№1 лекция

Анықтамалар және негізгі ұғымдар. Бірінші ретті теңдеудің шешімінің геометриялық және физикалық мағынасы. Изоклиналар. Коши есебі

Айнымалылары бөлектенетін дифференциалдық теңдеулер

**Жоспар.**

1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің нормаль түрі.
2. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің геометриялық мағынасы. Интегралдық қисықтар.
3. Коши есебі. Жалпы шешу. Дербес шешу. Жалпы интеграл. Ерекше шешу
4. Айнымалылары бөлектенетін теңдеу.
5. Айнымалылары бөлектенген теңдеуді интегралдау үшін не істейсің.
6. Теңдеудің ерекше шешіміне күдікті шешуін табу. Шешімнің күдікті болмай ерекше болатыны.

Лекция мазмұны.

Координаттары  белгіленген декарттық тікбұрышты жүйесінің евклид жазықтығын  арқылы таңбалайық, ал  және   облысында берілген кейбір үзіліссіз функция болсын.

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді оқуды туындысы арқылы айқындалған

 (1)

теңдеуінен бастайық. Мұнда тәуелсіз айнымалы (яғни аргумент), ал тің белгісіз функциясы.

**1-Анықтама.** Тәуелсіз айнымалы , белгісіз функция және оның бірінші ретті туындысы  немесе ті байла-ныстырып тұратын қатынасты **бірінші ретті дифференциалдық теңдеу** деп атайды.

***Мысалы: ***



**2-Анықтама.** Егер дифференциалдық теңдеудегі белгісіз функция бір ғана тәуелсіз айнымалының функциясы болса, онда оны **жай дифференциалдық теңдеу** деп атайды.

Бұл тарауда негізінен бірінші ретті жай дифференциалдық теңдеулерді қарастырамыз. Оның жалпы түрі былайша жазылады:

 (2)

(1) теңдеуді **туындысы арқылы айқындалған не бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің нормаль түрі** деп атайды.

(2) теңдеудің шешуі жөнінде түсінік берейік:

Декарттық координаты  болатын  сандық түзудің кейбір аралығы  болсын.

**3-Анықтама.**  аралығында анықталған  функциясы **(1) теңдеудің шешуі** деп аталады, егер

1)  те

2) барлық  үшін 

3)  аралығында

.

Енді бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің симметриялық деп аталатын түріне тоқтала кетейік. (1) теңдеуді қарастырайық.



 (3)

(3) бірінші ретті теңдеудің симметриялық түрі деп аталады, бұдан тиісті операциялар арқылы (1) теңдеуді алуға болады.

**Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің геометриялық мағынасы. Интегралдық қисықтар**

(1) теңдеудің  түріндегі шешуін табудың ылғи да сәті түсе бермейді, көпшілік жағдайда  түрінде айқындалмаған болып келеді. Жалпы (1) теңдеуді шешуін табу процесін оны интегралдау деп те атайды, (1) теңдеу шешуінің  облысындағы сәйкес қисығының графигі интегралдық қисықтар деп аталады.  жазықтықтағы тікбұрышты координаттар болсын. Онда, жоғарыда айтылғандай, (1) теңдеудің  шешуінің графигі ретінде оған бір қисық сәйкес келеді. Осы қисықты бұдан әрі интегралдық қисық деп атаймыз. Кейде осы интегралдық қисықтың өзін шешу деп қарастыруға болады. (1) теңдеудің сол жағы  осінің оң бағытымен  қисығына  нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың арасындағы бұрыштың тангенсі болатыны белгілі. Сондықтан  сияқты кезкелген нүктеде  облысында (1) теңдеу белгілі бір бағыт береді, яғни координаттары  әр нүктеде салынған векторлар пайда болады. Осы әр нүктеден салынған векторлар өріс бағытын береді (1-сызба). Бұл бағыт кезкелген  нүктесінде  теңдеуі арқылы анықталады.

*y*

G

*(x, y)*

*(x, y)*

γ

*х*

0

(1-сызба).

Осы қасиеті арқылы интегралдық қисықтарды басқа толып жатқан қисықтардан ажыратып алуға болады (жазықтықтағы нүкте арқылы шексіз көп қисықтар жүргізуге болатынын ұмытпаңыз).

**Анықтама.** Егер интегралдық қисықтың әрбір нүктесінде (1) теңдеумен анықталатын өрістің көлбеу бағыты әрқашанда бірдей болса, онда оны **изоклина** деп атайды.

Изоклинаның теңдеуі

 (4)

мұнда тұрақты сан,  осімен интегралдық қисыққа жүргізілген жанама арасындағы бұрыш. Яғни (1) теңдеу өріс бағыттарының изоклинасы  облысының барлық нүктесінде өріс бағыттары бірдей  бұрыштық коэффициентіне тең қисықты айтады. Изоклина (1) теңдеу шешуін аналитикалық түрде таппай-ақ, оның интегралдық қисығының бейнесін алуға мүмкіндік береді.

***Мысалы:*** Изоклина арқылы ****** теңдеуінің интегралдық қисықтарын жуықтап салу керек. Изоклина теңдеуі ****** егер  болса, онда    Бұлардың барлығы өзара параллель түзулер. Берілген теңдеудің екінші туындысын тауып, оны экстремумға зерттегенде, экстремум нүктелерінің жоқ екенін білеміз. Енді өрістердің бағыты қандай болар еді.



Осы зерттеулер берілген теңдеу интегралдық қисықтарын жуықтап салуға мүмкіндік береді (2-сызба).

*0*

*y*

*k=-1*

*k=0*

*k=+1*

*y=2x+1*

*y=2x*

*y=2x-1*

*x*

*y=2x-2*

2-сызба

Өз бетімен шығаруға есептер

Изоклина әдісімен келесі дифференциалдық теңдеулердің интегралдық қисықтарының бейнесін сал.

******

***Ескерту:*** Дифференциалдық теңдеуді интегралдауды дифференциалдауға кері есеп деп қарастыруға болады. Мәселен, интегралдық есептеулерде берілген  функциясының анықталмаған интегралы (алғашқы функциясы) табылады. Мұны теңдеу арқылы былай жазуға болады; егер алғашқы функцияны  арқылы таңбалайтын болсақ  немесе

. (5)

, (6)

мұндағы -кез келген тұрақты. (6) теңдіктен белгісіз функция  бірмәнді болмайтындығы шығады, ал бұл (5) дифференциалдық теңдеудің шексіз көп шешуі болатынын көрсетеді. Егер шешуде  кез келген тұрақты болса, оны жалпы шешу деп атайды. Ал -ға белгілі бір мән берсек дербес шешу шығады. Практика жүзінде (5) теңдеудің шексіз көп шешулерінің бәрін қарастырудың қажеті болмайды, көпшілік жағдайда дербес деп аталатын шешулер қарастырылады.

**Коши есебі**

(1) теңдеу үшін Коши есебі былай қойылады:

(1) теңдеудің толып жатқан барлық шешулерінің ішінен берілген  сан мәні бойынша функцияның өзі  сан мәнін алатындай

 (7)

шешуін табу қажет, яғни

 , (8)

мұндағы  және  бастапқы берілгендер, ал (8) бастапқы шарт деп аталады. Коши есебін геометриялық тұрғыдан былай өрнектейміз: (1) теңдеудің толып жатқан барлық интегралдық қисықтарының ішінен жазықтықта берілген  арқылы өтетінін табу керек (3-сызба).

Егер  саны бар болып, осы сан үшін  аралығында  болатындай  шешуі анықталса, онда Коши есебінің тек бір ғана шешуі болады, басқа шешуі болуы мүмкін емес.

Егер Коши есебінің бір ғана емес бірнеше шешуі болса, онда  нүктесінде жалғыз ғана шешуінің бар болуы бұзылады деп есептеледі.

*y*

*x*

0

*M0(x0,y0)*

*G*

3-сызба

**Жалпы шешу. Дербес шешу. Жалпы интеграл**

(1) теңдеудің шексіз көп шешулерінің  тұрақтыға байланысты болатын

 (9)

шешуі **жалпы шешу** деп аталады. Бұл геометриялық тұрғыдан  жазықтығында интегралдық қисықтар тобын өрнектейді. Осы жалпы шешуден бастапқы берілгендер  арқылы Коши есебінің шешуін алуға болады. (9) теңдікке  мәндерін қоямыз.

 (10)

(10) теңдікті (9) теңдікке қойып Коши түріндегі дербес шешуді алуға болады.  немесе

 (11)

***Мысал:*** Теңдеудің жалпы шешуі ****** болсын.  нүктесіне сәйкес Коши түріндегі шешуін тап.



******-Коши түріндегі шешу (дербес шешу). Бұл геометриялық тұрғыдан  нүктесі арқылы өтетін жалғыз ғана интегралдық қисықты көрсетеді (4-сызба).

*y*



-1

0

*x*

4-сызба

Егер (1) теңдеудің шешуі арқылы айқындалмаған

 (12)

түрінде алынса, оны жалпы интеграл деп айтады. (12) теңдіктен

 (13)

алынса, ол канондық түрдегі жалпы интеграл деп аталады. Канондық жалпы интегралдың негізгі бір қасиеті: егер -тің орнына теңдеудің кез келген бір дербес шешуін қойсақ, (13)-тің оң жағы әрқашанда тұрақты шама береді. Мәселен, 

**Ерекше шешу**

Коши есебінің жалғыздық шарты бұзылатын әрбір нүктедегі шешу ерекше шешу деп аталады. Геометриялық тұрғыдан ерекше шешу теңдеу шешулерінің интегралдық қисықтар тобының құрамында болмайды, сондықтан да теңдеу жалпы шешуінің бар болатын облысында жатпайды.

Айнымалылары бөлектенетін дифференциалдық теңдеулер

Айнымалылары бөлектенетін теңдеулер (3) симметриялық түріндегі теңдеуге ұқсас.

 (14)

 тің берілген үзіліссіз функциялары,  тің берілген үзіліссіз функциялары, айнымалылары бөлектенетін теңдеу деп аталады. Мұнда  облысында (14) теңдеудің ерекше нүктелері болмайды деп алынады. Егер

 болатын  табылса, онда  (14) теңдеудің шешуі болар еді, осыған ұқсас  болатын  табылса, онда  (14) теңдеудің шешуі болады.

Егерде  және  болса,  нүктесінің аймағында (14) теңдеу мына төмендегі теңдеумен пара – пар болар еді, себебі екі теңдеудің де шешулерінің жиыны бірдей.

 (15)

Бұл айнымалылары бөлектенген теңдеу. Практика жүзінде (14) теңдеудің екі жағын  өрнегіне бөліп (14) теңдеуден алуға болады. (15) интегралдау арқылы

 (16)

жалпы интегралын табамыз.  . (16) – да  және ,  (біруақытта нольге тең емес) деп алып  бастапқы берілгендерге сәйкес шешуін аламыз.

 (17)

***Мысал: *** теңдеуін интегралдау керек. Теңдеудің екі жағын ****** өрнегіне бөлеміз. ****** айнымалылары бөлектенген теңдеу. Интегралдап жалпы шешуін табамыз. Сонда ******, . Мұнда мына шешулер

 

ерекше шешулер, себебі тұрақты шама -ның қандайда мәні болмасын оларды жалпы шешуден алуға болмайды. Бұл жағдайда Коши есебінің жалғыздық шарты бұзылады.

***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

**№2 лекция**

**Біртекті теңдеулер. Біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеулер. Бірінші ретті теңдеудің симметриялық түрі**

**Жоспар.**

1. 1 -ретті теңдеудің симметриялық түрі.
2. Біртекті теңдеулер. Біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеулер түрлері және оларды шешу .
3. Жалпыланған біртекті теңдеу және оны интегралдау.

Лекция мазмұны.

Енді біртекті теңдеулердің кейбір қасиеттері қолданылатын сызықтық деп аталатын теңдеулерді қарастырайық.



теңдеуі берілсін. Бұдан  шығады. Екі жағын  функциясына көбейтейік, сонда



алсақ келесі теңдеу шығады.

 (18)

осы теңдеу **бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің симметриялық түрі** деп аталады.

**1-Анықтама.**  функциялары ** өлшемді біртекті функция** деп аталады, егер барлық  үшін

, (19)

мұнда  деп алсақ,



немесе

 (20)

**2-Анықтама.** Егер (18) теңдеуде  функциялары бірдей  өлшемдес болса, онда ол теңдеу **біртекті дифференциалдық теңдеу** деп аталады. (18) теңдеуге (20) қолдансақ:



 (21)

Егер (18) теңдеу (21) түріне келтірілсе , онда ол біртекті теңдеу . Біртекті теңдеуді интегралдау үшін

 (22)

ауыстыруын қолданайық, мұнда  тің белгісіз жаңа функциясы, бұдан

 (23)

(22), (23)-ті (18) – ге қойсақ:



(20) – ға сүйенсек 

 (24)

айнымалылары бөлектенетін теңдеу.

; 

Егер  деп алсақ, онда

 немесе  (25)

жалпы интеграл

**Ерекше шешу:** Айнымалылары бөлектенетін теңдеу алу үшін (24) – ті  өрнегіне бөлгенде  теңдеуінің  түбірін жоғалтар едік. Сондықтан  () бас нүктеге жақындап келетін жартылай түзулер ерекше шешуге күдікті шешу. Егер  (21) теңдеудің жалпы шешуінің құрамында болса, ерекше шешу емес, ал егер болмаса-ерекше шешу. Қандайда болмасын шешуі болу үшін теңдеуді тепе-теңдікке айналдыру қажет.

***Ескерту:*** Біртекті теңдеу интегралдық қисықтарының өзіне тән бір қасиеттері бар. Мұны көрсету үшін (21) теңдеуді алайық. Бұл теңдеудің оң жағы бас нүктеден шығатын  () жартылай түзулердің барлық нүктелерінде тұрақты мәндер қабылдайды. Сондықтан олар (21) теңдеудің изоклинасы болады. Жартылай түзулерден басқа бас нүктеден шығатын интегралдық қисықты алып, оның барлық нүктелердегі радиус-векторларын бірнеше есе көбейтсек немесе азайтсақ, жанамаларының бағыты алынған қисықпен бірдей болар еді. Демек осылайша алынған қисық (21) теңдеудің интегралдық қисығы.

***Мысал: ***

****

біртекті теңдеу.  ауыстыруын қолданамыз. Бұдан . Теңдеуге қойсақ

;

-ке бөлсек





немесе - осін жанап, бас нүкте арқылы өтетін дөңгелектер тобы.   түбірі, олай болса  ерекше шешу.

**3. Біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеулер**

 (26)

теңдеуі берілсін. Егер  болса, онда (26) біртекті теңдеу, сондықтан  және  нольге тең емес деп алынады. Мына төмендегі екі жағдайды қарастырайық.

* 1.  яғни коэффициенттері пропорционал емес. Жазықтықта  түзулерін қарастырайық.

Егер түзудің қиылысу нүктесі  болса, онда

 (27)

(27)-ні  бойынша дифференциалдасақ, яғни

 (28)

(27) және (28)-ді (26)-ға қойсақ



Біртекті теңдеу шығады.

* 1. яғни коэффициенттері пропорционал.



Демек, жазықтықтағы түзулер өзара параллель, cондықтан 

Ендеше (26) теңдеу



түріне келтіріледі де,  (29) сызықтық ауыстыруы арқылы одан айнымалылары бөлектенетін теңдеу аламыз.

Жоғарыдағы жағдайларды өзбеттеріңізбен дәлелдеңіздер.

