызықты тәуелсіздігін зертте?



Берілген функциялар да өзара сызықты тәуелді.



2. теорема: Егер -те ретке дейінгі туындылары бар (6) функциялар тобы, осы аралықта сызықты тәуелсіз болса, онда болуы қажетті және жеткілікті



Дәлелдеу: Керісінше жорып, нүктесінде деп алайық. Бір уақытта нольге тең емес сандары



(10)



жүйенің шешімі болсын. Мұндай сандар бар болады, себебі жүйенің негізгі анықтауышы онда 1-теоремаға сәйкес



(11)



бастапқы шарттарды қанағаттандыратын (5) біртекті теңдеудің шешімі

(12)



Бұл шарттарды мардымсыз шешімі де қанағаттандырады. Теңдеу шешімінің бар болуы мен жалғыздығы жөніндегі теоремаға сәйкес (11) бастапқы шарттарды қанағаттандыратын жалғыз ғана шешім болуы керек. Сондықтан (5) теңдеудің шешімі (12) болады. Демек, керісінше жоруымыз, (6) функциялар тобы сызықтық тәуелді деп алу дұрыс емес.



Теорема дәлелденді.

Мысал:



Вронский анықтауышының мәндеріне сәйкес (нольге тең не тең емес) берілген функциялар тобының сызықты тәуелсіздігін анықта?



-тің кез-келген мәнінде.



Демек, өзара сызықты тәуелсіз функциялар.



Остроградский – Лиувилль формуласы.

-ретті біртекті сызықтық (5) теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесі берілсін.



Демек,

(14)



Осы вронскианның туындысын жатық жолдары бойынша табайық



(15)



анықтауыштардың ең соңғысынан басқасы нольге тең, себебі әрқайсысында екі өзара тең жатық жолдары бар. Сондықтан



(16)



(16) анықтауыштың 1-жатық жолының элементтерін -ке, 2-жатық жолдарының элементтерін ке т.с.с. жатық жолының элементтерін -ке көбейтіп, ең соңғы сәйкес элементтеріне қоссақ



(17)



шығады. Сондықтан



бұдан шығады. -кез-келген тұрақты.



Егер деп алсақ,



(18)



Бұл Остраградский-Лиувилль формуласы.

Қасиеттері:

10. Егер болса, онда үшін , ,



20. Егер болса, онда үшін



30. Егер болса, онда .



(18) формула арқылы (5) теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесін табамыз, ол үшін ;



***Мысал:*** 3-ретті бір диффенренциалдық теңдеудің шешімдері болсын.



Сондықтан өзара сызықты тәуелсіз, теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесі болады, ендеше теңдеу жалпы шешуі



**1. теорема.** -ретті біртекті



(19)



теңдеу берілсін. аралығында үзіліссіз коэффициенттері бар (19) теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесі бар болады.



**Дәлеледеу:** Анықтауышы нольден өзгеше,



(20)



матрицасын алайық. (19) теңдеу үшін бастапқы берілгендері



бар Коши есебін қарастырайық. Теңдеудің бұған сәйкес шешімі болсын. -ға мәндерін беріп, аралығында шешім алсақ, олардан құрылған себебі сондықтан бұл шешімдер аралығында сызықты тәуелсіз болғандықтан, (19) теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесі.



2. теорема. Егер функциялар тобы (19) теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесі болса, онда оның жалпы шешімі



(21)



**Дәлелдеу:** Жалпы анықтама бойынша тұрақты шамалары бар шешім жалпы шешім болады және тұрақтыларға белгілі бір сан мәндер бергенде дербес шешулер шығуы керек. Ал шешімінің бар болуы мен жалғыздығы жөніндегі теорема бойынша дербес шешім болғанда



(22)



шарттар арқылы бірмәнді түрде анықталады.

тұрақтыларды табу үшін төмендегі жүйені қарастырайық



(23)



Мұнда функциясының болғандағы мәндері туындыларының болғандағы мәндері.



(23) жүйенің анықтауышы орнына қойылғандағы Вронский анықтауышы, 3-теоремаға сәйкес . Сондықтан (23) жүйенің жалғыз ғана шешімдері бар. (21) қатынас -ның осы мәндері бойынша (22) бастапқы шарттарды қанағаттандырады.



Теорема дәлелденді.

Теорема 6: (5) ретті біртекті сызықты теңдеудің комплекстік шешімінен екі заттық шешім бөліп алуға болады.



Айталық (5) теңдеудің шешімі болсын, мұнда нақты бөлігі, ал жорамал бөлігі, екеуі де тің нақты функциялары. Сызықтық дифференциалдық операторды қолдансақ, әрі қасиеттері бойынша



Бұл тек қана болғанда ғана орындала-ды. Сондықтан теңдеудің заттық шешімдері.



Мысал:



берілген теңдеудің шешімі.



Бұдан шығады. Олай болса және берілген теңдеудің заттық шешімдері.



***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№9 лекция

Тұрақты коэффициентті n-ретті біртекті теңдеу

**Жоспар.**

1. Теңдеу шешуінің фундаменталдық жүйесі .
2. Сипаттаушы теңдеу түбірлеріне сәйкес теңдеудің жалпы шешімдері.
3. Тұрақты коэффициентті теңдеулерге келтіру үшін қолданылатын формулалар.
4. Тұрақты коэффициентті теңдеулерге келтірілетін *n* – ретті сызықтық теңдеулер.

Лекция мазмұны.

Алдымен

, (1)



-нақты немесе комплекстік сандар болғанда орынды болатынын дәлеледейік.



1. -нақты сан болғанда (1) формула орынды болатыны белгілі



1. *к* – комплекстік сан болсын, яғни



Эйлер формуласы бойынша



Осыған ұқсас шығады.



(2)



теңдеуді қарастырайық, мұнда -тұрақты коффициенттер.



(2) теңдеудің шешімін табу үшін теңдеу шешімінің фундаменталдық жүйесін табу қажет, яғни

(3)



(3) табылғаннан кейін (2) теңдеудің жалпы шешімі

(4)



болатыны белгілі, -тұрақты шамалар



(2) тендеудің дербес шешуін Эйлер бойынша

(5)



түрінде іздейміз, мұнда -нақты немесе комплекстік сандар.



(5) – ті (2) ге қойсақ:



немесе

(6)



мұнда

(7)



немесе

(8)



операторының сипаттаушы көпмүшелігі, ал (8) теңдеу оның сипаттаушы теңдеуі деп аталады.



(8) сипаттаушы теңдеудің түбірлері нақты, комплекстік сандар және еселік түбірлерде болуы мүмкін, осыларды жеке – жеке қарастырайық.

1) Айталық (8) теңдеудің түбірлері өзара тең емес

(9)



болсын дейік. Онда (5)-ке байланысты (2) теңдеудің дербес шешімдері

(10)



болады.

Енді (10) шешулер тобының (2) теңдеу шешуінің фундаменталдық жүйесі болатын дәлелдеу қажет. Ол үшін *W(x)* вронскианды қарастырамыз.

бұл Вандермонд анықтауышы ол ешқашанда жоғарыда келтірілген теоремаларға байланысты (10) функциялар тобы (2) теңдеу шешуінің фундаменталдық жүйесін құрады.



Олай болса (2) теңдеудің жалпы шешімі

(11)



2) Айталық (8) теңдеудің түбірлері әртүрлі, бірақ арасында комплекстік түбірлері де бар болсын, яғни

-*к* нақты түбірлер және



*2m* комплекстік түбірлер (себебі комплекстік түбірлер түйіндес болатыны белгілі)

Түбірлердің саны болады, әрбір түйіндес комплекстік шешімнен екі нақты шешімдер бөліп алынатыны белгілі. Сондықтан . Сонымен нақты шешімдер аламыз, осы шешімдерден сызықтық комбинация – теңдеудің жалпы шешімі



(12)



3) Айталық (8) сипаттаушы теңдеу түбірлері нақты сандар, әрі олардың арасында еселік түбірлер болсын дейік.

Егер түбірі еселік болса, онда



(13)



операциясы (амалы) және оны бойынша дифференциялдау орын алмастырымды болғандықтан



(14)



Бұл көбейтіндіні дифференциялдау үшін Лейбниц ережесін пайдалансақ:

(15)



Айталық, (8) теңдеудің -еселік түбірі болсын, онда (15) сәйкес, әрі (13) еске алсақ:



(16)



Сонымен

(17)



шешім аламыз, бұлардың теңдеу шешімінің фундаменталдық жүйесі болатынын дәлелдеу қиын емес, себебі .



Сондықтан (2) теңдеудің жалпы шешімі

(18)



болады.

Жоғарғы айтылғандарға орай, егер (8) теңдеудің түбірлері еселігі еселігі еселігі мұнда болса, (2) теңдеудің төмендегі шешімі болады.