***Ескерту:*** (21) теңдеу үшін  кез келген тұрақты, түрлендіру тобы қолданылады, өйткені



Бұл ұқсастық центрі координаттар жүйесінің бас нүктесінде болатын ұқсастық түрлендіру. Демек, бас нүкте арқылы өтетін әр түзулерінде жанама мен өріс бағыттары бірдей, сондықтан бұл түзулер изоклина болады.

**4. Жалпыланған біртекті теңдеулер**

 (30)

теңдеуі берілсін.

**1-Анықтама.** Егер  аргументтерін сәйкес -өлшемдес деп алғанда, (30) теңдеудің сол жағы біртекті функция болса, онда ол **жалпыланған біртекті теңдеу** деп аталады, яғни

 (31)

орынды.

Жалпыланған біртекті (30) теңдеуді интегралдау үшін

 (32)

ауыстыруын қолданамыз, мұнда  жаңа тәуелсіз айнымалы, ал  жаңа белгісіз функция.

 (33)

(32)-нің екіншісін  бойынша дифференциалдап орнына қойсақ

 (34)

шығады. (30) теңдеуден

 (35)

Біртекті қасиетін еске алсақ



немесе

 (36)

теңдеуі шығады. Бұл  теңдеуі сияқты.

Егер  арқылы айқындалса, оңай интегралданады. Басқа жағдайларда параметр енгізу әдісін қолданамыз.

**2-Анықтама.** (18) симметриялық түріндегі 1-ретті дифференциалдық теңдеу жалпыланған біртекті деп аталады, егер бір  саны табылып,  ауыстыруы арқылы (18)  және  ға байланысты біртекті теңдеу болса.

Осыны өзбетіңізбен дәлелдеңіз.

***Ескерту:*** Мына төмендегі жалпы түрдегі

 (37)

қарастырайық.

 болғанда (21) теңдеу шығады. (37) –ні интегралдау үшін

 (38)

ауыстыруы қолданылады.



 (39)

айнымалылары бөлектенген теңдеуге келтірілді.



мұнда  кез келген тұрақты.

***Мысалдар:*** 1) 



біртекті теңдеу.  ауыстыруын пайдаланамыз





-ті қойсақ  жалпы шешімі,  осін жанай, бас нүкте арқылы өтетін дөңгелектер тобы.



 ерекше шешімі.

2) 







,,  біртекті теңдеу  ауыс-тыруын пайдаланамыз.

;  интегралдап,  орнына -ды қойып, ал  және - дың орнына  мәндерін қойсақ  жалпы шешімі шығады.  ерекше шешімі.

3) 



Демек  ауыстыруын пайдаланамыз. Мұны  бойынша дифференциалдап, теңдеудегі  және  орнына қойсақ  айнымалылары бөлектенген теңдеу шығады. Интегралдасақ  жалпы шешуі шығады.

Ерекше шешуге күдікті шешуді іздейік



 ерекше шешу емес, себебі  болғанда, ол жалпы шешуден шығады, ал  ерекше шешу.

***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№3 лекция

1 -ретті сызықтық теңдеулер және оған келтірілетін теңдеулер. Риккати арнайы теңдеуі

**Жоспар.**

1. Сызықтық теңдеу және оның түрлері. Сызықтық теңдеудің жалпы қасиеттері
2. Сызықтық теңдеудің түрлеріне байланысты интегралдау әдістері.
3. Біртекті емес сызықтық теңдеулерді интегралдау әдістері.
4. Біртекті емес сызықтық теңдеу шешімінің құрылымы. Сызықтық біртекті емес теңдеудің дербес шешімін табу.
5. Сызықтық теңдеуге келтірілетін теңдеулер. Оларды интегралдау үшін (сызықтық теңдеуге келтіру үшін) қолданылатын әдістер.

Лекция мазмұны.

**Анықтама.** Егер 1-ретті дифференциалдық теңдеу ізделетін белгісіз функция және оның туындысы  бойынша сызықты болып келсе, оны **сызықтық теңдеу** деп атайды.

Мәселен, 

 деп алып, теңдеудің екі жағын бөлейік, сонда



 (1)

Егер  болса, оны біртекті сызықтық, ал  болса, сызықтық емес 1-ретті теңдеу деп атайды.

Алдымен біртекті сызықтық теңдеуді интегралдайық.

 (2)

Бұдан әрі (2) теңдеуді (1) теңдеуге сәйкес біртекті теңдеу деп атайды, бұл айнымалылары бөлектенетін теңдеу.



 (3)

біртекті теңдеудің жалпы шешімі.

**1. Сызықтық теңдеудің жалпы қасиеттері**

10. Тәуелсіз айнымалы -ті  , мұнда  аралығында анықталған, әрі дифференциалдаланатын -ның функциясы арқылы ауыстырғаннан (1) теңдеудің сызықтық қалпы өзгермейді.

20. Іздеп отырған  функциясын сызықтық түрде



ауыстырғаннан (1) теңдеудің сызықтық қалпы өзгермейді, мұнда  белгісіз -тің жаңа функциясы, ал  (бұл қасиеттердің дұрыстығын өз беттеріңізбен дәлелдеңіздер).

**2. Біртекті емес сызықтық теңдеуді интегралдау**

(1) теңдеуді интегралдаудың негізгі үш әдісі бар:

тұрақтыны варияциалау әдісі (Лагранж әдісі), теңдеудің сол жағын толық туындыға келтіру (Эйлер әдісі) және Бернулли әдісі.

**10 . Тұрақтыны вариациялау әдісі. Лагранж әдісі.**

Бұл әдістің мәнісі мынада: (1) теңдеудің жалпы шешуі оған сәйкес біртекті теңдеудің (3) жалпы шешуі түрінде ізделеді, бірақ  тұрақтының орнына  –те үзіліссіз дифференциалданатын  функциясы алынады, яғни тұрақты шама вариацияланады.

Демек (1) теңдеудің жалпы шешуін

 (4)

түрінде іздейміз.

Енді  тің (1) теңдеуді қанағаттандыратын мәнін табуымыз қажет.

Ол үшін (4) ті  бойынша дифференциалдаймыз.

 (5)

(4) және (5)-ті (1)-ге қойсақ:



 (6)

(6)-ны (4)-ке қойып, теңдеудің жалпы шешімін табамыз, яғни

 (7)

**20. Эйлер әдісі.** Біртекті емес теңдеудің сол жағын толық туындыға келтіру немесе интегралдаушы көбейткіш әдісі.

(1) теңдеудің екі жағын  көбейтсек, сонда

;  интегралдасақ  осыдан

 (8)

(1) теңдеудің жалпы шешуі.

**30. Бернулли әдісі.**

(1) теңдеудің шешуін  (9), мұнда  анықталған, әрі дифференциалданатын функциялар түрінде іздейміз.

(9) ды  бойынша дифференциалдайық

 (10)

(9) және (10) (1) ге қойып және  функциясын

 теңдеуді қанағаттандыратындай етіп алайық, бұдан

 (11)



 интегралдасақ 

 (12)

жалпы шешу.

Біртекті емес сызықтық теңдеу

10Лагранж әдісі (тұрақтыны варияциялау)

20Эйлер әдісі (сол жағын толық туындыға келтіру)

30Бернулли әдісі  арқылы ауыстыру

Жалпы шешуін табу бәрінде *с*-кез келген тұрақты

Схема:

**3. Біртекті емес сызықтық теңдеу шешуінің құрылымы.**

**Теорема:** Егер  (1) теңдеудің бір дербес шешуі болып, ал  оған сәйкес (2) біртекті теңдеудің жалпы шешуі болса, онда (1) теңдеудің жадпы шешуі

 (13)



формуласы арқылы өрнектеледі.

**Нұсқау:** Теореманы дәлелдеу үшін  мұнда  -тің белгісіз жаңа функциясы, ауыстыруын  бойынша дифференциалдап, (1) теңдеуге қоямыз, содан -ті тауып қойсақ (13) шығады.

***Ескерту***: (7)формулада да жақшаны ашсақ:

 (14)

(13) пен (14) ті салыстырсақ

 (15)

шығады. (15) арқылы (1) теңдеудің бір дербес шешуін табамыз.

***Мысалдар:***

1) . Алдымен  біртекті теңдеуді аламыз. Бұл айнымалылары бөлектенетін теңдеу, оның жалпы шешуі:



Берілген (1) біртекті емес сызықтық теңдеудің жалпы шешуін  түрінде іздейміз,  бойынша дифференциалдап, (1) теңдеудің орнына қойсақ,   жалпы шешуі.

Жоғарыдағы теоремаға сәйкес берілген теңдеудің бір дербес шешуі  болады. Осыны (15) формула бойынша тауып көрейік



***Ескерту:*** Егер (1) теңдеудің және дербес шешулері белгілі болса, онда



орынды. Бұдан мүшелеп алып тастасақ, мынау шығады



Демек (2) біртекті теңдеудің жалпы шешуі  болар еді де, (1) біртекті емес теңдеудің жалпы шешуін теорема бойынша

;

**Қорытынды:** Егер теңдеудің  және екі дербес шешуі белгілі болса, онда теңдеудің шешуін квадратурасыз табуға болады екен.

**4. Сызықтық теңдеуге келтірілетін теңдеулер**

**10. Бернулли теңдеуі**

 (16)

мұнда  нольден, бірден басқа кез келген тұрақты сан, түріндегі теңдеу Бернулли теңдеуі деп аталады.

Бұл теңдеуді алғаш рет Яков Бернулли (1695ж) қолданған, ал шешуін тапқан інісі Иван Бернулли.  болғанда (16) теңдеу біртекті емес сызықтық теңдеу, ал  болғанда айнымалылары бөлектенетін теңдеу болатынын көрсету қиын емес. (16) теңдеуді интегралдау үшін, оның екі жақын  бөлейік:

, (17)

мұнда теңдеудің бірінші мүшесі  қасындағы көбейткіштің бір тұрақты коэффицентке ғана айырмашылығы бар туындысы болып тұр. Сондықтан,

 (18)

мұнда -тің жаңа белгісіз функциясы, ауыстыруын қолданған қолайлы. (18) ді  бойынша дифференциалдасақ, сонда

 (19)

(18), (19)-ды (17) ге қойсақ:

 (20)

біртекті емес сызықтық теңдеу.

Демек, жалпы шешуі



Егер (18) еске алсақ

 (21)

(16) Бернулли теңдеуінің жалпы шешуі:

**Ерекше шешу:**  болғанда теңдіктің екі жағын  бөлгенде  шешуін жоғалтуымыз мүмкін, ал  болғанда  теңдеудің шешуі емес.  болғанда  (21) формула бойынша  болғанда шығады, ол дербес шешу, себебі  осінің нүктелері арқылы ешқандай интегралдық қисық өтпейді. Жоғарғы айтылғандарға байланысты  болғанда ғана ерекше шешу болуы мүмкін.

20. Дарбу теңдеуі

, (22)

мұнда  және -өлшемді біртекті, ал -өлшемді біртекті функциялар, түріндегі теңдеуді Дарбу теңдеуі деп аталады.

Егер  болса, онда (22) теңдеу бірден біртекті теңдеу болар еді.

 (23), мұнда  -тің жаңа белгісіз функциясы, ауыстыруы арқылы (22) теңдеуді Бернулли теңдеуіне келтіруге болатындығын көрсетейік:

 (24)

 (25)

Алдымен, (22) теңдеуді біртекті функциялардың қасиетіне сүйеніп мына түрде жазамыз:



(23), (24), (25)-ке сүйеніп былай жазуға болады:



-ге қысқартып,  және  бойынша жинақтасақ



шығады. Теңдеудің екі жағын -ға бөлсек,



немесе

 (26)

Бұл Бернулли теңдеуі, мұнда  ауыстыруы арқылы (26) теңдеуді сызықтық теңдеуге келтіреміз.

Дарбу теңдеуінің ерекше шешуі  болуы мүмкін, мұнда  теңдеуінің түбірі ;

**30. Риккати теңдеуі:**

**Анықтама.** Егер  теңдеуінің оң жағы -ке байланысты квадрат үшмүшелік болса, яғни

 (27)

оны Риккати теңдеуі деп атайды, мұнда  және -те анықталған әрі үзіліссіз -тің функциялары, коэффициенттер.

Егер  болса, онда (27) теңдеу Бернулли теңдеуі, ал  болса біртекті емес сызықтық теңдеу болар еді, сондықтан  қарастырамыз.

**Теорема:** Егер (27) теңдеудің бір дербес шешімі  белгілі болса, оны Бернулли теңдеуіне келтіруге болады.

Дәлелдеу: Айталық (27) теңдеудің  шешімі белгілі болсын, онда

 (28)

орынды.

 (29)

-тің жаңа белгісіз функциясы. (29)-ды (27)-ге қойсақ



(28)-ді еске алсақ,

 (30)

Бернулли теңдеуі шығады.

(30)-ды

 (31)

ауыстыруы арқылы

 (32)

біртекті емес сызықтық теідеуге келтіріледі.

Практика жүзінде (29) және (31)-ді еске алсақ,

 (33)

ауыстыруы (27) теңдеуді бірден сызықтық теңдеуге келтіреді.

***Мысал:*** Рикатти теңдеуі.  дербес шешуі бірден сызықтық теңдеуге келтіру үшін  пайдаланамыз

 орнына қойсақ  біртекті емес сызықтық теңдеу шығады. Осыдан -ды тауып, орнына қойсақ жалпы шешуі  шығады. (өз беттеріңізбен шығарыңыздар). Рикатти теңдеуі жалпы шешуінің құрылымын қарастырайық.

(32) теңдеу шешуінің құрылымы:

 (34)

болатыны белгілі. Мұнда  (32) теңдеудің дербес шешуі, ал  (32) теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешуі.

(33)-ті еске алсақ,



Демек, шешуінің құрылымы кез келген тұрақтыға байланысты бөлшек-сызықтық функция.

***Ескерту:*** 1) Егер Рикатти теңдеуінің екі дербес шешімі белгілі болса, онда оның жалпы шешуі бір ғана квадратура арқылы табылады (бір рет қана интегралданады).

Мәселен, Рикатти теңдеуінің  және дербес шешімдері болса, онда (33) бойынша  ауыстыру формуласы Рикатти теңдеуін сызықтық теңдеуге келтіріледі.

2) Егер Рикатти теңдеуінің үш дербес шешімі болса, ешбір квадратурасыз табылады (интегралдаудың қажеті жоқ). Мәселен, Рикатти теңдеуінің дербес шешімдері  болсын.

Онда  сызықтық теңдеудің шешімі болар еді. Демек,  немесе



Сызықтық теңдеудің жалпы шешуін осы арқылы ешбір квадратурасыз табуға болады.

Енді мына мәселеге тоқталайық.

Алғаш рет 1841 ж. Лиувилль Рикатти теңдеуінің жалпы (27) түріндегі теңдеуі ылғида квадратура арқылы интегралдана бермейтінін көрсеткен.

Сондықтан, Рикатти теңдеуінің практикада көп қолданылатынын еске ала отырып, квадратура арқылы интегралданатын түріне тоқталайық.

Рикатти теңдеуінің квадратура арқылы интегралданатын кейбір қарапайым түрлері:

1)  мұнда -кез келген тұрақтылар, айнымалылары бөлектенетін теңдеу болғандықтан квадратура арқылы интегралданады.

2)  мұнда  кез келген тұрақтылар. Бұлда айнымалылары бөлектенетін теңдеу.

3)  біртекті теңдеу.

4)  немесе 

 мұнда -тің жаңа белгісіз функциясы, ауыстыруы арқылы айнымалылары бөлектенетін теңдеуге келтіріледі.

5)  жалпыланған біртекті теңдеу.