(19)



Бұл жағдайдағы (2) теңдеудің жалпы шешімі

(20)



мұнда



***Мысал:***1)



сипаттама теңдеуі



жалпы шешімі.



2)



сипаттама теңдеуі



3 еселік түбірі бар, сондықтан



3)



Тұрақты коэффициентті теңдеулерге келтіретін *n* – ретті сызықтық теңдеулер

(21)



біртекті -ретті сызықтық теңдеуді қарастырайық, мұнда -коэффициенттері айнымалы шамалар, -тің функциялары.



(21) теңдеуде тәуелсіз айнымалыны ауыстыру арқылы, оны коэффициенттері тұрақты теңдеуге келтіру мәселесін қарастырайық.

(22)



ауыстыруын қолданайық.

Сонда:

(23)



(22) – ні (21) – ге қойып бөлсек, мына теңдеу шығады.



(24)



(24) теңдеудегі функциясын алдындағы коэффициент тұрақты шама болатындай етіп алуымыз қажет. Сондықтан



Бұдан

(25)



шығады.

Бұл Еругин формуласы деп аталады. Егер (21) теңдеу коэффициенттері тұрақты теңдеуге айналатын болса, онда ол тек қана (25) ауыстыру формуласы арқылы келтіріледі.

Енді (25) ауыстыру формуласы арқылы тұрақты коэффициентті теңдеуге келтірілетін теңдеулерді қарастырайық.

1) Эйлер теңдеуі:

(26)



Эйлер теңдеуі деп аталатын теңдеу берілсін, мұнда -тұрақты нақты сандар. (21) және (26) теңдеуді салыстырсақ, шығады.



(25) – ке сәйкес



Бұдан деп алсақ,



немесе (27)



Сонда:

(28)



Енді (27), (28)-ді (26)-ға қойсақ, , көбейткіштер өзара жойылып, -ретті біртекті, коэффициенттері тұрақты болып келген теңдеу аламыз.



*Ескерту:* Эйлер теңдеуі келтірілетін тұрақты коэффициентті теңдеудің дербес шешулері және болғандықтан, Эйлер теңдеуінің дербес шешулері және болар еді. Сондықтан Эйлер теңдеуінің шешуін түрінде алып интегралдауға болады. Мұнда теңдеуінің түбірі, яғни болуы мүмкін. Онда Эйлер теңдеуінің дербес шешулері болады да, жалпы шешуі



(29)



*Мысал:*



(27) ауыстыруын қолданып, (28)-ді еске алсақ, шығады.



Сипаттама теңдеуінің түбірлері



Сондықтан мұның жалпы шешуі ал Эйлер теңдеуінің жалпы шешуі



2) Чебышев теңдеуі:

Төмендегі теңдеуді қарастырайық

(30)



Мұнда ерекше нүктелер болғандықтан, жиынында шешуінің бар болуы және жалғыздығы жөніндегі теореманың барлық шарттары орындалады.



Біз (30) теңдеудің аралығындағы жалпы шешуін табайық.



Ол үшін (25) – те деп алсақ, немесе (31) ауыстыру формуласын аламыз. Осы ауыстыру бойынша



(32)



(32) – ні (30) – ға қойсақ:

(33)



шығады.

Бұл теңдеудің жалпы шешуі

(34)



болғандықтан, Чебышев теңдеуінің шешуі (31) бойынша



Бұдан дербес шешуі Чебышев көпмүшелігі деп аталады.



***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№10 дәріс

Тұрақты коэффициентті *n* – ретті біртекті емес теңдеудің оң жағы бойынша дербес шешуін табу.

**Жоспар.**

1. Біртекті емес –ретті теңдеудің жалпы шешімін табу әдісі.



1. Кез келген тұрақтыны вариациялау әдісі
2. Теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесі.

Лекция мазмұны.

Тұрақты коэффициентті n – ретті біртекті емес теңдеу және оны шешу әдістері.

(35)



теңдеуі берілсін.

Осындай теңдеулердің 2 класын қарастырайық:

1)



(36)



мұнда және -кез келген сандар.



2)



(37)



мұнда -кез келген сандар, және реттері сәйкес және болатын кез келген көпмүшеліктер.



Теорема: Айталық, (35) теңдеу коэффициенттері тұрақты сандар болсын.



10**.** Егер оның оң жағы (36) түрінде болса, онда (35) теңдеудің дербес шешуі

(38)



түрінде болады, мұнда ретті кейбір көпмүшелік, негізінде -тен басқа, ал



20 Егер теңдеудің оң жағы (37) түрінде болса, онда (35) теңдеудің дербес шешуі.

(39)



мұнда -реті -ге тең көпмүшеліктер.

(8)-дің түбірі болмаса

түбірі болған жағдайдағы оның еселігі



Дәлелдеуін өзбеттеріңізбен жүргізіңіздер.

Нұсқау: а) (38)-ді мына түрде жазыңыз:



б) Көбейтіндінің жоғарғы ретті туындысын табу үшін Лейбниц формуласын қолданамыз, берілген теңдеудің шешуі болатын дәлелдемені қараңыз, шешу (35)-ке қойылады да, оң жағы орнына (36) жазылады;



в) -ке қысқартылады, қалған тепе-теңдікте -тің бірдей дәрежесінің коэффициенттері теңестіріледі, сөйтіп алынған жүйеден біртіндеп көпмүшелігінің барлық коэффициенттері анықталады.



2) Теореманың бұл бөлігі болғанда ғана дұрыс. Теорема алдыңғы жағдайға Эйлер формуласы арқылы келтіріліп дәлелденеді. Негізінде



Осыған орай (37)-ні мына түрде жазайық:

(40)



(40)-тағы әр бір және функциялары (36) сияқты. Сондықтан дербес шешуді таба аламыз, ол болады, мұнда



және теңдеудің сипаттама теңдеуінің және түбірлерінің сәйкес еселіктері.



Қарастырылып отырған жағдайда коэффициенттері нақты сандар, сондықтанда



Сол себептен

(41)



*Ескерту:* Теоремада айтылған дербес шешу құру әдісі-анықталмаған коэффициенттер әдісі деп аталады.

Біртекті емес сызықтық теңдеулерді интегралдау

Мына төмендегі теңдеулерді қарастырайық:

(1)



(2)



(2) теңдеуді (1) теңдеуге сәйкес біртекті сызықтық теңдеу деп атайды. те коэффициенттері үздіксіз деп жоримыз.



**Лемма:** Егер (1) теңдеудің бір дербес шешуі болса, онда оның жалпы шешуі



(3)



формуласымен беріледі, мұнда және (2) және (1) теңдеулердің сәйкес жалпы шешулері.



Дәлелдеу: Келісім бойынша теңдеудің дербес шешуі болғандықтан те мына тепе-теңдік орынды:



(4)



(1)-де



Ауыстыруын жасасақ, мынау шығады:



Соңғы өрнекте, (4)-ке байланысты асты сызылған мүшелері өзара жойылады да, тен тұратын мүшелер қалады. Демек біртекті теңдеудің шешуі.



**Есеп**: (1) теңдеудің оң жағы



болсын.

Егер пайда болатын әрбір теңдеудің дербес шешулері сәйкес



болса, (1) теңдеудің дербес шешуі



болатынын дәлелде.

**Кез келген тұрақтыны вариациялау әдісі**

(1)теңдеуді қарастырып және оған сәйкес (2) теңдеу шешулерінің фундаментальдық жүйесі белгілі болсын дейік. Онда оның жалпы шешуі мына формуламен берілетіні белгілі:

(5)



мұнда - дербес шешімдер, ал –тұрақты шамалар.



Вариациялау әдісінің негізгі идеясы мынада:

(1) теңдеудің жалпы не дербес шешуін (5) түрінде іздеуге болады, бірақ ондағы тұрақты шамалар емес, кейбір белгісіз –тің функциялары; демек (1)-дің шешуін мына түрде іздейміз:



(6)



(6)-ны бойынша рет дифференциалдайық:



................................................................................................... (7)



(7)-ні (1)-ге қойып, арқылы топтастырсақ, 0-ге тең деп алынған шамаларды еске алсақ:



болып шығады.

Сонымен, ізделіп отырған белгісіз дифференциалданатын функциялары мына төмендегі жүйені қанағаттандырады:



(8)



Бұл жүйенің негізгі анықтауышы вронскиан болғандықтан, оның бір мәнді ғана шешуі болады, өйткені



Сондықтан Крамер ережесі бойынша , мұнда -бағанасы бос мүшелермен ауыстырылған анықтауыш, ал –вронскиан, (8) жүйенің негізгі анықтауышы. Бұдан



(9)



Мұнда –кез-келген тұрақты шама.



(9)-ды (6)-ға қойып (2) теңдеудің жалпы шешуін табамыз:

(10)



(10)-да жақшаны ашып, оң жағын (3)-пен салыстырсақ:

(11)



шығады. Бұл (1) теңдеудің бір дербес шешуі.

***Ескерту*:** Сонымен, тұрақтыны вариациялау әдісі мына мәселелерге келтіріледі:

1. (2) біртекті теңдеу шешуінің фундаментальдық жүйесін құру
2. (8) жүйенің шешуін табу
3. Осы табылған шешуді (6)-ға қою.

***Мысал:***



Теңдеу шешуінің фундаментальдық жүйесі болады, өйткені



Берілген біртекті емес теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің шешуі:



Берілген біртекті емес теңдеу шешуін



түрінде іздейміз. Енді алгебралық (8) жүйені құрамыз:



Бұл жүйені бойынша бірмәнді шешіледі, себебі оның негізгі анықтауышы



Сонда:



берілген біртекті емес теңдеудің жалпы шешуі.

***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№11 дәріс

Дифференциалдық теңдеулер жүйесі жөнінде түсінік.

**Жоспар.**

1. Дифференциалдық теңдеулер жүйесі жөнінде түсінік.
2. Коши есебі.
3. Пикар теоремасы
4. Сызықтық жүйелер түрлері. Оларды шешу әдістері және қасиеттері.
5. Сызықты тәуелділік және Вронский анықтауышы.
6. Шешудің фундаменталдық жүйелері және олардың бар болуы.
7. Остроградский - Лиувилль формуласы.

Лекция мазмұны.

Толық хабарламасы бар төмендегі дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырайық

(1)



мұнда , ал



да ізделінетін үздіксіз дифференциалданатын функциялар, - белгісіз функциялар,



- дің ең жоғарғы туындысының реті



-----------------------------------------------------------

- нің ең жоғарғы туындысының реті



- жиынтық реті.



Негізінде бұл жүйе олардың жалпы түрі. Саны дана жаңа белгісіз фүнкцияларды енгізе отырып, біз алғашқы жүйені әрқашанда толық хабарламалы теңдеулер жүйесіне келтіруге болатынын көрсеткен едік.



Егер (1) жүйенің теңдеуі ең үлкен туындысы арқылы анықталса:

(2)



болады. Мұны жүйенің каноникалық түрі деп атайды.

(1) жүйені 1 – ретті теңдеулер жүйесіне келтіруге болады, бұдан мынандай қорытынды шығарамыз: Жаңа айнымалыларды еңгізе отырып, (2) жүйені саны теңдеуден тұратын нормаль түрдегі жүйеге келтіруге болады:



(3)



Сонымен, кез келген (2) жай диференциялдық теңдеулер жүйесін (3) түріне келтіруге болады екен. (3) те кейбір түрлендірулерді жасап көрейік:



Онда (3) мына түрде жазылар еді:

(4)



(4) үшін облысында бар болу және жалғыздық жөніндегі теоременың шарттары орындалатын болсын деп жориық (Пикар теоремасын қараңыз).



Сызықтық жүйелер. Жалпы мәселелер

**Анықтама.** Мына төмендегі (5) жүйені біртекті емес сызықтық жүйе деп атайды:

(5)



Егер (5) жүйеде барлық , онда ол жүйе біртекті сызықтық жүйе деп аталады.



(6)



Егер



Векторлық белгілеуді еңгізсек және



матрица-функцияны алсақ, (5) және (6) жүйелерді мына төмендегі ықшамды түрде жазуға болар еді, мәселен

(5/)



(6/)



Сонымен, негізгі мәселе (5) және (6) сызықтық жүйелерге біртекті және біртекті емес сызықтық теңдеулерге қолданылатын қасиеттері мен тұжырымдарды қолдануға болатынын көрсету.(тұрақты коэффициенттіжүйелерге де қолданылады, яғни )



**Ескерту:** Мынаны еске сақтау керек, егер реті қанша жоғары болса да, дифференциалдық теңдеулер үшін шешуі белгілі бір шарттарды қанағаттандыратын функциясы болса, ал жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шешу функциялар жиынтығы болады, мәселен



(6) жүйенің негізгі қасиеттеріне тоқталайық.

**Негізгі қасиеттері**

10. Тәуелсіз айнымалы және ізделінетін функцияларды ауыстырғаннан (6) жүйенің сызықтық қалпы өзгермейді (инварианттық қасиеті). Біртекті теңдеулерге қолданылған әдіс жарамды.



20. (6) жүйе шешулерінің сызықтық қомбинациясы да оның шешуі бола алады.

Егер (6) жүйенің кез келген шешулер жүйесі



болса,онда тұрақтылар арқылы комбинацияланған



функциясы да оның шешуі болады.



**Дәлелдеу:** 1) (6) жүенің шешуі болғандықтан, оның әрқайсысы –да (6) жүйені тепе-теңдікке айналдырады. Осы теңдіктерді –ға көбейтіп, өзара қоссақ 20 қасиеттің тұжырымдары шығады.



шешуі



шешуі



Осы векторлық тепе-теңдіктерді -ға көбейтіп және туынды қасиеттерін пайдалансақ, мынау шығады:



Бұл вектор-функция сызықтық комбинация болғандықтан (6) жүйені –да қанағаттандырады, демек ол оның шешуі. Дәлелдеу керегі де осы еді.



30. Сызықты тәуелділік және Вронский анықтауышы.

**Анықтама.** Айталық, -да вектор-функциялар берілген дейік. Осы вектор-функциялар –да сызықты тәуелсіз деп аталады, егер олар үшін осы жиында



(7)



орындалмайтын болса, мұнда біруақытта барлығы бірдей нольге тең емес тұрақтылар. Керісінше жағдайда функциялары –да сызықты тәуелді деп аталады.



**Анықтама.** Егер алсақ, -де үздіксіз туындылары бар функциялар болар еді. Осы жағдайда



(8)



өлшемді анықтауыш **Вронский анықтауышы** деп аталады, мұнда 1-бағана шешуінің координаталары, 2-бағана координаталары т.с.с.



**Теорема 1.** вектор-функциялар -да сызықты тәуелді болса, онда



**Теорема 2.** Айталық, вектор-функциялар үздіксіз коэффициенттері бар (6) жүйенің кез келген шешулері болсын дейік. Онда болса, онда бұл функциялар –да сызықты тәуелсіз, ал болғанда, болса, олар –да сызықты тәуелді болады.



**Дәлелдеу: -**ретті біртекті сызықты теңдеудегі дәлелдеуге қараңыз. Ал біз, егер шешулерінің бар болуы мен жалғыздық шартын қанағаттандырса және болса, онда шешулері сызықты тәуелді, 1-теореманың шартына сәйкес Жаңадан шешу құрайық:



(9)



**Теореманы дәлелдеу идеясы:**Біздің дәлелдейтініміз, егер болса, онда барлығы бірдей нольге емес тұрақтылары үшін нүктесінде –тің нольдік бастапқы шарттары болуы қажет, яғни . Онда жалғыздық теоремасы бойынша болады. Осыдан және (9)-дан барлық болмаған да негізгі функциялар сызықты тәуелді болады.



Сонымен, бізге болатыны қажет. Егер (9)-ды еске алсақ, мына төмендегі байланысты алгебралық сызықты біртекті жүйе пайда болады.



(10)



шарт бойынша мұның негізгі анықтауышы болады.



Онда сызықтық алгебра теоремасы бойынша (10) біртекті жүйенің айқын емес шешуі бар болады, яғни (10) қанағаттандыратын барлығы бірдей нольге тең емес сондықтан нүктесінде нольдік



бастапқы шарттары бар. Онда жалғыздық теоремасы бойынша , яғни –да



болады, ал тұрақтылардың бәрі бірдей нольге тең емес, сол себептен негізгі шешу сызықты тәуелді. Ендеше 1-теорема бойынша . Дәлелдеу керегі де осы болатын.



40. Шешудің фундаменталдық жүйелері және олардың барболуы.

**Анықтама.** Кез келген (6) жүйенің сызықты тәуелсіз шешулері фундаменталдық жүйе деп аталады. Осы шешулердің матрицалы шешулердің фунтаменталдық матрицасы болады.



-да болғандықтан -тің өзгеше емес матрица болатыны қажетті және жеткілікті.



**Есеп:** -тің өзгеше болмауы әдетте оған кері матрица бар болуын қамтамасыз етеді.



1)



болатынын дәлелдеу керек.

**Нұсқау:** тепе-теңдігін дифференциялдау керек, қосымша матрицалық тепе-теңдікті



скалярлық тепе-теңдікті дифференциялдау заңы арқылы жүргізуге болатынын еске алу қажет.

2)



дәлелдеу керек, яғни шешулердің фундаменталдық матрицасы (6/)-ті қанағаттандыратынын дәлелдеу қажет.