 ауыстыруы арқылы айнымалылары бөлектенетін теңдеуге келтіріледі.

**5. Рикатти арнайы теңдеуі**

 дербес түрін қарастырайық. Мұнда  кез келген сандар. Бұл арнайы деп аталатын теңдеуді Рикаттидің өзі XVIII ғ. қарастырған.

10 Егер  болса,  айнымалылары бөлектенетін теңдеу.

20 болса, жалпыланған біртекті теңдеудің дербес түрі.

30 Арнайы Рикатти теңдеуі  саны мәнінің  бүтін сан болатын жағдайда квадратура арқылы интегралданады.

***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№4 лекция

Толық дифференциалды теңдеулер. Интегралдаушы көбейткіш

**Жоспар.**

1. Толық дифференциалды теңдеу. Теңдеудің симметриялық түрі, толық дифференциалды болу үшін орындалатын қажетті және жеткілікті шарт.
2. Толық дифференциалды теңдеуді интегралдау әдісі.
3. Интегралдаушы көбейткіш. Интегралдаушы көбейткіштерді табудың кейбір әдістері.
4. Интегралдаушы көбейткіш және ерекше шешім.
5. Интегралдық көбейткіштің бар болуы жөніндегі теорема

Лекция мазмұны.

Анықтама. Егер

 (35)

1-ретті симметриялық түрдегі теңдеудің сол жағы үзіліссіз дифференциалданатын  функциясының толық дифференциалы болса, онда оны толық дифференциалды теңдеу деп атайды.

Мұнда  және олардың дербес туындылары -облысында үзіліссіз, оған қоса  облысында ешқандай ерекше нүкте болмауы қажет.

Анықтама бойынша

 (36)

  (37)

жалпы интеграл.

Мысал:

Жалпы интегралы 

10. Жалпы интегралды табу

 (37)

болатыны матанализден белгілі.

(36) және (37)-ні салыстырсақ; облысында

 (38)

онда  осыдан

 (39)

барлық  үшін математикалық анализ курсында қисықсызықты интеграл тарауында, егер  бір байланысты аймақ болса, онда (35) теңдеу толық дифференциалды теңдеу болуының жеткілікті шарты (39) болатыны дәлелденген. Бір байланысты аймаққа жазықтық, дөңгелек, төртбұрыш жатады, ал дөңгелек сақина жатпайды.

 функциясын табу үшін (38) алайықта, оның 1-теңдеудегі -ті тұрақты шама деп қарастырайық, сонда

 (40)

Осыдан (38)-дің 2-теңдігі бойынша

 (41)

 (42)

жалпы интеграл немесе жалпы шешуі.

***1. Мысал:*** 



демек, берілген теңдеу толық дифференциалды теңдеу. Сондықтан,



; 

жалпы шешімі.

***2. Мысал.*** Дифференциалдық теңдеуді шешу керек:

.

Шешуі. Мұнда , , онда берілген теңдеу толық дифференциалдық теңдеу.

,

 пайдаланып,  аламыз. Бұдан



 немесе  берілген теңдеудің жалпы шешімі.

20. Интегралдаушы көбейткіш.

 (43)

толық дифференциалды теңдеу болмасын дейік.

Анықтама. Егер (43) теңдеудің екі жағын  көбейткенде, ол толық дифференциалды теңдеу болса, онда оны интегралдаушы көбейткіш деп атайды. Анықтамаға сәйкес

 (44)

толық дифференциалды теңдеу. Сондықтан

 (45)

(жеткілікті шарты)

 (46)

бұл 1-ретті дербес туындылы теңдеу.

Интегралдаушы көбейткішті табу үшін мына жағдайларды қарастырайық.

1) , бір ғана -тің функциясы болсын, онда (46) – дан  немесе интегралдағаннан кейін

 (47)

Мысал: 

 сондықтан берілген теңдеу толық дифференциалды теңдеу емес, интегралдаушы көбейткішті табу керек. Ол үшін (47)-де интеграл астындағы фунуцияны есептеу қажет.



демек  немесе



толық дифференциалды теңдеу.

2)  болсын. Бұл жағдайды өз-беттеріңізбен қорытып шығарыңыздар.

Нұсқау: (46) теңдеуді қарастыру қажет.

3)  екі айнымалының функциясы болсын. Онда (46) былай жазылады:





а) егер  болса, онда



б) егер  болса, онда



Мысал: 

 түрінде іздейік, демек 



толық дифференциалды теңдеу.

30. Интегралдаушы көбейткіш және ерекше шешім

(43) толық дифференциалды емес теңдеуді алайық.  Интегралдаушы көбейткіш болсын. Онда

 (48)

бұдан 

а)  жалпы интеграл

в) 

бұдан мынадай қорытынды жасауға болады. Ерекше шешім интегралдаушы көбейткіштер -ке айналатын нүктелерде болады.

40. Интегралдық көбейткіштің бар болуы жөніндегі теорема:

Егер  аймағында (43) теңдеудің жалпы интегралы болып және  интегралының осы аймақта 2-ретті дербес туындылары бар болса, онда (43) теңдеудің интегралдаушы көбейткіші бар болады.

Дәлелдеу:  жалпы интеграл болғандықтан . Демек,

 (49)

 және  шамалары

 (50)

жүйені қанағаттандырады. (50) біртекті жүйенің нольге тең емес шешуі бар, сондықтан



немесе  бұдан

 (51)

 (52)

(52)-ні (49)-ға қойсақ

 (53)

мұндағы  интегралдаушы көбейткіш.

Теорема: Егер  (43) теңдеудің интегралдаушы көбейткіші болып, ал  оған сәйкес интегралы болса, онда үзіліссіз туындылары бар

 (54)

(43) теңдеудің интегралдаушы көбейткіші болады.

Дәлелдеу: (43) теңдеудің екі жағын (54)-ке көбейтсек

 (55)

(43) теңдеудің сол жағы  функциясының толық дифференциалы, сондықтан (54) формуладан анықталған -де (43) теңдеудің интегралдаушы көбейткіші.

Қорытынды: 1) Кез келген интегралдаушы көбейткіш (54) формула арқылы табылады.

2) интегралдаушы көбейткіш жалғыз ғана емес, бірнешеу болуы мүмкін.

Салдар: Егер  және  (43) теңдеудің өзара тең емес интегралдаушы көбейткіштері болса, онда

 (56)

(43) теңдеудің жалпы интегралы. (54)-ке сәйкес яғни  жалпы интеграл.

***Мысал:***  теңдеудің интегралдаушы көбейткіштері



салдар бойынша



демек



жалпы интеграл.

Берілген айнымалылары бөлектенетін теңдеудің шешімін тауып,  оның жалпы интегралы болатынын көрсетіңіздер.

***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№5 лекция

Коши есебі шешуінің бар болуымен жалғыздығы жөніндегі мәселелер

**Жоспар.**

1. Эйлер сынық сызығы.
2. Пеано теоремасында  функциясына қойылатын шарттар.
3. Пикар теоремасында  функциясына қойылатын шарттар.
4. Пеано мен Пикаро теоремаларының негізгі айырмашылықтары.
5. Пеано кесіндісі.

Лекция мазмұны.

**1. Эйлер сынық сызығы**

 (1)

теңдеуі берілсін және оң жағы  аймағында анықталған және үзіліссіз болсын. Онда (1) теңдеу  жазықтығында бір өрістер бағытын беретіні белгілі, оған қоса оң жағы үзіліссіз болғандықтан өрістер бағыты да үзіліссіз, сондықтан кез келген өзара жақын екі нүктедегі бағыттар бір-бірінен азғана айырмасы болады.

(1) теңдеудің оң жағы үзіліссіз болғандықтан, оның шешуіде үзіліссіз дифференциалданатын функция, сол себептен интегралдық қисығыда тегіс (үзілген жері жоқ) болуы керек.

Кез келген интегралдық қисықтың әр нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың бағыты өріс бағытымен бірдей болатын қасиетті пайдаланып (изоклина әдісі, 1-қараңыз)  аймағында бастапқы берілген сәйкес Коши есебінің шешуін табайық.

*y*

*x*

0

*M-2*

*M0(x0,y0)*

*M-1*

*M1(x1,y1)*

*G*

5-сызба

Ол үшін  аймағында  нүктесі арқылы түзу кесіндісін жүргізейік, оның бұрыштық коэффициенті  болатыны белгілі. Осы түзудің кез келген  нүктесінің көлбеуі -ге тең түзу жүргізейік т.с.с.(5-сызба). Осындай түзулерді  нүктесінен солға қарайда жүргізуге болады. Сонымен  аймағында белгілі бір сынық сызық пайда болады. Осы сынық сызықты Эйлер сынығы деп атайды да. Қолданылған әдісті Эйлер әдісі дейді. аймағының  нүктесі арқылы өтетін осы сынық сызықтар (1) теңдеудің интегралдық қисықтарының кейбір бейнесін бере алады. Олай болуы сынық сызықтардың саны -ке ұмтылғанда, оның әр буынының ұзындығы нольге тең болуына байланысты.

**2. Пеано теоремасы.**

Егер (1) теңдеудің оң жағы  аймағында үзіліссіз және   болса, онда (1) теңдеудің  аралығында  бастапқы шартты қанағаттандырарын ең жоқ дегенде бір  шешуі бар болады.

(мұнда  аралығы Пеано кесіндісі деп аталады).

1) жағдайда айтылғандарға байланысты  нүктесі арқылы кез келген бағытпен шексіз көп сынық сызықтар жүргізуге болатыны белгілі, ал оның әр қайсысы әр түрлі интегралдық қисықтың бейнесін берер еді.

Осы сияқты Пеано теоремасыда Коши есебі шешуінің тек қана бар болуын қамтамасыз етеді, оның жалғыз болатындығын қамтамасыз ете алмайды.

Енді Коши есебі шешуінің бар болуымен қоса, жалғыздығында қамтамасыз ететін теореманы қарастырайық.

3. Пикар теоремасы

 (1)

теңдеу және  бастапқы мәндер берілсін, яғни ;

 функциясына төмендегідей шарттар қойылсын:

10 -екі айнымалының тұйық аймағында үзіліссіз функциясы, ал ; мұнда  кез келген сандар,  функциясы  аймағында үзіліссіз болғандықтан осы аймақта шенелген функция, сондықтан төменгі теңсіздікті қанағаттандыратын бір  саны табылады,

 (2)

*x0-a*

*x0*

*x0+a*

*x0+h*

*x0-h*

*M0(x0,y0)*

*y0+b*

*y0*

*y0-b*

6-сызба

20  функциясының мына төмендегі  бойынша шенелген дербес туындысы бар, яғни

 (3)

мұнда –тұрақты оң сан, ал . Бұл шартты Липшиц шартымен ауыстыруға болады, яғни  үшін

 (4)

мұнда  айнымалысының кез келген екі мәні, ал -кез келген оң тұрақты сан. Осылайша жорығанда (1) теңдеудің  (Пеано кесіндісі) аралығында -тің барлық мәндері үшін анықталған және үзіліссіз  жалғыз ғана шешуі бар болады, мұнда 

10. Алдымен (1) теңдеу шешуінің бар болуын дәлелдейік.

(Біртіндеп жуықтау әдісін қолданып Пикар дәлелдеген). Бастапқы шарты берілген (1) дифференциалдық теңдеуді оған балама мына интегралдық теңдеумен ауыстырайық

 (5)

Бұл интегралдық теңдеу бастапқы шартты қанағаттандырады, себебі 

Біртіндеп жуықтау әдісін қолданудың мәнісі мынада: (5) интегралдық теңдеуді біртіндеп жуықтау әдісімен шешеміз, яғни  функциясына біртіндеп функциясының мәндерін қою арқылы (5) теңдеудің сол жағындағы -тің мәнін табамыз, мұнда

 (6)

тізбегінің  аймағынан шықпауын қамтамасыз ету қажет. Алдымен бірінші жуықтауды қарастырайық

 (7)

 болу үшін -тің өзгеруін  интервалымен шектеу керек, мұнда  немесе  деп алынады, ал  екені белгілі.

Онда

 (8)

Бұл -дің  аймағының шекарасынан шықпайтынын көрсетеді. Екінші жуықтау

 (9)

(6), (8) жуықтаулардың екеуіде бастапқы шарттарды қанағаттандырады, себебі  болғанда 

айырманы бағалайық.

 (10)

 - де  аймағының шекарасынан шығып кетпейді т.с.с. Енді жалпы формула құрайық

 (11)

айырманы бағалайық

 (12)

Барлық алғашқы жуықтаулар сияқты -де  аймағының шекарасынан шығып кетпейді. Енді  табайық, осы тізбектің шекті функциясы бастапқы шартта берілген (1) теңдеуді қанағаттандыратынын көрсетейік. Ол үшін төмендегі формаль қатарды құрайық

 (13)

Осы қатардың жинақылығын дәлелдеу үшін, мына төмендегі айырмаларды бағалайық:

 (14)

(15)



 (16)

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

  (17)

Сонымен, (12) қатардың орнына мына қатарды қарастырайық:

 (18)

бұл жинақты қатар, себебі Даламбер белгісі бойынша:



(17) қатардың сәйкес әрбір мүшесі (12) қатар мүшелерінен үлкен болғандықтан (екінші мүшесінен бастап) (12) қатарда жинақты, олай болса

 (19)

бұл (6) тізбектің шекті функциясы және ол  аралығында үзіліссіз. Бұған қоса функциясы (5) интегралдық теңдеуді қанағаттандырады, яғни

 (20)

(20) ны  бойынша дифференциалдасақ

 (21)

Сондықтан (1) теңдеудің бастапқы шартты қанағаттандыратын шешуі бар.

20. Енді осы шешімнің жалғыздығын дәлелдейік.  интервалында (Пеано кесіндісі) (1) теңдеудің  және  екі шешімі болсын дейік, бұл шешімдер  нүктесінде бірдей, ал басқа нүктелерде әртүрлі, сондықтан 

Айталық  нүктесінде бұл айырма ең үлкен  мәнін қабылдайтын болсын,  айырманы бағалайық



 мұнда   жағдайда  қарама-қайшы теңсіздік аламыз, себебі -ді өте аз шама ретінде таңдап алуға болады, мәселен  десек,  шығады. Сөйтіп,  интервалында тең емес екі шешім бар деп жоруымыз қайшылыққа әкеп соғады, сондықтан теңдеудің жалғыз ғана шешімі бар.

Сонымен Пикар теоремасы Коши есебі шешімінің бар болуын ғана емес, сонымен бірге жалғыздығын да қамтамасыз етеді.

***Мысал:***  теңдеуі үшін  шарты бойынша  квадрат аймақта Коши есебінің шешуін біртіндеп жуықтау әдісін қолданып 3-жуықтауын табыңыздар? Коши есебінің дәл шешімімен осы жуықтау арасындағы қатесін табыңдар?

Берілген теңдеудің оң жағы   бойынша үзіліссіз дифференциалданады және оның  бойынша дербес туындысы бар, яғни 

Сондықтан  Липшиц шартын қанағаттандырады, ал



ал . Демек, Пикар кесіндісі ; жуықтауларды



формуласымен есептейміз.

1-жуықтау: 

2-жуықтау: 

3-жуықтау: 

осы жуықтаумен теңдеудің дәл шешімі арасындағы айырмасы



***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№6 лекция

Туындысы арқылы айқындалмаған 1-ретті дифференциалдық теңдеулер. Лагранж және Клеро теңдеуі

**Жоспар.**

1. Туындысы арқылы айқындалмаған теңдеудің түрлері.
2. Туындысы арқылы айқындалмаған 1-ретті дифференциалдық теңдеулер шешу әдісі.
3. Лагранж, Клеро теңдеулерін интегралдау, бір-бірінен айырмашылықтары. Ерекше шешімдері.

Лекция мазмұны.

Мына теңдеуді қарастырайық:

 (1)

Мұндай теңдеулер үшін жай дифференциалдық теңдеулер теориясында көптеген есептер қарастырылады.

Интегралдау мәселесі:

1) Айталық (1) теңдеу  арқылы айқындалған болсын, онда бірнеше теңдеулер жиынтығын алған болар едік, мәселен

 (2)

мұнда 

Бұл жағдайда (1) теңдеудің шешуін табу үшін, (2) теңдеудің әрқайсының шешуін табу қажет. Осы шешулердің жиынтығы (1) теңдеудің шешімі болар еді. Бұл жағдайда (1) теңдеудің шешімі түгелдей табылама, жоқпа? Деген сұрақ тууы мүмкін.

Есеп:

 (3)

теңдеуі берілген. Бұл - қа қатысты квадрат теңдеу болғандықтан



екі 1-ретті дифференциалдық теңдеу шығады.



жалпы шешулері болатыны белгілі, мұнда  кез келген тұрақтылар. Егер  алсақ, ол әртүрлі топқа жататын екі интегралдық қисықтар бөлігінің жиынтығы болар еді. Мәселен,



*y*

*x*

+2

+1

1

0

*y=x2+1*

*y=2ex-1*

7-сызба

2) Айталық, (1) теңдеу  арқылы айқындалған болсын, онда төмендегі теңдеулер жиынтығы шығады:

 (4)

мұнда 

Бұл теңдеулер бұрын қарастырылмаған, сондықтан оларды шешуге басқа әдістер қолдану қажет.

**1. Параметр енгізу әдісі.**

(4) арасынан жеке

 (5)

теңдеуін қарастырайық. Қарастырылып отырған облыста -дың өз аргументтері бойынша дербес туындылары бар деп жориық.

Параметр енгізу әдісінің идеясы: Бұдан бұрын жай дифференциалдық теңдеулердің шешімін немесе интегралын  декарт координатасында алған едік. Бұл әдісте шешулер мен интегралдарды параметрлік түрде алатын боламыз, мәселен:

 (6)

мұнда  параметр,  жалпы шешу құрамында болатын кез келген тұрақты.

Ескерту: Математикалық анализ курсында параметрлік түрде берілген функцияда, оның параметрлерін әдетте  арқылы таңбалап едік, ал жай дифференциалдық теңдеулер теориясында параметр  арқылы таңбаланады. (5) параметр енгізу әдісін жүзеге асыру төмендегіше болады:

Айталық  болсын, онда (5)-тен



шығады.

Осының екі жағынан дифференциал алып,  қатынасын қолдансақ



немесе

 (7)

шығады. Айталық (7) теңдеудің (ол айнымалылары бөлектенген, біртекті т. б. теңдеулер болуы мүмкін) жалпы шешуін таптық дейік, ол  кез келген тұрақты.

Егер осыны (6)-ға қойсақ, (5) теңдеудің (6) параметрлік түрдегі шешуін табамыз:

 

мұнда



Мысал: Егер (6)-да  параметрді шығарып тастауға болса, онда декарт координатасында теңдеудің жалпы шешуін алған болар едік.

Мысалы:

 (8)

берілген.

 теңдеуіне параметр енгізу әдісін қолданамыз.  болсын, онда

 (9)

осыдан толық дифференциал алсақ

 шығады.

1. Егер  болса, онда (9)-дан бір шешімі  шығады.
2. Егер  болса, онда 

немесе  сызықтық теңдеу. Теңдеуді шешіп, оның жалпы шешуі  табамыз. Осыны (9)-ға қойып берілген теңдеудің параметрлік түрдегі жалпы шешуін табамыз.

***Ескерту***: (1) теңдеуде  арқылы анықталған түрлерін қарастырайық:

 (10)

кез келген  үшін бұған мысал келтіру қиын емес. (10)-ның әрқайсысын интегралдау мәселесі де параметр енгізу әдісімен шешіледі. Мәселен,

 (11)

Мұнда -тың бірінші ретті дербес туындылары болуы қажет. Бұрынғыдай,  алайық, онда

 (12)

Егер -тің параметрлік түрдегі берілуін тапсақ, оны (12) қойып, -тің де параметрлік түрдегі берілуін табар едік.  және  айнымалыларына байланысты дифференциалдық теңдеу алу үшін (12)-нің екі жағынан дифференциал аламыз:



Екі жағын -ға көбейтіп және  қатынасын еске алсақ, мынау шығады:

 (13)

Бұл теңдеу  және  айнымалыларының дифференциалдық теңдеуі. Айталық, (13) шешуі  болсын дейік. Онда осыны (12)-ге қойсақ, теңдеудің параметрлік түрдегі жалпы шешуін алған болар едік:



Егер (1) теңдеу  арқылы айқындалатын болса, мәселен  немесе

, (14)

онда ол Лагранж теңдеуі деп аталады. (14) теңдеудің  болғандағы дербес түрі Клеро теңдеуі деп аталады, ол:

 (15)

**2. Лагранж теңдеуін интегралдау**

 (14) Лагранж теңдеуін алайық.  деп алып және  қатынасын пайдалансақ (14) теңдеуге эквивалент болатын жүйе аламыз:

 (16)

мұнда  және  декарттық координаты бойынша берілген үзіліссіз дифференциалданатын функциялар. (15)-тің 1 теңдеуінен дифференциал алайық

 сонда

 немесе

 бұдан

 (17)

-ке байланысты 1-ретті сызықтық теңдеу шығады. (17) сызықтық теңдеу шешімінің құрылымы жөніндегі теорема бойынша, оның жалпы шешімі:

 (18)

мұнда  бір дербес шешімі, ал  (17)-ге сәйкес біртекті сызықтық теңдеудің жалпы шешуі . Сондықтан

 (19)

Бұл параметрлік түрдегі жалпы шешімі, одан параметр –ны шығарып тастап  түрдегі жалпы шешуін аламыз.

***Мысал :***



 сызықтық теңдеу

жалпы шешуі ; ал параметрлік түрдегі шешімі:



-ны шығарып тастасақ  жалпы шешімі шығады.

**3. Клеро теңдеуін интегралдау**

 болғандағы (14) теңдеудің дербес түрі

 (20)

Клеро теңдеуі деп аталады.  деп алсақ,

 (21)

Екі жағынан дифференциал алып,  қатынасты еске алсақ:

 немесе 

 онда

 (22)

жалпы интегралы

 (23)

 (24)

Осыдан -ны шығарып тастасақ  шешуін аламыз, әдетте бұл ерекше шешу болады.

***Мысал:***  жалпы интегралы 

Бұдан  шығады, яғни жалпы интегралы түзу сызықтар  параболаға жүргізілген жанамалар үйірі болады.

*y=Cx+C2*

*y*

*x*

0



Лагранж теңдеуін интегралдау әдісі:

1.  алып, (14) теңдеуде  -ті  -ке ауыстырамыз.

2. Алынған  қатысты сызықтық теңдеуінің шешімін табамыз, яғни  түрінде болады, мұнда - кез келген функция.

3. Бастапқы теңдеудің шешімін параметр түрінде жазамыз:

 

Мысал. Теңдеуді интегралдау керек



Шешуі. қоямыз, онда . Екі жағын дифференциалдап,



аламыз, бұдан

 немесе .

Бірінші ретті x –қа қатысты сызықты теңдеу алдық, оны 3-тақырыптағы үлгіге қарап шығарамыз,



Табылған x-тің мәнін қойып,

, 

берілген Лагранж теңдеуінің шешімін алдық.

Анықтама. Клеро теңдеуі



түрінде болады.

Шешу әдісі. Клеро теңдеуінің жалпы шешімі



түрінде болады. Клеро теңдеуінің жалпы шешімі параметрлік түрде 



болады.

Лагранж және Клеро теңдеулерін де параметр әдісі арқылы шешеміз.

**Мысал**. Теңдеуді интегралдау керек

.

Шешуі. **** қоямыз, онда  аламыз. Теңдеуді дифференциалдап, -ті -ке ауыстырып,

,

бұдан



аламыз.

### Бірінші көбейткішті нөлге теңестіріп, , бұдан аламыз және берілген теңдеудің жалпы шешімі болады, бір параметрден тәуелді түзулер үйірі. Екінші көбейткішті нөлге теңестіре отырып,



аламыз. Осы теңдеуден және -ден p-дан құтылып,  теңдеудің шешімін аламыз (ерекше шешім).

Геометриялық тұрғыдан  иілгіш түзулер үйірінің қисығы.

***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№7 лекция

Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті теңдеулер.

**Жоспар.**

1. Реті төмендетілетін жоғарғы ретті теңдеулер түрлері.
2. Теңдеу ретін төмендету үшін белгісіз функция туындысын ауыстыру жағдайлары.
3. Теңдеу құрамында тәуелсіз айнымалы болмайтын жағдайдағы ауыстырудың ерекшеліктері.

Лекция мазмұны.

Мына теңдеуді қарастырайық:

 (1)

Егер  болса, онда (1) теңдеу жоғарғы ретті жай дифференциалдық теңдеу деп аталады.

***Ескерту*:** болғандағы жағжайда жай дифференциалдық теңдеуді шешудің толып жатқан әдістерін білеміз. Осыған байланысты жаңа айнымалылар арқылы ауыстыру формуласын қолданып, (1) теңдеудің ретін төмендетуге болар ма еді, тіпті кейде осы ауыстыруларды біртіндеп қолданып дифференциалдық теңдеуді 1-ретке дейін түсіруге болатын шығар.

Осындай есептерді шешу үшін, төмендегі 5 жағдайды қарастырайық:

1) (1) теңдеу -ке, оның кейбір ретті туындыларына байланысты былай берілген, мәселен,

  (2)

Бұл жағдайда

 (3)

Ауыстыруы арқылы (2) теңдеудің реті бірден  төмендедетіледі; яғни

 (4)

***Мысал:*** теңдеуі берілсін.

, онда 





Екі рет интегралдап, белгісіз функция -ті табамыз.

***Ескерту*:** Егер  болса, оған 1-ретті теңдеудегі қолданған әдістер жеткілікті, ал  онда мүмкін тағы да бір айырбастау қолдану қажет болар.

Айталық, (4) теңдеудің жалпы шешуі  табылды дейік.

Онда (3)-ке сәйкес 

Мұны шешу қиын емес.

2) (1)теңдеу -ке байланысты емес, яғни

 (5)

Бұл теңдеудің реті мына төмендегі ауыстыру арқылы төмендетілетінін көрсетейік:

 (6)



т.с.с.

математикалық индукция заңы бойынша, болғанда

 (7)

Мұнда -өзінің айнымалыларына байланысты көпмүшелік.

Барлық үшін (7)-ні (5) қойып, реті 1-ге төмендетілген ретті теңдеу аламыз, ол -ке байланысты болады, яғни



Мысал: 



 теңдеудегі  орнына қойсақ.

 шығады.





3) (1) теңдеудің сол жағы дәл туынды болатын жағдай.

Айталық (1) теңдеудің сол жағы қандайда бір  функциясының толық туындысы болсын дейік, яғни

 (8)

немесе

;

Бұл теңдеу барлық  айнымалылары бойынша орындалады. Сол себептен (1) теңдеудің жалпы интегралы



болады.

Демек, берілген теңдеудің реті бірге төмендетіледі. Егер (1) теңдеудің сол жағы басқа бір функцияның дәл туындысы болмаса, онда оған келтіру үшін теңдеудің екі жағын интегралдаушы көбейткіш деп аталатын  функциясына көбейту қолайлы.(егер ондай функция бар болса, табылса).

Бұл жағдайда (1) теңдеудің жалпы интегралын табумен бірге, оның ерекше шешуін де табуға болады, мәселен

 теңдеуін шешу керек.

***Мысал:***



4) (1) теңдеу белгісіз функция және оның туындылары бойынша біртекті болатын жағдай. (1) теңдеу біртекті деп аталады, егер барлық  үшін

 (9)

теңдігі орындалатын болса,

Бұл жағдайда

 (10)

жаңа белгісіз функция.

Онда: 

 (10)

Немесе (10)-ды интегралдасақ,

 (11)

 (12)

(12)-ні (1) теңдеуге қойып, біртекті қасиетін пайдаланып, теңдеудің екі жағын

-ке қысқартсақ, реті 1-ге төмендетілген –ке байланысты

 (13)

теңдеу шығады.

Егер (13) теңдеудің жалпы шешуін табуға мүмкіндік болса, мәселен



Онда оны (10)-ға қойып белгісіз функция –ті табамыз



 (14)

Егер (13) теңдеудің жалпы шешуі табылмайтын болса, онда оның ретін тағы да төмендету үшін жоғары да айтылған жағдайдың бірін қолдануға тура келеді.

Мысал: біртекті (2 өлшем)

 ауыстыруын қолданамыз.

Сонда  шығады.



5) (1) теңдеу жалпыланған біртекті болатын жағдай.

Егер  аргументтерін сәйкес бір,  өлшемдес шамалар деп есептесек, яғни

 (15)

орындалатын болса, онда (1) теңдеу жалпыланған біртекті теңдеу деп аталады. Бұл жағдайда (1) теңдеуді интегралдау үшін, белгілі жалпыланған біртекті теңдеудің қасиеттерін пайдаланып  және  орнына

 (16)

ауыстыруын пайдаланамыз.

Сонда 

Мынаны еске алу қажет: белгісіз функцияның  бойынша туындыларын енгізілген жаңа функциясының жаңа  бойынша туындыларымен ауыстыру қажет.

Бұл жағдайда

 (17)

(15) және (16)-ны (1)теңдеуге қойып, екі жағын  – ға қысқартсақ:

 (18)

теңдеуі шығады.

Бұл теңдеуде тәуелсіз айнымалы болғандықтан 2) дегі әдіспен (18)-дің ретін бірге төмендетуге болады.

***Мысал:*** теңдеуін интегралдау керек.

Теңдеудегі  айнымалыларын сәйкес   дәрежелі шамалар деп есептеп, қосылғыштардың дәрежесін өзара теңестіреміз:

 бұдан 

Бұл теңдіктердің бәрін бірдей қанағаттандыратын  саны бар, сондықтан берілген теңдеу жалпыланған біртекті, ендеше



ауыструын қолданамыз, сонда

 теңдеуі шығады.

Бұл теңдеу құрамында жаңа айнымалы жоқ, сондықтан әрі қарай  ауыстыруын қолданамыз, сонда  орындарына қойсақ,



шығады немесе ,  және 

2-теңдеуге сәйкес  немесе ,

1-теңдеуден (айнымалылары бөлектенген теңдеу)



шығады.

Сонымен  ауыстыруын еске алып және  болғанда  жалпы шешуі. Ал  шешуі осыдан  болғанда шығады.

Реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулердің кейбір түрлерін көрсетейік.

1.  түріндегі теңдеуін n – еселік интегралдаудан кейін келесі жалпы шешім шығады:



2.  түріндегі теңдеу, яғни теңдеу құрамына ізделінді функция мен оның k-1 ретті туындысына дейінгілері кірмейді.

 ауыстыруынан кейін теңдеу келесі түрге келеді: .

Бұл теңдеуден анықтайтынымыз: , бұдан кейін  кері ауыстыруын жасап,  теңдеуін  рет интегралдап - ті табамыз.

3.  түріндегі теңдеу, яғни теңдеу құрамына тәуелсіз айнымалы кірмеген жағдай,  ауыстыруынан кейін барлық  туындылары - тан тәуелді жаңа  функциясының туындысы арқылы өрнектеледі:

; ;

 және т.с.с.