**Теорема:** (6/) жүйесі үшін шешулерінің шексіз көп фундаменталдық жүйесі бар болады.

**Дәлелдеу:** Сызықтық теңдеулерде қолданылған ұқсас дәлелдеулерге қараңыз.Кез келген анықтауыш.

(11)



нүктені белгілеп алып, шешулерінің фундаметалдық жүйесін құрайық. Ол үшін шешудің бар болу және жалғыздығы жөніндегі теореманы былайша қолданамыз. Айталық (6/) тің шешуі болсын:



(12)



(шешуінің бар болуы және жалғыздығы жөніндегі теорема бойынша). Онда анықтама бойынша шығады, сондықтан 3 қасиеті бойынша құрылған шешулер -сызықты тәуелсіз болады да, келтірілген анықтама бойынша шешулерінің фунтаменталдық жүйесін құрады.



**Қорытынды:** Сонымен, әрбір ге бір ғана фундаменталдық жүйе сәйкес келеді, керісінше де айқын:әрбір фундаменталдық жүйеге белгілі бір анықтауышы сәйкес келеді.Осындай -лар шексіз көп болатыны белгілі,ал бұл айтылған қасиетінің дұрыстығын дәлелдейді.



50. Жалпы шешуінің формуласы.

**Теорема:** Егер (6) жүйенің кез келген фундаментальдық жүйесі болса, онда (6) жүйенің жалпы шешуі



(13)



формуламен беріледі, мұнда кез келген тұрақтылар.



**Дәлелдеу:** а) алдымен кез келген тұрақтылар болғанда (13) (6/) жүйенің шешуі болатынын көрсету керек, ал бұл 2 қасиеттен шығады.



б) алдын ала берілген кез келген тұрақтылары үшін



(14)



шешуі бар болады. (14)-тің бар болуын Пикар теоремасы бойынша дәлелдейміз.

Кез - келген тұрақтылар мен үшін



(15)



Шешуінің бар болуы және жалғыздығы жөніндегі теорема бойынша әрбір сияқты шешу өзінің бастапқы мәндері бойынша бірмәнді анықталады.



Егер (15)-тің шешуін көрсете алсақ, онда Пикар теормасына сәйкес (14) шығар еді.

(15) жүйе анықтауышы бар шамаларына байланысты сызықтық біртекті емес жүйе, сондықтан да Крамер ережесі бойынша (15)-тің жалғыз ғана шешуі бар болады. Дәлелдеу керегі де осы еді.



60. Есеп:үздіксіз матрицалы (6/) жүйе үшін кез келген шешулердің -да сызықты тәуелді болғандығын дәлелдеңіз.



70. Шешулерінің фундаменталдық жүйесі бойынша теңдеудің өзін құру.

**Теорема:** Айталық да үздіксіз коэффициенттер матрицасы бар (6/) жүйенің шешуінің кейбір фундаменталдық жүйесі берілген болсын. Онда (6/) жүйедегі матрицасы бір мәнді анықталады, атап айтқанда:



мұнда шешуінің фундаменталдық матрицасы.



**Дәлелдеу:** Фундаменталдық матрицасын құрайық:



мұнда



..........................



координаттары

Бұл жағдайда өзгеше емес матрица және теңдеуін қанағаттандырады. ке көбейтсек шығады.



Дәлелдеу керегіде осы еді.

80. Остроградский - Лиувилль формуласы.

Айталық (6/) жүйенің кез келген шешуі болсын дейік. Онда үшін



(16)



мұнда



(16) формула Остроградский-Лиувилль формуласы деп аталады.

**Дәлелдеу:** Бір теңдеу үшін осы сияқты мәселені қараңыз. Біздің дәлелдейтініміз

(17)



тепе-теңдігі,осыны интегралдап (16) ны шығарып алар едік сонымен,



анықтауышын қарастырамыз;

Оның туындысы

(18)



Шарт бойынша (6/) жүйенің шешуі. Енді қарастырайық.



(19)



(19) теңдік ауыстыруын (6) жүйеге қойғаннан шығады. (19) ды (18)ге қойсақ мынау шығады:



|анықтауыштардың қасиеті бойынша| =



Сонымен осыны интегралдап (16)-формуланы аламыз.



Дәлелдеу керегі де осы еді.

***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985

№12 дәріс

Тұрақты коэффициентті біртекті сызықты жүйелер

**Жоспар.**

1. - ретті біртекті емес теңдеудің оң жағы бойынша дербес шешімі.



1. Сызықтық жүйелер. Нормаль жүйелер.
2. вектор – функциялар тобының сызықты тәуелсіздігі.



1. Шешімнің фундаменталдық жүйесі. Остроградский – Лиувилль формуласы.
2. Тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық жүйелердің шешімін Эйлер бойынша табуды қайтала?

Лекция мазмұны.

Бұл жүйелердің шешуін былайша табуға болады:

**1)** Жүйені координаттар түрінде жазып, белгісіздерді біртіндеп шығарып тастай отыра, тиісті алгебралық түрлендірулер (егер ол мүмкін болса) бойынша координаттардың біріне сәйкес жүйені -ретті тұрақты коэффициентті бір біртекті сызықтық теңдеуге келтіруге болады. Сәйкес координаттардың көрінісін тауып, оларды шешеміз. Соңында табылған координаттардың басқаларымен байланысын қарастырып, оларды да табуға болады.



**2) Матрицалық әдіс (Эйлер әдісін жалпылау)**

болған жағдайда (6/) шешуін



(20)



түрінде іздейміз, мұнда кейбір сандар, -нольден өзгеше вектор. (20) - ны (6/)-ке қойсақ,



(21)



шығады. Мұнда вектор және (21)-ді қанағаттандыратын саны матрицасының меншікті мәні және меншікті векторы деп аталады, ал саны төмендегі теңдеудің түбірі



(22)



Егер және (21)-ді қанағаттандырса, онда (20) формуламен анықталатын , (6/) жүйенің шешуі болады. Мұнда екі жағдай кездесуі мүмкін:



а) матрицасының меншікті сандары әр түрлі, онда бұлардың әрқайсысына өздеріне тән төмендегі шешулер сәйкес келеді:



(23)



**Ескерту:** Егер заттық матрица және түбірлерінің кейбіреулері комплекстік болса, онда сызықтық теңдеулерге қолданылғандай (23)-ті және арқылы сәйкес заттық форма мен ауыстыруға болады.



в) түбірлері еселік болсын, онда түбірлерінің әрқайсысына (20) түріндегі шешуі сәйкес келеді де, мәніне сәйкес төмендегі ереже бойынша алынатын тәуелсіз шешулер табылады:



мұнда мәніне сәйкес матрицасының меншікті және қосылған векторларының толық жүйесі.



**Практикада қолдану схемасы**

1. Егер , онда сипаттама теңдеуін аламыз да, оның түбірлерін табамыз, егер түбірлері әртүрлі болса, онда шешуі мына түрде болады:



(24)



мұнда



Тұрақтылар арасындағы байланыс былайша анықталады: (24)-ті (6/) қойсақ, одан алынған тепе-теңдік жүйеден арасындағы байланыстар табылады.



1. Егер сипаттама теңдеу түбірлері еселік болып келсе, онда (24) орнына мына төмендегі жүйе болады.

(25)



Тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық жүйелердің жалпы шешімі Эйлер әдісін қолданып табу

(26)



жүйені қарастырайық. Мұнда -тұрақты сандар, коэффициенттер. (33) жүйе матрицалық түрінде былай жазылады:



не (27)



Мұнда -өлшемді вектор, ал өлшемді квадрат матрица, яғни



(28)



(26) жүйенің шешімі Эйлер бойынша мына түрде ізделеді:

(29)



Мұнда матрицасының өзіндік мәні, ал сандарына сәйкес



осы матрицаның өзіндік векторлары.

1) Егер матрицасының өзіндік мәндері қос-қостан әртүрлі болып, ал осы матрицаның



өзіндік векторлары болса, онда (33) жүйе шешулерінің фундаменталдық жүйесі бар болады да, жалпы шешімі мына формуламен анықталады:

(30)



Мұнда сәйкес шешулер тобын табамыз. Мәселен, шешуінің



1-тобы сәйкес



2-тобы сәйкес



....................................................................................................

-тобы сәйкес



Матрицаның өзіндік векторларын табу үшін

(32)



сипаттаушы тендеуінен түбірлерін тауып, орнына кезекпен мәндері қойылған жүйеден өзіндік векторларын табамыз. Мәселен



(33)



Сонда (33) жүйенің жалпы шешімі

(34)



**1-мысал:**



Жүйенің дербес шешулері . Осыны тендеуге қойып, меншікті векторларды табу үшін алгебралық жүйе аламыз



Матрицаның меншікті мәндері



теңдеуінен табылады. Олар Шешімдер тобы:



сәйкес



сәйкес



Алынған дербес шешулердің жүйе шешуінің фундаметалдық жүйесі болатынын анықтау қажет, ол орындалу үшін болуы керек.