Бұл өрнектерді теңдеуге қоя отырып, (n-1) ретті дифференциалдық теңдеуді аламыз.

4.  аргументтеріне қатысты біртекті  түріндегі теңдеу, яғни  теңдеу ауыстыруы арқылы шығады.

5.  түріндегі жалпыланған-біртекті теңдеу, яғни келесі ауыстыруларды жасағанда өзгеріс болмайды:

.

Мұндай теңдеудің ретін  ауыстыруы арқылы төмендетуге болады.

6. Теңдеудің реті оңай төмендетіледі, егер теңдеудің екі жағын да қандай да бір функцияның  бойынша толық туындысына келтіруге болатын болса.

Мысалға,  және т.с.с.

***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№ 8 лекция

Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер. Жалпы теория.

**Жоспар.**

1. -ретті сызықтық теңдеу түрлері.

2. Сызықтық дифференциалдық оператордың қасиеттері.

3.  теңдеудің дербес шешімдері болған жағдайдағы олардың өзара сызықтық тәуелсіздігі.

4.Теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесін табу.

5. Теңдеу жалпы шешуін құру.

Лекция мазмұны.

Анықтамалар және сызықтық оператор қасиеттері

 (1)

 ретті дифференциалдық теңдеу деп аталады, мұнда  айнымалының функциясы, ал  ізделінетін белгісіз функция.

Егер (1) теңдеу жоғарғы туындысы арқылы айқындалса, мына түрде болады:

 (2)

Егер (1) теңдеу

 (3)

түрінде берілсе, оны -ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу деп атайды, мұнда  аралығында үзіліссіз берілген функциялар. (3) теңдеудің сол жағын  арқылы белгілеп, оны сызықтық дифференциалдық оператор деп атаймыз,



Оператор қасиеттері:

1.  -const, оператордың біртектілігі
2.  оператордың аддитивтігі

Біртекті және аддитивті оператор әрқашанда сызықтық болатынын еске алайық.

1. Жоғарғы қасиеттерінен

 (4)

оңай шығады, кез-келген тұрақты. (3) теңдеуді оператор арқылы қысқаша (3) жазуға болады, мұны біртекті емес сызықтық теңдеу, ал егер , яғни

 (5)

болса біртекті сызықтық теңдеу деп атайды.

Коши есебі.

(3) сызықтық теңдеу үшін бұл есеп былайша қойылады:



кез – келген  саны берілгенде,  бастапқы шарттарды қанағанттандыратын (3) теңдеудің шешуін табу қажет. Біртекті (5) теңдеудің шешімі жөнінде

Теорема: Егер

 (6)

біртекті теңдеудің шешімдері болса, онда сызықтық комбинация



теңдеудің шешімі болады.

Мұны дәлелдеу (4) қатынастан шығады. Біртекті теңдеудің шешімдер тобына тікелей қатысы бар сызықтық тәуелсіз функциялар ұғымын енгізейік.

Функциялар тобының сызықтық тәуелділігімен тәуелсіздігі.

Анықтама.  (6) функциялар –те сызықты тәуелді болады, егер ең жоқ дегенде біреуі нольге тең емес  сандары бар болып

 (7)

болса,; Егер(7) тепе-теңдік тек қана барлық  болғанда ғана орындалса, онда (5) функциялар тобы –да сызықты тәуелсіз болады.

Анықтама. -те  үзіліссіз коэффициенттері бар (5) біртекті -ретті дифференциалдық теңдеудің  сызықты тәуелсіз шешімдері осы теңдеу **шешімдерінің фундаментальдық жүйесі** деп аталады.

(5) біртекті –ретті теңдеудің жалпы шешімін табу үшін, алдымен оның шешімдерінің фундаментальдық жүйесін, яғни өзара сызықты тәуелсіз 



шешімдерін табу керек.

Вронский анықтауышы.

 (6) функциялар тобы берілсін. Осы функциялар және олардың –ретті туындыларынан құрылған

 (8)

анықтауышты Вронский анықтауышы деп атайды. Осы анықтауыш арқылы (6) функциялар тобының сызықты тәуелді не тәуелсіз болатынын білуге болады.

1. теорема: Егер –те  ретке дейінгі туындылары бар (6) функциялар тобы өзара сызықты тәуелді болса, онда 

Дәлеледеу: (6) функциялар тобы –да сызықты тәуелсіз болғандықтан, анықтама бойынша барлығы бірдей нольге тең болмайтын  сандары бар болып,  аралығында (7) қатынас орындалады. (6) қатынасты  рет дифференциалдап, мына төмендегідей жүйені аламыз:

 (9)

Бұл жүйенің мардымсыз емес (нольдерден басқа, себебі, ең жоқ дегенде бір ) шешімі бар. Ал бұл жүйенің негізгі анықтауышы нольге тең болғанда орындалады, ол Вронский анықтауышы еді, басқаша . Теорема дәлелденді.

***Мысал:*** берілген.  аралығында осы функциялардың сызықты тәуелсіздігін зертте?

**

Берілген функциялар  да өзара сызықты тәуелді.

2. теорема: Егер -те  ретке дейінгі туындылары бар (6) функциялар тобы, осы аралықта сызықты тәуелсіз болса, онда  болуы қажетті және жеткілікті 

Дәлелдеу: Керісінше жорып,  нүктесінде  деп алайық. Бір уақытта нольге тең емес  сандары

 (10)

жүйенің шешімі болсын. Мұндай сандар бар болады, себебі жүйенің негізгі анықтауышы  онда 1-теоремаға сәйкес

 (11)

бастапқы шарттарды қанағаттандыратын (5) біртекті теңдеудің шешімі

 (12)

Бұл шарттарды  мардымсыз шешімі де қанағаттандырады. Теңдеу шешімінің бар болуы мен жалғыздығы жөніндегі теоремаға сәйкес (11) бастапқы шарттарды қанағаттандыратын жалғыз ғана шешім болуы керек. Сондықтан (5) теңдеудің шешімі (12) болады. Демек, керісінше жоруымыз, (6) функциялар тобы сызықтық тәуелді деп алу дұрыс емес.

Теорема дәлелденді.

Мысал:

Вронский анықтауышының мәндеріне сәйкес (нольге тең не тең емес) берілген функциялар тобының сызықты тәуелсіздігін анықта?



-тің кез-келген мәнінде.

Демек,  өзара сызықты тәуелсіз функциялар.

Остроградский – Лиувилль формуласы.

-ретті біртекті сызықтық (5) теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесі  берілсін.

Демек,

 (14)



Осы вронскианның туындысын жатық жолдары бойынша табайық



 (15)

 анықтауыштардың ең соңғысынан басқасы нольге тең, себебі әрқайсысында екі өзара тең жатық жолдары бар. Сондықтан

 (16)

(16) анықтауыштың 1-жатық жолының элементтерін -ке, 2-жатық жолдарының элементтерін ке т.с.с.  жатық жолының элементтерін -ке көбейтіп, ең соңғы сәйкес элементтеріне қоссақ

 (17)

 шығады. Сондықтан



 бұдан  шығады. -кез-келген тұрақты.

Егер  деп алсақ, 

 (18)

Бұл Остраградский-Лиувилль формуласы.

Қасиеттері:

10. Егер  болса, онда  үшін , ,

20. Егер  болса, онда  үшін 

30. Егер  болса, онда .

(18) формула арқылы (5) теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесін табамыз, ол үшін ;

***Мысал:*** 3-ретті бір диффенренциалдық теңдеудің шешімдері  болсын.



Сондықтан  өзара сызықты тәуелсіз, теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесі болады, ендеше теңдеу жалпы шешуі 

**1. теорема.** -ретті біртекті

 (19)

теңдеу берілсін.  аралығында үзіліссіз коэффициенттері бар (19) теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесі бар болады.

**Дәлеледеу:** Анықтауышы нольден өзгеше, 

 (20)

матрицасын алайық. (19) теңдеу үшін бастапқы берілгендері



 бар Коши есебін қарастырайық. Теңдеудің бұған сәйкес шешімі  болсын. -ға  мәндерін беріп,  аралығында   шешім алсақ, олардан құрылған  себебі  сондықтан бұл шешімдер  аралығында сызықты тәуелсіз болғандықтан, (19) теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесі.

2. теорема. Егер  функциялар тобы (19) теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесі болса, онда оның жалпы шешімі

 (21)

**Дәлелдеу:** Жалпы анықтама бойынша  тұрақты шамалары бар шешім жалпы шешім болады және тұрақтыларға белгілі бір сан мәндер бергенде дербес шешулер шығуы керек. Ал шешімінің бар болуы мен жалғыздығы жөніндегі теорема бойынша дербес шешім  болғанда

 (22)

шарттар арқылы бірмәнді түрде анықталады.

 тұрақтыларды табу үшін төмендегі жүйені қарастырайық

 (23)

Мұнда  функциясының  болғандағы мәндері  туындыларының  болғандағы мәндері.

(23) жүйенің анықтауышы  орнына  қойылғандағы Вронский анықтауышы, 3-теоремаға сәйкес . Сондықтан (23) жүйенің жалғыз ғана  шешімдері бар. (21) қатынас -ның осы мәндері бойынша (22) бастапқы шарттарды қанағаттандырады.

Теорема дәлелденді.

Теорема 6: (5)  ретті біртекті сызықты теңдеудің комплекстік шешімінен екі заттық шешім бөліп алуға болады.

Айталық (5) теңдеудің шешімі  болсын, мұнда  нақты бөлігі, ал  жорамал бөлігі, екеуі де тің нақты функциялары. Сызықтық дифференциалдық операторды қолдансақ, әрі қасиеттері бойынша



Бұл тек қана  болғанда ғана орындала-ды. Сондықтан  теңдеудің заттық шешімдері.

Мысал:

 берілген теңдеудің шешімі.



Бұдан шығады. Олай болса  және  берілген теңдеудің заттық шешімдері.

***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№9 лекция

Тұрақты коэффициентті n-ретті біртекті теңдеу

**Жоспар.**

1. Теңдеу шешуінің фундаменталдық жүйесі .
2. Сипаттаушы теңдеу түбірлеріне сәйкес теңдеудің жалпы шешімдері.
3. Тұрақты коэффициентті теңдеулерге келтіру үшін қолданылатын формулалар.
4. Тұрақты коэффициентті теңдеулерге келтірілетін *n* – ретті сызықтық теңдеулер.

Лекция мазмұны.

Алдымен

,  (1)

-нақты немесе комплекстік сандар болғанда орынды болатынын дәлеледейік.

1. -нақты сан болғанда (1) формула орынды болатыны белгілі
2. *к* – комплекстік сан болсын, яғни 

Эйлер формуласы бойынша





Осыған ұқсас  шығады.

 (2)

теңдеуді қарастырайық, мұнда -тұрақты коффициенттер.

(2) теңдеудің шешімін табу үшін теңдеу шешімінің фундаменталдық жүйесін табу қажет, яғни

 (3)

(3) табылғаннан кейін (2) теңдеудің жалпы шешімі

 (4)

болатыны белгілі, -тұрақты шамалар

(2) тендеудің дербес шешуін Эйлер бойынша

 (5)

түрінде іздейміз, мұнда -нақты немесе комплекстік сандар.

(5) – ті (2) ге қойсақ:



немесе

 (6)

мұнда

 (7)

немесе

 (8)

  операторының сипаттаушы көпмүшелігі, ал (8) теңдеу оның сипаттаушы теңдеуі деп аталады.

(8) сипаттаушы теңдеудің түбірлері нақты, комплекстік сандар және еселік түбірлерде болуы мүмкін, осыларды жеке – жеке қарастырайық.

1) Айталық (8) теңдеудің түбірлері өзара тең емес

 (9)

болсын дейік. Онда (5)-ке байланысты (2) теңдеудің дербес шешімдері

 (10)

болады.

Енді (10) шешулер тобының (2) теңдеу шешуінің фундаменталдық жүйесі болатын дәлелдеу қажет. Ол үшін *W(x)* вронскианды қарастырамыз.

бұл Вандермонд анықтауышы ол ешқашанда  жоғарыда келтірілген теоремаларға байланысты (10) функциялар тобы (2) теңдеу шешуінің фундаменталдық жүйесін құрады.

Олай болса (2) теңдеудің жалпы шешімі

 (11)

2) Айталық (8) теңдеудің түбірлері әртүрлі, бірақ арасында комплекстік түбірлері де бар болсын, яғни

-*к* нақты түбірлер және



*2m* комплекстік түбірлер (себебі комплекстік түбірлер түйіндес болатыны белгілі)

Түбірлердің саны  болады, әрбір түйіндес комплекстік шешімнен екі нақты шешімдер бөліп алынатыны белгілі. Сондықтан . Сонымен  нақты шешімдер аламыз, осы шешімдерден сызықтық комбинация – теңдеудің жалпы шешімі

 (12)

3) Айталық (8) сипаттаушы теңдеу түбірлері нақты сандар, әрі олардың арасында еселік түбірлер болсын дейік.

Егер  түбірі  еселік болса, онда

 (13)

 операциясы (амалы) және оны  бойынша дифференциялдау орын алмастырымды болғандықтан

 (14)

Бұл көбейтіндіні дифференциялдау үшін Лейбниц ережесін пайдалансақ:

 (15)

Айталық, (8) теңдеудің  -еселік түбірі болсын, онда (15) сәйкес, әрі (13) еске алсақ:

 (16)

Сонымен

 (17)

 шешім аламыз, бұлардың теңдеу шешімінің фундаменталдық жүйесі болатынын дәлелдеу қиын емес, себебі .

Сондықтан (2) теңдеудің жалпы шешімі

 (18)

болады.

Жоғарғы айтылғандарға орай, егер (8) теңдеудің түбірлері  еселігі  еселігі  еселігі  мұнда  болса, (2) теңдеудің төмендегі  шешімі болады.

 (19)

Бұл жағдайдағы (2) теңдеудің жалпы шешімі

 (20)

мұнда



***Мысал:***1) 

сипаттама теңдеуі 

 жалпы шешімі.

2) 

сипаттама теңдеуі

 

 3 еселік түбірі бар, сондықтан



3) 





Тұрақты коэффициентті теңдеулерге келтіретін *n* – ретті сызықтық теңдеулер

 (21)

біртекті -ретті сызықтық теңдеуді қарастырайық, мұнда -коэффициенттері айнымалы шамалар, -тің функциялары.

(21) теңдеуде тәуелсіз айнымалыны ауыстыру арқылы, оны коэффициенттері тұрақты теңдеуге келтіру мәселесін қарастырайық.

 (22)

ауыстыруын қолданайық.

Сонда:

 (23)

(22) – ні (21) – ге қойып  бөлсек, мына теңдеу шығады.

 (24)

(24) теңдеудегі  функциясын  алдындағы коэффициент тұрақты шама болатындай етіп алуымыз қажет. Сондықтан



Бұдан

 (25)

шығады.

Бұл Еругин формуласы деп аталады. Егер (21) теңдеу коэффициенттері тұрақты теңдеуге айналатын болса, онда ол тек қана (25) ауыстыру формуласы арқылы келтіріледі.

Енді (25) ауыстыру формуласы арқылы тұрақты коэффициентті теңдеуге келтірілетін теңдеулерді қарастырайық.

1) Эйлер теңдеуі:

 (26)

Эйлер теңдеуі деп аталатын теңдеу берілсін, мұнда -тұрақты нақты сандар. (21) және (26) теңдеуді салыстырсақ,  шығады.