Демек жалпы шешімі



2) Егер өзіндік мәні еселік болып сызықтық тәуелсіз өзіндік векторлары болса, онда - ға сәйкес шешімді дәрежелі векторлық көпмүшеліктің - ке көбейтіндісін алу керек:



***Мысалы:***



Сипаттаушы теңдеудің түбірлерін табайық



Берілген жүйенің шешімін



түрінде іздейміз, бұл шешулер сызықты тәуелсіз шешулер бола алмайды, сондықтан басқа бір шешулер іздеу керек.



- ге сәйкес бұдан



осы шешумен сызықты тәуелсіз болатын шешім , сипаттауыш теңдеу түбірі еселік болғандықтан



түрінде ізделеді. Осы екінші шешімдерді берілген теңдеуге қойсақ,



Бұл теңдеулерден



Осыдан

және Сондықтан



және екі сызықты тәуелсіз шешімдер аламыз.



Демек берілген жүйенің жалпы шешімі



3) Егер матрицасының меншікті сандары арасында комплекстік сандар болса, онда матрицасы нақты болған жағдайда, жүйенің комплекстік шешімінен санына сәйкес екі сызықты тәуелсіз нақты шешім бөлініп алынады.



***Мысалы:***



түбірлеріне сәйкес комплекстік түрдегі шешімі мұнда -векторлар да комплекстік сандар. сандарын



теңдеуінен табамыз, олар



Сондықтан



Сонымен жүйенің екі заттық шешімі табылды. Жалпы шешім:



1. ***Белгісізді шығару әдісі:***

Бұл әдіспен теңдеулер жүйесін бір белгісізі бар жоғарғы ретті теңдеуге келтіріп шығаруңа болады. Әдіс қиын емес теңдеулер жүйесін шығаруға қолайлы.

**1. Мысал.** Жүйенің шешімін табу керек:



Шешуі: Жүйенің бірінші теңдеуінен

, (\*)



осыдан туынды аламыз , жүйенің екінші теңдеуіне қойып, тұрақты коэффициентті екінші ретті теңдеу аламыз. Біртекті теңдеуінің сипаттамалық теңдеуі



.



Біртекті теңдеудің шешімі .



Дербес шешімін іздейміз , онда .



Сонымен .



Жалпы шешімі . Осыдан , оны (\*)-ға қойып, аламыз.



*Жауабы:* , .



1. ***Эйлер әдісі.***

(1) жүйені векторлық түрде жазамыз:

, (2)



мұнда .



(2) жүйенің шешімін



түрінде іздейміз, мұнда - A матрицасының өзіндік мәні,



, (3)



теңдеуінен - A матрицасының өзіндік векторын-ға сәйкес табамыз.



Дербес жағдайларды қарастырамыз:

1. Егер - әртүрлі нақты сандар болса, - сәйкес өзіндік векторлар, онда шешімді



түрінде жазамыз.

1. Егер - еселі , k- еселі түбірлер болса,



а) сонша өзіндік векторлар болады, онда шешімді



түрінде жазады.

б) m (m<k) сызықты тәуелсіз өзіндік вектор, онда шешімді



берілген жүйеге қойып, тұрақтыларды табамыз.

3) Егер - комплекстік санда, әрбір -ға сәйкес шешім , мұнда - Эйлер теңдеуі. Мысал қарастырайық.



**2. Мысал.** Жүйенің шешімін табыңыздар



Шешуі: 1) Сипаттамалық теңдеуін құрамыз:

,



бұдан



2) Өзіндік векторларды анықтаймыз:

болғанда, өзіндік векторды анықтайтын теңдеулер



,



түрінде болады. Бұдан , оның шешімінің біреуі (2;1) – өзіндік вектор, осыдан



болғанда өзіндік векторды анықтайтын теңдеулер



түрінде болады. Бұдан , оның бір шешімі (-4;1) – өзіндік вектор, осыдан



3) Жүйенің жалпы шешімі:



**3. Мысал.** Жүйенің шешімін табыңыз:



Шешімі: 1) Сипаттамалық теңдеуден өзіндік мәндерді табамыз:

,



осыдан



үшінші жағдай.

2) Өзіндік векторларды анықтаймыз.

болғанда, өзіндік векторларды анықтайтын теңдеулер



,



түрінде болады, осыдан , оның бір шешімі(1;-i) – өзіндік вектор.



Жүйенің фундаментальды шешімі



және

және



онда



- түйіндес санға сәйкес шешім түбірімен сәйкес келеді.



*Жауабы:*



**4. Мысал.** Жүйенің шешімін табу керек

(\*\*)



Шешімі. 1) Сипаттамалық теңдеуі:

, (\*\*\*)



осыдан



еселі түбірлер.

2) Сызықты тәуелсіз өзіндік векторлар санын табамыз:

болғанда, (\*\*\*) теңдеуден



матрицасын аламыз, оның реті n=2, ранг r=1.

Сызықты тәуелсіз өзіндік векторлар саны m = n - r =1.

түбірі еселігі , яғни , онда шешімді ретті көпмүшеліктің көбейтіндісі ретінде қарастырамыз, яғни



және

;



(\*\*) жүйеге қойып,



сәйкес коэффициенттерін теңестіре отырып,

бірінші теңдеуден



екінші теңдеуден



аламыз. Осыдан

, белгілесек, онда .



3) Берілген жүйенің жалпы шешімі:



Нормаль түріне келтірілмеген



жүйесін шешу үшін келесі сипаттамалық теңдеуді құрамыз

.



Теңдеудің түбірлерін табамыз. Шешімді алдыңғы есептей жазамыз.

**5. Мысал.** Жүйенің шешімін табу керек:



Шешуі. Сипаттамалық теңдеуін құрамыз

.



Бұдан , .



болғанда, өзіндік векторларды табамыз



Шешім:



болғанда, өзіндік векторларды табамыз



Шешім:



Жүйенің жалпы шешімі



***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

**№13 дәріс**

**Интегралдық тендеулерді кластарға бөлу**

**Жоспар**

*1.Интегралдық тендеулерді кластарға бөлу*

*2. Практикалық және теориялық маңызы бар сызықтық емес интегралдық теңдеулер*

*1. Интегралдық тендеулерді кластарға бөлу.*

Белгісіз функциялар интегралдың астында кездесетін теңдеулер интегралдық тендеулер деп аталады. Егер белгісіз функция интегралдық тендеуге сызыктық түрде қатынасса, онда бұл тендеу сызықтық теңдеу деп аталады.

түріндегі тендеу Фредгольмнің ІІ-текті сызықтық интегралдық теңдеуі деп аталады. Мұндағы -нақты айнымалы аргументіне тәуелді белгісіз функция, функциясы кесіндісінде, функциясы жиынында анықталған белгілі функциялар: пен сәйкес интегралдық теңдеудің бос мүшесі мен ядросы деп аталады, ал - параметр. Интегралдық жоғарғы және төменгі шектері жалпы жағдайда тұрақты шамалар: олар шектелген де шектелмеген де болуы мүмкін. Егер болса, онда жоғарыдағы (1.1) интегралдық теңдеу - біртекті, ал болған жағдайда - біртекті емес деп аталады.

Фредгольмнің І-текті интегралдық теңдеуінде белгісіз функция интегралдық мүшеде ғана қатынасады, дәлірек айтқанда, ол теңдеу

түрінде жазылады.

Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуі деп

түріндегі, ал І-текті интегралдык теңдеуі деп

түріндегі теңдеуі айтады.

Егер функциясын интегралдық теңдеуге қойғанда теңдеу тепе-тендікке айналса, онда функциясы интегралдық теңдеудін шешімі деп аталады. Интегралдық теңдеудің шешімі бар және оның жалғыз болуы параметріне байланысты екенің келешекте көрсетеміз.

Мәселен, Фредгольмнің біртекті интегралдық

теңдеуінің параметрінің кезкелген мәндерінде шешімі бар болады, ал нольден ерекше шешімдер әрқашан бар бола бермейді.

Фредгольмнің біртекті интегралдық теңдеуінің нольге тең емес шешімдері бар болатын параметрінің мәндері меншікті мәндер деп, ал оларға сәйкес нольден өзгеше шешімдер меншікті функциялар деп аталады.

Ескерту. Вольтерра теңдеуінің Фредгольм теңдеуінің дербес түрі деп қарастыруға болады. Себебі (1.3) теңдеуінің ядросы , облысында анықталған, ал жағдайда деп алсақ, онда біз (1.1) теңдеуінің ядросын

түрінде анықтаймыз.

Бұл еcкерту бойынша Фредгольм теңдеуі үшін дәлелденген қасиеттер Вольтерра теңдеуі үшін де орындалады. Бірақ Вольтерра теңдеуінің тек өзіне тең ерекше қасиеттері бар, сондықтан Фредгольм теңдеуімен қатар Вольтерра теңдеуін де қарастырамыз.

Келешекте (1.1) және (1.3) интегралдық теңдеулердегі берілген бос мүше пен ядро үзіліссіз немесе квадраттарымен интегралданатын функциялар:

яғни, деп ұйғарамыз. Осы шартты қанағаттандырушы функциясын Фредгольм ядросы деп атайды. Фредгольм ядроларына мысалдар келтірейік.

1-мысал. ядросындағы айнымалылар болғанда фредгольмдік ядро болады, ал болса, онда ол фредгольмдік ядро болмайды.

Расында

2-мысал. Егер интегралдық теңдеудің ядросы

мұндағы - үзіліссіз функция және болса, онда ядро фредгольмдік болады, ал болса, ол ядро фредгольмдік болмайды.

Егер (1.5) ядросында болса, онда ол ядро ерекшелігі әлсіз немесе полярлық ерекшелікті ядро деп, ал теңдеу ерекшелігі әлсіз интегралдық теңдеу деп аталады. Егер болса, онда интегралданбайтын функция болады. Бұл функциядан алынған интеграл тек Кошидің бас мәні мағнасында ғана бар болуы мүмкін. Ядросы түріндегі интегралдық теңдеуді сингулярлық интегралдық теңдеу, ал басқаларын регулярлық интегралдық теңдеулер деп атайды. Бір аргументті сингулярлық интегралдық теңдеудің жалпы түрі:

мұнда Г-комплекс жазықтықтағы тұйық немесе тұйық емес қарапайым доғалар жиыны; және функциялар Г доғасында анықталған, ал

Біз тек сызықты регулярлық интегралдық теңдеулерді ғана қарастырамыз. Интегралдық теңдеулерді бір аргументті функция үшін ғана емес, көп аргументті функциялар үшін де қарастыруға болады. Мәселен, Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеуінде ядро , бос мүше, ал Фредгольмнің 2-текті сызықтық интегралдық теңдеулері системасы

түрінде өрнектеледі. Егер -векторлар, ал ядро элементтері болатын матрица деп қарасақ, онда системаны (1.1) теңдеуі түрінде жазуға болады.

Дәл осылай аргуметті функция үшін Вольтерра теңдеуі

түрінде, ал системасын

түрінде өрнектеуге болады.

*2. Практикалық және теориялық маңызы бар сызықтық емес интегралдық теңдеулер*

Математикалық, физикалық кейбір қолданбалы есептерді шешу сызықтық емес интегралдық теңдеулерді шешуге алып келеді. Сондықтан кейбір практикалық және теориялық маңызы бар бірнеше сызықтық емес интегралдық теңдеулерді зерттеусіз келтірейік.

1) Гаммерштейн теңдеуі

Мұндағы - фредгольмдік ядро.

2) Урысон теңдеуі

Мұндағы - үзіліссіз функция; , ал М – шенелген оң шама.

3) Вольтерранын сызықтық емес теңдеуі

Мұндағы - үзіліссіз функция, , облысында анықталған.

4). Ляпунов-Лихтенштейн теңдеуі

Мұндағы мен үзіліссіз функциялар.

Егер теңдеулерде белгісіз функцияның интегралымен қоса туындылары да бар болса, ондай теңдеулерді интегро-дифференциалдық теңдеулер дейміз. Мысал үшін мына ең қарапайым интегро-дифференциалдық теңдеулерді келтірейік:

мұнда белгісіз функциялардың бірінші ретті туындылары бар болғандықтан, бұл теңдеулердің шешімі жалғыз болуы үшін қосымша шарттары берілуі қажет.

Қолданбалы математикада интегро-дифференцилдық сызықтық, сызықтық емес теңдеулер немесе теңдеулер жүйесі және жоғарғы ретті туындылы (кәдуілгі және дербес туындылы) интегро-дифференциалдық теңдеулер көп кездеседі. Мысалы

Теңдеуінің бастапқы шарттары шешімін табу есебін қарастыруға болады. Егер белгісіз функция көп аргументті болса, онда интегро-дифференциалдық теңдеулерде белгісіз функциялардың дербес туындылары мен интегралдары көп өлшемді болады. Интеграл астындағы өрнекте белгісіз функциялардың туындылары болатын интегро-дифференциалдық теңдеулер де жиі кездеседі. Eгер интеграл сыртындағы өрнекте белгісіз функциялардың туындылары жоғарғы ретті болса, көп жағдайда мұндай интегро-дифференциалдық теңдеулерді жүйелерге дифференциалдық және интегралдық теңдеулердің жүйелердің жалпы теориясын пайдаланып шешуге болады.

3-мысал ретінде (2.1) мен (2.2) теңдеулердің сызықтық интегралдық теңдеулерге келтірейік. Ол үшін

деп белгілесек, онда (2.1) теңдеуінен І-ретті сызықтық дифференциалдық теңдеуін аламыз. Оның шешімі

Бұл өрнекке -тің мәнін қойсақ,

Мұнда

белгілеулер енгізсек, онда біз Вольтерраның 2-текті сызықтық

теңдеуін аламыз. Осы әдіспен (2.1) теңдеуін Фредгольмнің 2-текті сызықтық интегралдық теңдеуіне келтіруге болады.

**Ұсынылатын әдебиеттер**

1. Орынбасаров, Ш. Сақаев Интегралдық теңдеулер. Алматы «Білім» 1994.

2. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения М.

3. КрасновМ.Л., МакаренкоГ.И. Операционное исчисление. Устойчивость движения. Наука. 1964.

4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М. 1975.

5. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. М.1981.

6. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М. 1959.

7. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Гостехиздат. 1947

**№14 дәріс**

**Дифференциалдық теңдеулер мен интегралдық теңдеулер арасындағы байланыстар**

**Жоспар**

*1.Дифференциалдық теңдеулер мен интегралдық теңдеулер арасындағы байланыс.*

*2. Қысып бейнелеу әдісі*

*1. Дифференциалдық теңдеулер мен интегралдық теңдеулер арасындағы байланыс.*

Жай дифференциалдық теңдеу үшін қойылған Коши есебінің шешілуі Вольтерраның интегралдық теңдеуіне келтіріледі. І-ретті кәдімгі дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы шарт берілсін. функциясы осы Коши есебінің шешімі делік. Оны теңдеуге қойып, алынған тепе-тендікті ден дейін интегралдап,

интегралдық теңдеуін аламыз. Мұның шешімі функциясы берілген есептің де шешімі екенін тексеру қиын емес.

Коэффициенттері үзіліссіз функциялар болатын n-ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебін шешу де ІІ-текті Вольтерраның интегралдық теңдеуін шешуге келтіріледі. Бұл жағдайда мына ІІ-ретті теңдеу үшін қарастырамыз :

Теңдеу үшін , бастапқы шарттары берілсін. Бұл есепте деп белгілеп, одан кейін тендікті бастапқы шарттарды пайдаланып интегралдау

нәтижесінде теңдеуін аламыз. Ал соңғы өрнектерді пайдаланып берілген теңдеуден

Вольтерраның ІІ-текті интегралдық теңдеуін аламыз, мұндағы

2. теңдеуін шекаралық шарттарымен қоса қарастырайық. Жай дифференциалдық теңдеулер курсында бұлесеп Грин функциясы арқылы шешіледі. Егер теңдеудің оң жағы түрінде белгісіз функциясына тәуелді күрделі функция болса, онда соңғы өрнектен

интегралдық теңдеуі шығады.

1. Кейбір жағдайда интегралдық теңдеуді дифференциалдық теңдеуге келтіріп шешуге болады. Берілген

теңдеуін екі рет дифференциалдасақ,

Өрнектерін аламыз. Бұлардан ІІ-ретті дифференциалдық теңдеуі шығады. Жоғарыдағы өрнектерден бастапқы шарттары алынады. Демек, интегралдық теңдеуді шешу мәселесі ІІ-ретті дифференциалдық теңдеудішешудің Коши есебінекелтірілді.

Параметр –ға тәуелді

Дифференциалдық теңдеуі шарттарын қанағаттандыратын шекаралық есепті интегралдық теңдеуге келтірейік. Ол үшін теңдеуінің берілген шекаралық шарттарды қанағаттандыратын Грин функциясын құрайық. Бұл теңдеудің сызықтық тәуелсіз шешімдері . Сондықтан Грин функциясын келесі түрде іздейміз:

Мұндағы белгісіз функциялар. Грин функциясының шарттарын пайдалансақ, онда бұл функцияларды төмендегі теңдеулер жүйесімен анықтаймыз:

Осы жүйені шешіп екенін анықтаймыз. Демек,

енді осы өрнекпен анықталған Грин функциясын пайдаланып, берілген дифференциалдық теңдеудің берілген шекаралық шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу үшін

интегралдық теңдеуін аламыз.