(25) – ке сәйкес



Бұдан  деп алсақ,

 немесе  (27)

Сонда:

 (28)

Енді (27), (28)-ді (26)-ға қойсақ, ,  көбейткіштер өзара жойылып, -ретті біртекті, коэффициенттері тұрақты болып келген теңдеу аламыз.

*Ескерту:* Эйлер теңдеуі келтірілетін тұрақты коэффициентті теңдеудің дербес шешулері  және  болғандықтан, Эйлер теңдеуінің дербес шешулері  және  болар еді. Сондықтан Эйлер теңдеуінің шешуін  түрінде алып интегралдауға болады. Мұнда  теңдеуінің түбірі, яғни  болуы мүмкін. Онда Эйлер теңдеуінің дербес шешулері  болады да, жалпы шешуі

 (29)

*Мысал:*

(27) ауыстыруын қолданып, (28)-ді еске алсақ,  шығады.

Сипаттама теңдеуінің түбірлері 

Сондықтан мұның жалпы шешуі  ал Эйлер теңдеуінің жалпы шешуі 

2) Чебышев теңдеуі:

Төмендегі теңдеуді қарастырайық

 (30)

Мұнда  ерекше нүктелер болғандықтан,  жиынында шешуінің бар болуы және жалғыздығы жөніндегі теореманың барлық шарттары орындалады.

Біз (30) теңдеудің  аралығындағы жалпы шешуін табайық.

Ол үшін (25) – те  деп алсақ,  немесе  (31) ауыстыру формуласын аламыз. Осы ауыстыру бойынша

 (32)

(32) – ні (30) – ға қойсақ:

 (33)

шығады.

Бұл теңдеудің жалпы шешуі

 (34)

болғандықтан, Чебышев теңдеуінің шешуі (31) бойынша



Бұдан  дербес шешуі Чебышев көпмүшелігі деп аталады.

**Тапсырмалар.**

Тапсырмалар тестіге дайындық ретінде тест түрінде берілген.

1.  теңдеуін интегралдау керек.

A) 

B) 

C) 

D) 

E) дұрыс жауабы жоқ.

2. Теңдеуді шешіңіз: .

A) ;

B) ;

C) ;

D) ;

E) дұрыс жауабы жоқ.

3. Теңдеуді шешіңіз: .

A) ;

B) ;

C) ;

D) ;

# E) дұрыс жауабы жоқ.

***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№10 лекция

Тұрақты коэффициентті *n* – ретті біртекті емес теңдеудің оң жағы бойынша дербес шешуін табу.

**Жоспар.**

1. Біртекті емес –ретті теңдеудің жалпы шешімін табу әдісі.
2. Кез келген тұрақтыны вариациялау әдісі
3. Теңдеу шешімінің фундаментальдық жүйесі.

Лекция мазмұны.

Тұрақты коэффициентті n – ретті біртекті емес теңдеу және оны шешу әдістері.

 (35)

теңдеуі берілсін.

Осындай теңдеулердің 2 класын қарастырайық:

1) 

 (36)

мұнда  және -кез келген сандар.

2) 

 (37)

мұнда -кез келген сандар,  және  реттері сәйкес  және  болатын кез келген көпмүшеліктер.

Теорема: Айталық, (35) теңдеу коэффициенттері  тұрақты сандар болсын.

10**.** Егер оның оң жағы (36) түрінде болса, онда (35) теңдеудің дербес шешуі

 (38)

түрінде болады, мұнда  ретті кейбір көпмүшелік, негізінде -тен басқа, ал



20 Егер теңдеудің оң жағы (37) түрінде болса, онда (35) теңдеудің дербес шешуі.

 (39)

мұнда -реті -ге тең көпмүшеліктер.

(8)-дің түбірі болмаса

түбірі болған жағдайдағы оның еселігі



Дәлелдеуін өзбеттеріңізбен жүргізіңіздер.

Нұсқау: а) (38)-ді мына түрде жазыңыз:



б) Көбейтіндінің жоғарғы ретті туындысын табу үшін Лейбниц формуласын қолданамыз, берілген теңдеудің  шешуі болатын дәлелдемені қараңыз,  шешу (35)-ке қойылады да, оң жағы  орнына (36) жазылады;

в) -ке қысқартылады, қалған тепе-теңдікте -тің бірдей дәрежесінің коэффициенттері теңестіріледі, сөйтіп алынған жүйеден біртіндеп  көпмүшелігінің барлық  коэффициенттері анықталады.

2) Теореманың бұл бөлігі  болғанда ғана дұрыс. Теорема алдыңғы жағдайға Эйлер формуласы арқылы келтіріліп дәлелденеді. Негізінде



Осыған орай (37)-ні мына түрде жазайық:

 (40)

(40)-тағы әр бір  және  функциялары (36) сияқты. Сондықтан дербес шешуді таба аламыз, ол  болады, мұнда



 және  теңдеудің сипаттама теңдеуінің  және  түбірлерінің сәйкес еселіктері.

Қарастырылып отырған жағдайда коэффициенттері нақты сандар, сондықтанда 

Сол себептен

 (41)

*Ескерту:* Теоремада айтылған дербес шешу құру әдісі-анықталмаған коэффициенттер әдісі деп аталады.

Біртекті емес сызықтық теңдеулерді интегралдау

Мына төмендегі теңдеулерді қарастырайық:

 (1)

 (2)

(2) теңдеуді (1) теңдеуге сәйкес біртекті сызықтық теңдеу деп атайды. те коэффициенттері үздіксіз деп жоримыз.

**Лемма:** Егер (1) теңдеудің бір дербес шешуі  болса, онда оның жалпы шешуі

 (3)

формуласымен беріледі, мұнда  және  (2) және (1) теңдеулердің сәйкес жалпы шешулері.

Дәлелдеу: Келісім бойынша  теңдеудің дербес шешуі болғандықтан те мына тепе-теңдік орынды:

 (4)

(1)-де 

Ауыстыруын жасасақ, мынау шығады:



Соңғы өрнекте, (4)-ке байланысты асты сызылған мүшелері өзара жойылады да, тен тұратын мүшелер қалады. Демек  біртекті теңдеудің шешуі.

**Есеп**: (1) теңдеудің оң жағы



болсын.

Егер пайда болатын әрбір теңдеудің дербес шешулері сәйкес



болса, (1) теңдеудің дербес шешуі



болатынын дәлелде.

**Кез келген тұрақтыны вариациялау әдісі**

(1)теңдеуді қарастырып және оған сәйкес (2) теңдеу шешулерінің фундаментальдық жүйесі белгілі болсын дейік. Онда оның жалпы шешуі мына формуламен берілетіні белгілі:

 (5)

мұнда  - дербес шешімдер, ал –тұрақты шамалар.

Вариациялау әдісінің негізгі идеясы мынада:

(1) теңдеудің жалпы не дербес шешуін (5) түрінде іздеуге болады, бірақ ондағы  тұрақты шамалар емес, кейбір белгісіз –тің функциялары; демек (1)-дің шешуін мына түрде іздейміз:

 (6)

(6)-ны бойынша  рет дифференциалдайық:



 ................................................................................................... (7)





(7)-ні (1)-ге қойып,  арқылы топтастырсақ, 0-ге тең деп алынған шамаларды еске алсақ:



болып шығады.

Сонымен, ізделіп отырған белгісіз дифференциалданатын  функциялары мына төмендегі жүйені қанағаттандырады:

 (8)

Бұл жүйенің негізгі анықтауышы вронскиан болғандықтан, оның бір мәнді ғана шешуі болады, өйткені



Сондықтан Крамер ережесі бойынша , мұнда -бағанасы бос мүшелермен ауыстырылған анықтауыш, ал –вронскиан, (8) жүйенің негізгі анықтауышы. Бұдан

 (9)

Мұнда –кез-келген тұрақты шама.

(9)-ды (6)-ға қойып (2) теңдеудің жалпы шешуін табамыз:

 (10)

(10)-да жақшаны ашып, оң жағын (3)-пен салыстырсақ:

 (11)

шығады. Бұл (1) теңдеудің бір дербес шешуі.

***Ескерту*:** Сонымен, тұрақтыны вариациялау әдісі мына мәселелерге келтіріледі:

1. (2) біртекті теңдеу шешуінің фундаментальдық жүйесін құру
2. (8) жүйенің шешуін табу
3. Осы табылған шешуді (6)-ға қою.

***Мысал:***



Теңдеу шешуінің фундаментальдық жүйесі  болады, өйткені



Берілген біртекті емес теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің шешуі:



Берілген біртекті емес теңдеу шешуін



түрінде іздейміз. Енді алгебралық (8) жүйені құрамыз:



Бұл жүйені бойынша бірмәнді шешіледі, себебі оның негізгі анықтауышы 









Сонда:



берілген біртекті емес теңдеудің жалпы шешуі.

**Өзін - өзі тексеруге арналған сұрақтар мен тапсырмалар.**

1. Оң жақ бөлігі қосылғыштардың ақырлы сандар қосындысы түрінде берілген тұрақты коэффициентті сызықтық біртексіз теңдеулердің дербес шешімі қалай анықталады?

2. Оң жақ бөлігі , (мұндағы - m дәрежелі көпмүшелік, егер  сәйкес біртекті сызықтық теңдеудің сипаттамалық теңдеуінің түбірі болмаса [егер  сәйкес біртекті сызықтық теңдеудің сипаттамалық теңдеуінің түбірі болса]) көрсеткіштік функциясы арқылы берілген тұрақты коэффициентті сызықтық біртексіз теңдеулердің дербес шешімі қалай анықталады?

3. Анықталмаған коэффициенттер әдісінің мәні неде?

4. Оң жағы тригонометриялық

мұндағы  - m, r дәрежелі көпмүшелік, түрінде берілетін тұрақты коэффициентті сызықтық біртексіз теңдеулердің дербес шешімі қандай түрге ие?

5. Теңдеудің барлық нақты шешімдерін табыңдар:

a) 

б) 

6. Келесі біртексіз теңдеулердің дербес шешімдерінің жалпы түрін анықтау керек.

а). ;

б).;

в).;

г). ;

д). ;

е). .

***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№11 лекция

Дифференциалдық теңдеулер жүйесі жөнінде түсінік.

**Жоспар.**

1. Дифференциалдық теңдеулер жүйесі жөнінде түсінік.
2. Коши есебі.
3. Пикар теоремасы
4. Сызықтық жүйелер түрлері. Оларды шешу әдістері және қасиеттері.
5. Сызықты тәуелділік және Вронский анықтауышы.
6. Шешудің фундаменталдық жүйелері және олардың бар болуы.
7. Остроградский - Лиувилль формуласы.

Лекция мазмұны.

Толық хабарламасы бар төмендегі дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырайық

 (1)

мұнда , ал



 да ізделінетін үздіксіз дифференциалданатын функциялар,  - белгісіз функциялар,

 - дің ең жоғарғы туындысының реті

-----------------------------------------------------------

 - нің ең жоғарғы туындысының реті

 - жиынтық реті.

Негізінде бұл жүйе олардың жалпы түрі. Саны  дана жаңа белгісіз фүнкцияларды енгізе отырып, біз алғашқы жүйені әрқашанда толық хабарламалы теңдеулер жүйесіне келтіруге болатынын көрсеткен едік.

Егер (1) жүйенің теңдеуі ең үлкен туындысы арқылы анықталса:

 (2)

болады. Мұны жүйенің каноникалық түрі деп атайды.

(1) жүйені 1 – ретті теңдеулер жүйесіне келтіруге болады, бұдан мынандай қорытынды шығарамыз: Жаңа айнымалыларды еңгізе отырып, (2) жүйені саны  теңдеуден тұратын нормаль түрдегі жүйеге келтіруге болады:

 (3)

Сонымен, кез келген (2) жай диференциялдық теңдеулер жүйесін (3) түріне келтіруге болады екен. (3) те кейбір түрлендірулерді жасап көрейік:



Онда (3) мына түрде жазылар еді:

 (4)

(4) үшін  облысында бар болу және жалғыздық жөніндегі теоременың шарттары орындалатын болсын деп жориық (Пикар теоремасын қараңыз).

Сызықтық жүйелер. Жалпы мәселелер

**Анықтама.** Мына төмендегі (5) жүйені біртекті емес сызықтық жүйе деп атайды:

 (5)

Егер (5) жүйеде барлық , онда ол жүйе біртекті сызықтық жүйе деп аталады.

 (6)

Егер



Векторлық белгілеуді еңгізсек және



матрица-функцияны алсақ, (5) және (6) жүйелерді мына төмендегі ықшамды түрде жазуға болар еді, мәселен

 (5/)

 (6/)

Сонымен, негізгі мәселе (5) және (6) сызықтық жүйелерге біртекті және біртекті емес сызықтық теңдеулерге қолданылатын қасиеттері мен тұжырымдарды қолдануға болатынын көрсету.(тұрақты коэффициенттіжүйелерге де қолданылады, яғни )

**Ескерту:** Мынаны еске сақтау керек, егер реті қанша жоғары болса да, дифференциалдық теңдеулер үшін шешуі белгілі бір шарттарды қанағаттандыратын  функциясы болса, ал жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шешу функциялар жиынтығы болады, мәселен



(6) жүйенің негізгі қасиеттеріне тоқталайық.

**Негізгі қасиеттері**

10. Тәуелсіз айнымалы және ізделінетін функцияларды ауыстырғаннан (6) жүйенің сызықтық қалпы өзгермейді (инварианттық қасиеті). Біртекті теңдеулерге қолданылған әдіс жарамды.

20. (6) жүйе шешулерінің сызықтық қомбинациясы да оның шешуі бола алады.

Егер (6) жүйенің кез келген  шешулер жүйесі



болса,онда тұрақтылар арқылы комбинацияланған

функциясы да оның шешуі болады.

**Дәлелдеу:** 1) (6) жүенің шешуі болғандықтан, оның әрқайсысы –да (6) жүйені тепе-теңдікке айналдырады. Осы теңдіктерді –ға көбейтіп, өзара қоссақ 20 қасиеттің тұжырымдары шығады.

 шешуі 



 шешуі 

Осы векторлық тепе-теңдіктерді -ға көбейтіп және туынды қасиеттерін пайдалансақ, мынау шығады:



Бұл вектор-функция сызықтық комбинация болғандықтан (6) жүйені –да қанағаттандырады, демек ол оның шешуі. Дәлелдеу керегі де осы еді.

30. Сызықты тәуелділік және Вронский анықтауышы.

**Анықтама.** Айталық, -да вектор-функциялар берілген дейік. Осы вектор-функциялар –да сызықты тәуелсіз деп аталады, егер олар үшін осы жиында

 (7)

орындалмайтын болса, мұнда  біруақытта барлығы бірдей нольге тең емес тұрақтылар. Керісінше жағдайда функциялары –да сызықты тәуелді деп аталады.

**Анықтама.** Егер  алсақ, -де үздіксіз туындылары бар  функциялар болар еді. Осы жағдайда

 (8)

 өлшемді анықтауыш **Вронский анықтауышы** деп аталады, мұнда 1-бағана  шешуінің координаталары, 2-бағана  координаталары т.с.с.

**Теорема 1.**  вектор-функциялар -да сызықты тәуелді болса, онда 

**Теорема 2.** Айталық,  вектор-функциялар үздіксіз коэффициенттері бар (6) жүйенің кез келген шешулері болсын дейік. Онда  болса, онда бұл функциялар –да сызықты тәуелсіз, ал  болғанда,  болса, олар –да сызықты тәуелді болады.