*2. Қысып бейнелеу әдісі*

Алгебралық, дифференциалдық, интегралдық және функционалдық теңдеулердің шешімдері бар және олар жалғыз болуын дәлелдеуге біртіндеп жуықтау әдісі, яғни қысып бейнелеу әдісі қолданылады. Қысып бейнелеу әдісінің мазмұнын төмендегі тұжырымнан білуге болады.

**І-теорема** (Банах). Толық метрикалық кеңістігінің кез келген элементін сол кеңістіктің өзіне бейнелейтін операторы берілсін: яғни. Оның үстіне элементтері

теңсіздігін қанағаттандырсын (мұндағы саны пен элементтеріне тәуелсіз және ). Сонда кеңістігінде жалғыз ғана элементі табылып, ол

теңдеуін қанағаттандырады.

(2.1) теңсіздігін қанағаттандыратын операторын қысу операторы деп, ал (2.2) теңдеуін қанағаттандыратын нүктесін операторының қозғалмайтын нүктесі деп атайды.

**Дәлелдеуі**. элемент алып, мынадай тізбек құрайық:

Осы тізбегінің фундаментальдық өзіне жинақты екенін көрсетейік. Алдымен

екенін байқаймыз. Егер үшбұрыштар теңсіздігін пайдалансақ,

Осыдан болғандықтан

Соңғы теңсіздіктен үшін . Демек, тізбегі фундаментальдық тізбек. кеңістігінің толықтығынан тізбегінің шегі болады:

Енді екенін көрсетейік. Расында

Элементі болғандықтан, санына номері табылып,

болады. Демек, . Мұндағы кезкелген сан болғандықтан

яғни теңдігі орынды.

Қысу операторының қозғалмайтын нүктесінің жалғыз екенін дәлелдейік. Ондай нүктелер екеу (және), яғни теңдіктері орындалады деп ұйғарайық. Ол жағдайда . Егер болса, онда болады. Бұл теорема шартына қайшы, демек, , яғни .

Ескерту. (2.3) теңсіздіктен жағдайда жуық шешімдегі қателік

шартымен анықталады. Бұл теңсіздік екінші жағынан тізбектіні жинақтылық жылдамдығын көрсетеді.

**Ұсынылатын әдебиеттер**

1. Орынбасаров, Ш. Сақаев Интегралдық теңдеулер. Алматы «Білім» 1994.

2. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения М.

3. КрасновМ.Л., МакаренкоГ.И. Операционное исчисление. Устойчивость движения. Наука. 1964.

4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М. 1975.

5. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. М.1981.

6. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М. 1959.

7. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Гостехиздат. 1947

**№15 дәріс**

**Тақырыбы:Қысып бейнелеу әдісін Фредгольмнің интегралдық теңдеуіне қолдану**

**Жоспар**

*1. Фредгольмнің біртекті емес теңдеуінің шешімі бар және шешімнің жалғыз екенін дәлелдеу.*

*2. Қайталанған ядролар және резольвента.*

*3. Интегралдық теңдеулер жүйесі.*

*1. Фредгольмнің біртекті емес теңдеуінің шешімі бар және шешімнің жалғыз екенін дәлелдеу.*

Интегралдық теңдеудің ядросы үзіліссіз функция болсын. Фредгольмнің біртекті емес

теңдеуінің шешімі бар және шешімнің жалғыз екенін дәлелдеуге қысып бейнелеу әдісін қолданайық. ядросы облысында үзіліссіз болғандықтан, шенелген, яғни,. Ал бос мүше - (1.1) интегралдық теңдеу шешімін класынан іздейміз. Операторды

деп белгілейік.

**1-лемма**. интегралдық операторы толық және кеңістігін сол кеңістіктің өзіне бейнелейді.

**Дәлелдеуі**. және деп белгілейік, болсын. Ол кезде

және болғандықтан үшін саны табылып, болғанда теңсіздіктері орындалады. Егер осы теңсіздіктерді алдыңғы өрнектің оң жағына пайдалансақ,

екенін көреміз, яғни функциясы кесіндісінің кезкелген нүктесінде үзіліссіз. Демек операторы кезкелген функциясын тағыда сол кеңістіктегі үзіліссіз функцияға бейнелейді екен.

Енді қысу операторы болатын шартты анықтайық.

Міне бұдан

шарты орындалғанда қысу операторы болғанын көреміз. Жоғарыда дәлелденген қысып бейнелеу әдісінен, егер саны осы теңсіздікті қанағаттандырса, онда (1.1) теңдеуінің бір ғана үзіліссіз шешімі болады. Ол шешімге жуықтайтын функциялар тізбегі

рекуррентті теңдіктермен анықталады, мұндағы функциясы кесіндісінде анықталған кез келген үзіліссіз функция.

Мысал. Біртіндеп жуықтау әдісімен

интегралдық теңдеуін шешу керек.

Шешуі. Нольдік жуықтау ретінде бос мүшені, яғни

деп алсақ, онда

Бұл табылған жуық шешімдер тізбегін параметрі шартын қанағаттандырса, ақырлы шекке ие болады. Ол шек

берілген интегралдық теңдеудің шешімі болады.

*2. Қайталанған ядролар және резольвента.* Әдетте жуықтау формуласында бастапқы жуықтау ретінде бос мүше функциясын қабылдайды, яғни   
. Сонда рекуррентті формуладан жуықтау тізбегінің мүшелері мынадай теңдіктермен анықталады:

мұнда бірлік оператор,

, ал операторы - -ның дәрежесі.

операторы дәрежелерін ядросы арқылы өрнектеп көрейік. Анықтама бойынша

Егер

деп белгілесек, онда

сол сияқты

Егер

деп белгілесек, онда

Жалпы жағдайда, математикалық индукция заңымен

операторымен теңдігін анықтауға болады. Мұнда

(2.1) формуласымен анықталған функциясы қайталанған ядро немесе ядроның интеграциясы деп аталады. Келешекте деп қабылдаймыз. Оператор үшін белгілі теңдігінен қайталанған ядролар үшін орындалатын

теңдігін алуға болады. Ескерте кетейік, егер облысында ядросы үзіліссіз функция болса, онда барлық қайталанған ядролар да облысында үзіліссіз функциялар болатыны көрініп тұр.

Қарастырып отырған Фредгольм теңдеуінің шешімі

Болғандықтан

формуласын аламыз. (2.2) теңдеуінің оң жағында тұрған қатардың  
 шарты орындалғанда бірқалыпты жинақты болатынына көз жеткізу қиын емес. Әдетте оны Нейман қатары деп атайды. Жоғарыда алынған тұжырымдардың қорытындысы келесі тұжырым болады.

**2-теорема**. Егер

болса, онда кезкелген ІІ-текті Фредгольмнің теңдеуінің кеңістігінде жататын жалғыз шешімі бар болады және ол шешім (2.2) формуласымен өрнектеледі. Яғни дөңгелегінің ішінде операторына шенелген кері оператор формуласымен анықталады.

Шынында,

Енді

функционалдық қатарын қарастырайық. Егерде болса, онда бұл қатар облысында бірқалыпты жинақты. Осы қатардың қосындысын

ядроның резольвентасы немесе шешетін ядросы деп аталады. Резольвента бірқалыпты жинақталатын функциялық қатардың қосындысы болғандықтан, аргументтері бойынша үзіліссіз де, ал аргументі бойынша ­­ облысында аналитикалық функция екені айқын. Егер (2.3) теңдігінің екі жағын да функциясына көбейтіп, бойынша мен аралығында интеграл алсақ, онда

теңдігін аламыз. Енді (2.2) мен (2.4) теңдіктерін салыстырсақ,

формуласы шығады. Егер бос мүше болса, онда (2.5) формуласымен анықталатын .

**3-теорема**. Егер алдыңғы теореманың шарттары орындалса, онда (2.1) теңдеуінің шешімі (2.5) формуласымен анықталады.

**І-ескерту**. (2.5) формуласыпараметірінің өте кішкене мәндерінде ғана орындалатынын дәлелдедік, келешекте (2.5) формуласы параметірінің үлкен мәндерінде орындалатыны көрсетіледі. (2.5) формуласы -ның кез келген мәндерінде орындалатындай ядролар да бар. Мысалы, егер ядро өзіне-өзі ортогональ, яғни

болса, онда жалпы Бұл жағдайда

-ға тәуелді емес.

**2-ескерту**. интегралдық теңдеулері

қанағаттандырады. Бұның дұрыстығы (2.1) мен (2.3) формулаларын пайдаланып дәлелдеуге болады.

**Мысалдар**. І.Фредгольмнің ІІ-текті интегралдық теңдеуі үшін

ядросының қайталанған ядроларын табу керек.

Шешуі.

2. Резольвентаны пайдаланып интегралдық теңдеуді шешу керек:

Шешуі. Алдымен ядросы резольвентасын табайық:

Олайболса,

немесе болса, онда

Демек, берілген интегралдық теңдеудің шешімі

3. Енді (1.1) теңдеуді кеңістігінде қарастырайық.

Біз кеңістігінің метрикасын

формуласымен анықталатынын білеміз. кеңістігінде -ға қарағанда параметр -ның үлкен мәндерінде шешімінің бар екенін көрсетуге болады.

**2-лемма**.Егер ядро болса, онда операторы

Дәлелдеуі.нүктесі берілсін. ядросы үзіліссіз функция болғандықтан кез келген саны үшін сәйкес саны табылып: . Сондықтан, Коши-Буняковский теңсіздігін

яғни функциясы нүктесінде үзіліссіз, кез келген нүкте болғандықтан функциясы -да үзіліссіз. Осыдан, егер және болса, (1.1) теңдеуінің оң жағы кезкелген үшін, үзіліссіз функция екендігі шығады. Яғни сол жағында тұрған . Демек кеңістігінде жататын функциялар ішінен тек үзіліссіз функциялар ғана шешім болады деген қорытынды шығады. Дәлелдеген лемма бойынша

**3-лемма.** Егер

деп белгілесек, онда операторы параметрдің мәндерінде қысу операторы болады. Шынында да,

болғандықтан, Коши-Буняковский теңсіздігін пайдаланып,

теңсіздігін аламыз. Енді екі жағында бойынша мен аралығын интегралдасақ

немесе

теңсіздігі шығады. Осыдан

(2.6) теңсіздігінен оператор болғанда ғана қысу операторы болады.

Қысып бейнелеу принципінен (1.1) теңдеуінің жалғыз ғана шешімі болуы үшін теңсіздігі орындалуы керек. Расында болғандықтан облысының облысынан кең екені шығады. Бірақ облысында жуықтайтын тізбек интегралдық теңдеудің шешіміне бірқалыпты жинақты да, ал облысында бұл тізбек орташа жинақталатынын айтуға болады.

4. болсын. Сонда келесі тұжырым орынды.

**4-лемма**. Егер

Интегралындағы болса, онда ол интеграл интервалының барлық нүктелерінде дерлік бар және болады.

**Дәлелдеуі**. теңсіздігі әрқашан орынды. (2.6) теңсіздігінің оң жағының бірінші қосылғышы айнымалысы бойынша барлық үшін дерлік, ал екінші қосылғыш кесіндісінде бойынша интегралданады. Міне, бұдан функциясы барлық үшін дерлік айнымалысы бойынша интегралданады, яғни,

интегралы барлық жағдайда дерлік анықталған. Коши-Буняковский теңсіздігі бойынша

қатысыорынды, ал бұдан

яғни, екені шығады. Демек лемма дәлелденді, яғни,

**5-лемма.**Фредгольмдік операторлардың көбейтіндісі де Фредгольмдік оператор болады.

**Дәлелдеуі**. болсын. Бұлардан

Әрине, бұл өрнектің оң жағындағы болса, онда теңдіктегі қайталанған интегралдар анықталады. Олай болса, Фубини теоремасы бойынша

Егер

деп белгілесек, онда

Егер екенін көрсетейік. Коши-Буняковский теңсіздігі бойынша

теңсіздігі орынды. Бұл теңсіздіктің екі жағынтөртбұрышы бойынша интегралдап,

демек, M. Олай болса, операторы Фредгольмдік оператор болады.

**3-ескерту**. Жалпы жағдайда Фредгольмдік операторларды көбейту амалында орынауыстыру заңы әрқашан орынды бола бермейді. Мәселен,

болсын. Сонда

**4-ескерту**. Егер болса, онда (2.8) өрнегіндегі M болады. Расында, егер

деп белгілесек (мұндағы қайталанған ядро), онда

Жоғарыдағы (2.9) теңсіздігін үшін пайдалансақ,

ал бұдан немесе

Сондықтан (2.7) теңсіздігін ескеріп,

шартын аламыз.

Егер орындалса, онда 4-ескерту бойынша ол ядроның қайталанған ядросы да сол шартты қанағаттандырады.

Егер

деп белгілесек, онда

Ал

болғандықтан соңғы теңсіздіктен

және

теңсіздігі шығады.

**4-теорема**. Егер

Фредгольм теңдеуіндегі және болса, онда ол теңдеу үшін түзілген Нейман қатары теңдеудің шешіміне орташа жинақты.

**Дәлелдеуі.**

қатар үшін үшбұрыштар теңсіздігі пайдаланып, мынаны аламыз:

Егер *n* саны жеткілікті дәрежеде үлкен болса, онда теңсіздіктің оң жағы өте аз шама болады. Демек, қалдық мүшесі

болған қатар жинақты, олайболса, жоғарыдағы Фредгольм теңдеуі үшін алынған Нейман қатары итегралданатын функциясына жинақты. Сонымен Енді шектік функция Фредгольм теңдеуін қанағаттандыратынын көрсетейік. Ол үшін екенін, яғни орташа жинақты екенін көрсетсек, жеткілікті. Бұл оңай дәлелденеді, себебі жағдайда

**5-теорема**. Егер шартына қосымша шарты да орындалса, онда Нейман қатары кесіндісінде бірқалыпты жинақты болады.

**Дәлелдеуі:** Нейман қатарының жалпы мүшесін бағалайық:

Егер (2.11) теңсіздігін пайдалансақ,

теңсіздігі шығады, оның оң жағындағы еселігі болатын геометриялық прогрессияның жалпы мүшесі. Вейерштрасс теоремасы бойынша жалпы мүшесі осындай қасиетке ие қатар бірқалыпты жинақты. Теорема дәлелденді.

**5.**Енді көпөлшемді интегралдық теңдеулерге жоғарыдағы келтірілген теорияларды қолданайық. Көпөлшемді Фредгольм теңдеуіне де қысыпбейнелеу әдісі орынды.

Теңдеуінде шенелген немесе -дегі шенелмеген облыс,

ал оның ядросы облысында үзіліссіз немесе

, яғни

болсын. Жоғарыдағы шенелгендік шарты көп аргументті функция үшін

түрінде жазылады. (2.12) теңдеудің ядросы соңғы екі шартты қанағаттандырса, теңдеу үшін жоғарыдағы тұжырымдар орынды екенін дәлелдеу қиын емес.

Егер болса, онда (2.12) теңдеу біртіндеп жуықтау әдісімен шешіледі және оның шешімі жалғыз болады. Бұл әдістегі қайталанушы ядролар

өрнектерімен анықталады да теңдеудің шешімі

түрінде табылады, мұндағы ядросының резольвентасы:

.

Егер шектелген облыс болса, бұл қатар болғанда бірқалыпты жинақты, ал үзіліссіз функциялық қатардың шегі ретінде үзіліссіз функция.

*3. Интегралдық теңдеулер жүйесі.*

Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеулер жүйесі

түрінде болады. Бұл жүйенің ядролары ал бос мүшелері болсын. Осы жүйенің шешімі болатын функциялары кеңістігінен ізделеді. Бұл теңдеулер жүйесі үшін жоғарыдағы тұжырымдар толық түрде орынды. Ал теңсіздігіндегі үшін

және ядролары үшін

шарттар орындалса, онда (3.1) жүйе біртіндеп жуықтау әдісі арқылы шешіледі. Ол жуықтап шешу процесі бірқалыпты жинақты. Бұған біз толық тоқталмаймыз, себебі жүйені Фредгольмнің 2-текті бір теңдеуіне келтіруге болады. Бірақ ол теңдеу тек бір интервал үшін емес, одан *m* есе кең облыста қарастырылады.

аралығында пен функцияларын

болғанда

түрінде анықтап, ал ядросын облысында

Болғанда

арқылы өрнектеп, (3.1) теңдеулер жүйесін

жазсақ, онда біз құрған ядросы -де интегралданады, ал

болады. Шынында да,

Дәл осылай

**Ұсынылатын әдебиеттер**

1. Орынбасаров, Ш. Сақаев Интегралдық теңдеулер. Алматы «Білім» 1994.

2. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения М.

3. КрасновМ.Л., МакаренкоГ.И. Операционное исчисление. Устойчивость движения. Наука. 1964.

4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М. 1975.

5. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. М.1981.

6. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М. 1959.

7. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Гостехиздат. 1947