**Дәлелдеу: -**ретті біртекті сызықты теңдеудегі дәлелдеуге қараңыз. Ал біз, егер  шешулерінің бар болуы мен жалғыздық шартын қанағаттандырса және  болса, онда  шешулері сызықты тәуелді, 1-теореманың шартына сәйкес Жаңадан шешу құрайық:

 (9)

**Теореманы дәлелдеу идеясы:**Біздің дәлелдейтініміз, егер  болса, онда барлығы бірдей нольге емес тұрақтылары үшін нүктесінде –тің нольдік бастапқы шарттары болуы қажет, яғни . Онда жалғыздық теоремасы бойынша  болады. Осыдан және (9)-дан барлық болмаған да  негізгі функциялар сызықты тәуелді болады.

Сонымен, бізге  болатыны қажет. Егер (9)-ды еске алсақ, мына төмендегі  байланысты алгебралық сызықты біртекті жүйе пайда болады.

 (10)

шарт бойынша мұның негізгі анықтауышы  болады.

Онда сызықтық алгебра теоремасы бойынша (10) біртекті жүйенің айқын емес шешуі бар болады, яғни (10) қанағаттандыратын барлығы бірдей нольге тең емес сондықтан  нүктесінде нольдік



бастапқы шарттары бар. Онда жалғыздық теоремасы бойынша , яғни –да



болады, ал тұрақтылардың бәрі бірдей нольге тең емес, сол себептен негізгі шешу сызықты тәуелді. Ендеше 1-теорема бойынша . Дәлелдеу керегі де осы болатын.

40. Шешудің фундаменталдық жүйелері және олардың барболуы.

**Анықтама.** Кез келген  (6) жүйенің  сызықты тәуелсіз шешулері фундаменталдық жүйе деп аталады. Осы шешулердің  матрицалы шешулердің фунтаменталдық матрицасы болады.

-да  болғандықтан -тің өзгеше емес матрица болатыны қажетті және жеткілікті.

**Есеп:** -тің өзгеше болмауы әдетте оған кері матрица бар болуын қамтамасыз етеді.

1) 

болатынын дәлелдеу керек.

**Нұсқау:**  тепе-теңдігін дифференциялдау керек, қосымша матрицалық тепе-теңдікті



скалярлық тепе-теңдікті дифференциялдау заңы арқылы жүргізуге болатынын еске алу қажет.

2) 

дәлелдеу керек, яғни шешулердің фундаменталдық матрицасы (6/)-ті қанағаттандыратынын дәлелдеу қажет.

**Теорема:** (6/) жүйесі үшін шешулерінің шексіз көп фундаменталдық жүйесі бар болады.

**Дәлелдеу:** Сызықтық теңдеулерде қолданылған ұқсас дәлелдеулерге қараңыз.Кез келген анықтауыш.

 (11)

нүктені белгілеп алып,  шешулерінің фундаметалдық жүйесін құрайық. Ол үшін шешудің бар болу және жалғыздығы жөніндегі теореманы былайша қолданамыз. Айталық  (6/) тің шешуі болсын:

 (12)

(шешуінің бар болуы және жалғыздығы жөніндегі теорема бойынша). Онда анықтама бойынша шығады,  сондықтан 3 қасиеті бойынша құрылған шешулер -сызықты тәуелсіз болады да, келтірілген анықтама бойынша шешулерінің фунтаменталдық жүйесін құрады.

**Қорытынды:** Сонымен, әрбір  ге бір ғана  фундаменталдық жүйе сәйкес келеді, керісінше де айқын:әрбір фундаменталдық жүйеге белгілі бір  анықтауышы сәйкес келеді.Осындай -лар шексіз көп болатыны белгілі,ал бұл айтылған қасиетінің дұрыстығын дәлелдейді.

50. Жалпы шешуінің формуласы.

**Теорема:** Егер  (6) жүйенің кез келген фундаментальдық жүйесі болса, онда (6) жүйенің жалпы шешуі

 (13)

формуламен беріледі, мұнда  кез келген тұрақтылар.

**Дәлелдеу:** а) алдымен кез келген  тұрақтылар болғанда (13) (6/) жүйенің шешуі болатынын көрсету керек, ал бұл 2 қасиеттен шығады.

б) алдын ала берілген кез келген  тұрақтылары үшін

 (14)

шешуі бар болады. (14)-тің бар болуын Пикар теоремасы бойынша дәлелдейміз.

Кез - келген тұрақтылар мен үшін

 (15)

Шешуінің бар болуы және жалғыздығы жөніндегі теорема бойынша әрбір  сияқты шешу өзінің бастапқы мәндері бойынша бірмәнді анықталады.

Егер (15)-тің шешуін көрсете алсақ, онда Пикар теормасына сәйкес (14) шығар еді.

(15) жүйе  анықтауышы бар  шамаларына байланысты сызықтық біртекті емес жүйе, сондықтан да Крамер ережесі бойынша (15)-тің жалғыз ғана шешуі бар болады. Дәлелдеу керегі де осы еді.

60. Есеп:үздіксіз матрицалы (6/) жүйе үшін кез келген  шешулердің -да сызықты тәуелді болғандығын дәлелдеңіз.

70. Шешулерінің фундаменталдық жүйесі бойынша теңдеудің өзін құру.

**Теорема:** Айталық  да үздіксіз коэффициенттер матрицасы бар (6/) жүйенің шешуінің кейбір фундаменталдық жүйесі берілген болсын. Онда (6/) жүйедегі  матрицасы бір мәнді анықталады, атап айтқанда:

 мұнда  шешуінің фундаменталдық матрицасы.

**Дәлелдеу:** Фундаменталдық матрицасын құрайық:



мұнда



..........................



координаттары

Бұл жағдайда  өзгеше емес матрица және  теңдеуін қанағаттандырады.  ке көбейтсек  шығады.

Дәлелдеу керегіде осы еді.

80. Остроградский - Лиувилль формуласы.

Айталық  (6/) жүйенің кез келген  шешуі болсын дейік. Онда  үшін

 (16)

мұнда 

(16) формула Остроградский-Лиувилль формуласы деп аталады.

**Дәлелдеу:** Бір теңдеу үшін осы сияқты мәселені қараңыз. Біздің дәлелдейтініміз

 (17)

тепе-теңдігі,осыны интегралдап (16) ны шығарып алар едік сонымен,



анықтауышын қарастырамыз;

Оның туындысы

 (18)

Шарт бойынша  (6/) жүйенің шешуі. Енді  қарастырайық.

 (19)

(19) теңдік  ауыстыруын (6) жүйеге қойғаннан шығады. (19) ды (18)ге қойсақ мынау шығады:



|анықтауыштардың қасиеті бойынша| =





Сонымен  осыны интегралдап (16)-формуланы аламыз.

Дәлелдеу керегі де осы еді.

***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№12 лекция

Тұрақты коэффициентті біртекті сызықты жүйелер

**Жоспар.**

1.  - ретті біртекті емес теңдеудің оң жағы бойынша дербес шешімі.
2. Сызықтық жүйелер. Нормаль жүйелер.
3.  вектор – функциялар тобының сызықты тәуелсіздігі.
4. Шешімнің фундаменталдық жүйесі. Остроградский – Лиувилль формуласы.
5. Тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық жүйелердің шешімін Эйлер бойынша табуды қайтала?

Лекция мазмұны.

Бұл жүйелердің шешуін былайша табуға болады:

**1)** Жүйені координаттар түрінде жазып, белгісіздерді біртіндеп шығарып тастай отыра, тиісті алгебралық түрлендірулер (егер ол мүмкін болса) бойынша координаттардың біріне сәйкес жүйені -ретті тұрақты коэффициентті бір біртекті сызықтық теңдеуге келтіруге болады. Сәйкес координаттардың көрінісін тауып, оларды шешеміз. Соңында табылған координаттардың басқаларымен байланысын қарастырып, оларды да табуға болады.

**2) Матрицалық әдіс (Эйлер әдісін жалпылау)**

 болған жағдайда (6/) шешуін

 (20)

түрінде іздейміз, мұнда  кейбір сандар, -нольден өзгеше вектор. (20) - ны (6/)-ке қойсақ,

 (21)

шығады. Мұнда  вектор және (21)-ді қанағаттандыратын  саны  матрицасының меншікті мәні және меншікті векторы деп аталады, ал  саны төмендегі теңдеудің түбірі

 (22)

Егер  және  (21)-ді қанағаттандырса, онда (20) формуламен анықталатын , (6/) жүйенің шешуі болады. Мұнда екі жағдай кездесуі мүмкін:

а)  матрицасының меншікті сандары әр түрлі, онда бұлардың әрқайсысына өздеріне тән төмендегі шешулер сәйкес келеді:

 (23)

**Ескерту:** Егер  заттық матрица және түбірлерінің кейбіреулері комплекстік болса, онда сызықтық теңдеулерге қолданылғандай (23)-ті және  арқылы сәйкес заттық форма мен ауыстыруға болады.

в) түбірлері еселік болсын, онда  түбірлерінің әрқайсысына (20) түріндегі  шешуі сәйкес келеді де,  мәніне сәйкес төмендегі ереже бойынша алынатын  тәуелсіз шешулер табылады:



мұнда мәніне сәйкес  матрицасының меншікті және қосылған векторларының толық жүйесі.

**Практикада қолдану схемасы**

1. Егер , онда сипаттама теңдеуін аламыз да, оның түбірлерін табамыз, егер түбірлері әртүрлі болса, онда шешуі мына түрде болады:

 (24)

мұнда 

Тұрақтылар арасындағы байланыс былайша анықталады: (24)-ті (6/) қойсақ, одан алынған тепе-теңдік жүйеден  арасындағы байланыстар табылады.

1. Егер сипаттама теңдеу түбірлері еселік болып келсе, онда (24) орнына мына төмендегі жүйе болады.

 (25)

Тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық жүйелердің жалпы шешімі Эйлер әдісін қолданып табу

 (26)

жүйені қарастырайық. Мұнда -тұрақты сандар, коэффициенттер. (33) жүйе матрицалық түрінде былай жазылады:

не  (27)

Мұнда  -өлшемді вектор, ал өлшемді квадрат матрица, яғни

 (28)

(26) жүйенің шешімі Эйлер бойынша мына түрде ізделеді:

 (29)

Мұнда  матрицасының өзіндік мәні, ал  сандарына сәйкес

осы матрицаның өзіндік векторлары.

1) Егер  матрицасының  өзіндік мәндері қос-қостан әртүрлі болып, ал  осы матрицаның

өзіндік векторлары болса, онда (33) жүйе шешулерінің фундаменталдық жүйесі бар болады да, жалпы шешімі мына формуламен анықталады:

 (30)

Мұнда  сәйкес  шешулер тобын табамыз. Мәселен, шешуінің

1-тобы  сәйкес 

2-тобы  сәйкес 

....................................................................................................

-тобы  сәйкес 

Матрицаның өзіндік векторларын табу үшін

 (32)

сипаттаушы тендеуінен  түбірлерін тауып,  орнына кезекпен  мәндері қойылған жүйеден  өзіндік векторларын табамыз. Мәселен

 (33)

Сонда (33) жүйенің жалпы шешімі

 (34)

**1-мысал:**



Жүйенің дербес шешулері . Осыны тендеуге қойып, меншікті векторларды табу үшін алгебралық жүйе аламыз



Матрицаның меншікті мәндері



теңдеуінен табылады. Олар Шешімдер тобы:

 сәйкес







 сәйкес







Алынған дербес шешулердің жүйе шешуінің фундаметалдық жүйесі болатынын анықтау қажет, ол орындалу үшін  болуы керек.



Демек жалпы шешімі



2) Егер  өзіндік мәні  еселік болып  сызықтық тәуелсіз өзіндік векторлары болса, онда  - ға сәйкес шешімді  дәрежелі векторлық көпмүшеліктің  - ке көбейтіндісін алу керек:



***Мысалы:***



Сипаттаушы теңдеудің түбірлерін табайық



Берілген жүйенің шешімін



түрінде іздейміз, бұл шешулер сызықты тәуелсіз шешулер бола алмайды, сондықтан басқа бір шешулер іздеу керек.



 - ге сәйкес  бұдан 

 осы шешумен сызықты тәуелсіз болатын шешім , сипаттауыш теңдеу түбірі еселік болғандықтан

 түрінде ізделеді. Осы екінші шешімдерді берілген теңдеуге қойсақ,



Бұл теңдеулерден



Осыдан

 және  Сондықтан

 және  екі сызықты тәуелсіз шешімдер аламыз.

Демек берілген жүйенің жалпы шешімі



3) Егер  матрицасының меншікті сандары арасында комплекстік сандар болса, онда  матрицасы нақты болған жағдайда, жүйенің комплекстік шешімінен  санына сәйкес екі сызықты тәуелсіз нақты шешім бөлініп алынады.

***Мысалы:***





 түбірлеріне сәйкес комплекстік түрдегі шешімі  мұнда -векторлар да комплекстік сандар.  сандарын 

теңдеуінен табамыз, олар 

Сондықтан









Сонымен жүйенің екі заттық шешімі табылды. Жалпы шешім:



1. ***Белгісізді шығару әдісі:***

Бұл әдіспен теңдеулер жүйесін бір белгісізі бар жоғарғы ретті теңдеуге келтіріп шығаруңа болады. Әдіс қиын емес теңдеулер жүйесін шығаруға қолайлы.

**1. Мысал.** Жүйенің шешімін табу керек:



Шешуі: Жүйенің бірінші теңдеуінен

, (\*)

осыдан туынды аламыз  , жүйенің екінші теңдеуіне қойып,  тұрақты коэффициентті екінші ретті теңдеу аламыз. Біртекті теңдеуінің сипаттамалық теңдеуі

.

Біртекті теңдеудің шешімі .

Дербес шешімін іздейміз , онда .

Сонымен .

Жалпы шешімі . Осыдан , оны (\*)-ға қойып,  аламыз.

*Жауабы:* , .

1. ***Эйлер әдісі.***

(1) жүйені векторлық түрде жазамыз:

, (2)

мұнда .

(2) жүйенің шешімін



түрінде іздейміз, мұнда - A матрицасының өзіндік мәні,

, (3)

теңдеуінен  - A матрицасының өзіндік векторын-ға сәйкес табамыз.

Дербес жағдайларды қарастырамыз:

1. Егер - әртүрлі нақты сандар болса, - сәйкес өзіндік векторлар, онда шешімді



түрінде жазамыз.

1. Егер - еселі , k- еселі түбірлер болса,

а)  сонша өзіндік векторлар болады, онда шешімді



түрінде жазады.

б) m (m<k) сызықты тәуелсіз өзіндік вектор, онда шешімді



берілген жүйеге қойып, тұрақтыларды табамыз.

3) Егер - комплекстік санда, әрбір  -ға сәйкес шешім , мұнда  - Эйлер теңдеуі. Мысал қарастырайық.

**2. Мысал.** Жүйенің шешімін табыңыздар



Шешуі: 1) Сипаттамалық теңдеуін құрамыз:

,

бұдан



2) Өзіндік векторларды анықтаймыз:

 болғанда, өзіндік векторды анықтайтын теңдеулер

,

түрінде болады. Бұдан , оның шешімінің біреуі (2;1) – өзіндік вектор, осыдан 

 болғанда өзіндік векторды анықтайтын теңдеулер



түрінде болады. Бұдан , оның бір шешімі (-4;1) – өзіндік вектор, осыдан 

3) Жүйенің жалпы шешімі:



**3. Мысал.** Жүйенің шешімін табыңыз:



Шешімі: 1) Сипаттамалық теңдеуден өзіндік мәндерді табамыз:

,

осыдан



үшінші жағдай.

2) Өзіндік векторларды анықтаймыз.

 болғанда, өзіндік векторларды анықтайтын теңдеулер

,

түрінде болады, осыдан , оның бір шешімі(1;-i) – өзіндік вектор.

Жүйенің фундаментальды шешімі



және

 және 

онда



 - түйіндес санға сәйкес шешім  түбірімен сәйкес келеді.

*Жауабы:* 

**4. Мысал.** Жүйенің шешімін табу керек

 (\*\*)

Шешімі. 1) Сипаттамалық теңдеуі:

, (\*\*\*)

осыдан



еселі түбірлер.

2) Сызықты тәуелсіз өзіндік векторлар санын табамыз:

 болғанда, (\*\*\*) теңдеуден



матрицасын аламыз, оның реті n=2, ранг r=1.

Сызықты тәуелсіз өзіндік векторлар саны m = n - r =1.

 түбірі еселігі , яғни , онда шешімді  ретті көпмүшеліктің  көбейтіндісі ретінде қарастырамыз, яғни



және

 ;

(\*\*) жүйеге қойып,



сәйкес коэффициенттерін теңестіре отырып,

бірінші теңдеуден



екінші теңдеуден



аламыз. Осыдан

,  белгілесек, онда  .

3) Берілген жүйенің жалпы шешімі:



Нормаль түріне келтірілмеген



жүйесін шешу үшін келесі сипаттамалық теңдеуді құрамыз

.

Теңдеудің түбірлерін табамыз. Шешімді алдыңғы есептей жазамыз.

**5. Мысал.** Жүйенің шешімін табу керек:



Шешуі. Сипаттамалық теңдеуін құрамыз

.

Бұдан , .

 болғанда, өзіндік векторларды табамыз



Шешім: 

 болғанда, өзіндік векторларды табамыз



Шешім: 

Жүйенің жалпы шешімі



***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№ 13 лекция

Орнықтылық теориясы жөнінде негізгі түсініктер.

Анықтамалар. Есеп қою мәселесі

**Жоспар.**

1. Орнықтылық теориясы жөнінде негізгі түсініктер.
2. Ляпунов бойынша орнықтылық. Негізгі анықтамалар.
3. Есеп қою мәселесі
4. 2-ретті сызықтық теңдеулер жүйесі және оларды шешу.
5. Ерекше нүктелер түрлері және оларды орнықтылыққа зерттеу.

Лекция мазмұны.

Орнықтылық теориясының алғашқы мәселелері механикадан шыққан. Белгілі бір математикалық есептерге байланысты қарастырылып отырған механикалық жүйенің барлық қалпы, жағдайы, күйі ылғи да байқала бермейді. Оның себебі, механикалық жүйенің алғашқы күйіне әсер ететін онша байқауға болмайтын күштер не кейбір шағын ауытқулардың әсер етуіне байланысты.

Негізінде жүйенің тепе-теңдік қалпын немесе қозғалысын әртүрлі күштер кейде аз ауытқытады, ал кейде өте күшті ауытқытады.

Ауытқу кезінде дененің (материалдық нүктенің) тепе–теңдік қалпы немесе қозғалысы аз ауытқитын болса, оны орнықты қозғалыс деп, ал көп ауытқитын болса орнықсыз деп атайды.

**Есеп қою мәселесі**

Материалдық нүктенің кез келген күйі (мәселен, тынышытық қалпы немесе қозғалыстағы күйі) төмендегі дифференциалдық теңдеулер жүйесі арқылы дәл не дәлге жуық бейнеленген болсын дейік

 (1)

мұнда  (уақыт)-тәуелсіз айнымалы, ал  белгісіз, ізделетін -ның функциялары. Материалдық жүйенің күйі мына төмендегі шешіммен сипатталытыны белгілі

 (2)

бұл шешу  болғанда  болады, яғни

 (3)

Геометриялық тұрғыдан (2) шешім  кеңістігінде бастапқы  нүктесі арқылы өтетін интегралдық қисықты өрнектейді.

Егер  бастапқы  мәнінен басқа бір мән қабылдаса, онда ол осы интегралдық қисыққа  нүктесі орнын алар еді.

Айталық, бір  мезгілінде жүйеге азуақыт ауытқу әсер етеді дейік (кейбір күштер немесе басқа бір себептер), бұл аз уақыт әсер еткендіктен бастапқы шарттарды ғана өзгертуге мұршасы келеді де, жалпы жүйе жаңа, басқа бір күйде болады. Осы күйіне сәйкес шешім













 (4)

18-сызба

болсын дейік. Бұл шешім  болғанда , яғни

. (5)

(4) шешімге енді  нүктесінен өтетін басқа бір интегралдық қисық сәйкес келеді де,  бір кезде  нүктесіне айналады. Осы кездегі материалдық жүйеге әсер еткен күш, не бір себептер лезде, қас қаққанша әсер етіп, өзінің әсерін тоқтатты делік. Осы жағдайда жүйе ең алғашқы қалпына келе ме жоқ па? Келмеген жағдайда  бастапқы мезгілдегі  аз шама болғанда, барлық  үшін  қашықтығы аз шама бола алама, жоқ па? (18-сызба) Көптеген практикалық есептерді шешкенде,  (уақыт) өте үлкен, тіпті шексіз үлкен мәндер қабылдайтыны ақиқат. Жоғарғы айтылғандарға байланысты дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің ішінен бастапқы шартқа байланысты шешімі аз өзгергенде, кез келген  үшін ( қандай үлкен болсада) одан онша көп өзгермейтін шешімді бөліп ала білу қажет. Осындай шешімдерді біз бұдан әрі Ляпунов бойынша орнықты деп атаймыз. Сонымен есеп былайша қойылады, егер

 (6)

өте аз шама болғанда,

 (7)

бар  үшін аз шама бола ала ма, жоқ па?

Басқаша айтқанда

 (8)

айырмасының шамасын, өзгеруін қарастыру қажет. Сондықтан (8)-ді қанағаттандыратын төмендегі дифференциалдық теңдеуді қарастырайық

немесе

 (9)

жүйе шығады.

**1-Анықтама.** Егер

 (10)

болғанда  болғандықтан, (10) жүйенің шешімі болады. Бұдан былай (10) болғанда  болатын жүйені ауытқитын қозғалыстын дифференциалдық теңдеулер жүйесі деп атайды, ал (10) нольдік шешімнің өзін ауытқымайтын қозғалыс деп атайды.

**2-Анықтама.**  Ляпунов бойынша орнықты деп аталады, егер кез келген  үшін  саны бар болып



теңсіздіктер жиынтығынан барлық  үшін



шығатын болса.

**3-Анықтама.**  шешімі жалпы орнықты болса, ол асимптотикалық түрде орнықты болады, егер

 (11)

Орнықтылық қасиеттері болмайтын барлық басқа шешімдер орнықсыз деп аталады.

***Мысал:***

 (12)

теңдеуінің шешімі  тұрақты сан болғанда орнықты, ал  болғанда асимптотикалық түрде орнықты,  болғанда орнықсыз.

Себебі, (12) теңдеудің  шартын қанағаттандыратын шешімі

 (13)

Бұл  және  болғанда 

Сондықтан  болғанда , егер  болса

Ал  болғанда  кез келген  үшін 

ал  болғанда орнықсыз, себебі  қандай аз шама болса да (13) шешім  қанағаттандырмайды.

Тұрақты коэффицентті 2-ретті сызықтық теңдеулер жүйесін орнықтылыққа зерттеу

Төмендегі екі сызықтық теңдеуден тұратын тұрақты коэффицентті жүйені қарастырайық

 (14)

Мұның шешімін

 (15)

түрінде іздейік

(15)-ті (14)-ке қойып, екі жағын -ға қысқартсақ,

 (16)

шығады. (16) жүйенің мардымсыз емес шешімдері болу үшін

 (17)

болу керек. Осы сипаттаушы теңдеуден екі түбір  және  табылатыны белгілі.

Координаттар жүйесінің бас нүктесін ерекше нүкте деп алынатыны белгілі, онымен бірге бас нүктені қозғалыстың тыныштық қалпы деп те атайды.

“Ерекше нүктелерді кластарға бөлу” мәселесінде (14) сияқты жүйенің 2-теңдеуін 1-теңдеуге мүшелей бөлгеннен шыққан теңдеудің интегралдық қисықтарының бас нүктенің аймағында қалай өзгеретіні, орналасуы жөнінде егжей-тегжей айтылған еді.

Сондықтан оларды қайталамай орнықтылықты зерттеуге бірден қолдана береміз.

(14) жүйенің орнықтылығын зерттеу үшін мына жағдайларды қарастырамыз:

1)  және  болсын дейік. Бұл жағдайда (14) жүйенің жалпы шешім

 (18)

болатыны белгілі.

Мұнда -кез келген тұрақтылар;

 және  қосылғыштардағы  және  болғандықтан, нольге ұмтылады.

Демек интегралдық қисықтар траекторияның барлық нүктелерінде  тыныштық қалпына (нүктесіне) жуықтайды, шүйіледі. Бұл ерекше нүкте түйін деп аталады, ал қозғалыс жалпы асимптотикалық түрде орнықты. (19-сызба)

Екі траекториялар сәйкес кез келген тұрақтылар  және  болғанда түзу сызықтар болатынын еске салайық

19-сызба

2)  және  болсын дейік. Нүктелердің қозғалатын траекториясы 1) жағдайдан өзгермейді, өйткені  ны - мен ауыстырсақ 1)-жағдайды аламыз. Бірақ, нүкте қозғалысының бағыты қарама-қарсы болады,  ұмтылғанда траектория арқылы қозғалатын нүктелер бас нүктеден алшақтай, алыстай береді. Бұл жағдайда да түйін, ал  нольдік шешімі орнықсыз болады. (20-сызба)

20-сызба

3)  (немесе ) болса, онда тыныштық нүктесі немесе  нольдік шешімі орнықсыз, себебі математикалық тұрғыдан (18) жалпы шешімінде  және  бір қосылғыштың есебінен  да  ұмтылады да, траектория нүктелері бас нүктеге жақындай береді, бірақ екінші қосылғыш есебінен  да  ұмтылады да, бас нүктеден мейлінше алыстап кетеді. Бұл жағдайда геометриялық тұрғыдан интегралдық қисықтардың бас нүкте аймағында орналасуы ершік (седло) деп аталады. (21-сызба)

21-сызба

4) (17) сипаттаушы теңдеудің түбірлері таза жорамал сандар, яғни  болсын, онда (14) жүйенің жалпы шешімі

 (19)

Мұнда  және  кез келген  және  тұрақтылардың кейбір сызықтық комбинациялары.

Барлық шешулер -ның периодты функциялары, бұл жағдайда нүкте траекториялары тұйық қисықтар болатыны белгілі, әрі бұлар ерекше нүктені қоршап тұрады. (19)-дағы -мәндеріне байланысты олар центрі бас нүктеде болатын эллипстер, кейбір жағдайда шеңберлер не басқа бір тұйық қисықтар болуы мүмкін. (22-сызба)

*0*

22-сызба

Бұл жолы тыныштық нүктесі центр деп аталады, ал қозғалыс орнықты, өйткені траектория нүктелері кез келген  болғанда да бас нүктеге жақынырақ келеді,  өзінде асимптотикалық орнықтылық жоқ.

5) (17) сипаттаушы теңдеудің түбірлері комплекстік сандар, яғни  болсын, онда (14) жүйенің жалпы шешімі

 (20)

мұнда  және  кез келген  және  тұрақтылардың сызықтық комбинациялары.

Мына 2 жағдайды жеке қарастырайық

а) 

Жоғарыда 4 – жағдайда  (20) жалпы шешімнің екінші көбейткіштерінің нүкте траекториялары  тыныштық нүктесін қоршайтын тұйық қисықтар болатыны айтылып еді, ал бірінші көбейткіштері  да , яғни



Бұл жағдайда (20) дағы екінші көбейткіштердің нүкте траекториялары бас нүктені айналғанда тұйықталмайды, траектория спираль бойынша бас нүктеге жақындай береді. (23-сызба)

(14) жүйенің тыныштық нүктесі,  нольдік шешуі жалпы асимптотикалық түрде орнықты, ал интегралдық қисықтардың бас нүкте аймағында орналасуы фокус деп аталады.

*0*

*х*

*у*

23-сызба

б) 

Бұл жағдайда

а) жағдайынан -ны --ға айырбастағаннан шығады, демек нүкте траекториясы қарама-қарсы бағытта қозғалады, бас нүктеден спираль бойынша алыстай береді, қозғалыс орнықсыз, ал интегралдық қисықтардың орналасуы бұрынғыша фокус деп аталады.

б)  еселік түбірлер

(14) жүйенің жалпы шешуі

 (21)

а) 

Бұл жағдайда барлық траекторияға бас нүктеде ортақ жанама болатын  түзуі (24-сызба) пайда болады. Егер  бола қалса, онда

 (22)

-кез келген тұрақтылар, онда нүкте траекториялары  түзулері (25-сызба) болады.

24-сызба

*х*

*у*

*0*

25-сызба

Бұл екі жағдайда да интегралдық қисықтардың бас нүкте аймағында орналасуы түйін деп аталады, ал қозғалыс  нольдік шешімі орнықты, айырмашылығы 25 – сызбадағы түйін дикритикалық түйін деп аталады.

в) 

Нүкте траекторияларының орналасуы а) жағдай сияқты, бірақ траектория бойынша қозғалыс қарама – қарсы, сондықтан қозғалыс  нольдік шешімі орнықсыз.

**Мысалдар:** Мына төмендегі жүйелерді орнықтылыққа зертте?

1)

 

Сипаттаушы теңдеу түбірлері комплекстік сандар, оның нақты бөлігі оң таңбалы болғандықтан қозғалыс ( шешімі)-орнықсыз фокус.

2)

  - орнықты центр.

3)  және -ның мәндеріне байланысты орнықтылыққа зерттеп, тыныштық қалпының () қандай болатының көрсетіңдер?



Нүктенің сипаттаушы теңдеуі

 

10. Егер  болса, онда 

Матрицаның өзіндік саны немесе сипаттаушы теңдеудің түбірі таза жорамал сан болғандықтан, тыныштық қалпы ( нольдік шешімі) орнықты центр.

20. -орнықты фокус.

30. -орнықты түйін.

40. -орнықсыз фокус.

50. -орнықсыз түйін.

*0*

26-сызба

4) 2) – мысалда берілген жүйе қозғалысының орнықты центр болатынын көрсеткен едік, енді центрді (бас нүктені) қоршап тұрған қисықтың түрін анықтайық. (26-сызба)

 қатынасын алайық, немесе .

Бұл  болғандықтан толық дифференциалды теңдеу.



 - эллипстер тобы.

***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
3. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
4. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№14 лекция

Тұрақты коэффициентті  сызықтық теңдеулерден тұратын жүйені

орнықтылыққа зерттеу ережелері

**Жоспар.**

1. Жүйені орнықтылыққа зерттеу ережелері.
2. Көпмүшеліктің барлық түбірлерінің нақты бөліктерінің теріс таңбалы болатын белгілері
3. Жүйені бірінші жуықтауы бойынша орнықтылыққа зерттеу

Лекция мазмұны.

16-шы лекцияда (14) жүйенің орнықтылығын жан-жақты зерттеген едік. Бұдан мынадай қорытынды жасауға болады, (14) жүйенің жалпы шешімдерінің түрлеріне байланысты  ұмтылулары, яғни нүктелер траекториясының бас нүктеге әртүрлі жылдамдықпен жақындап, шүйілуі жүйенің сипаттаушы теңдеулерінің түбірлерінің нақты бөліктерінің таңбасына байланысты екен, басқаша айтқанда теріс таңбалы болса орнықты, ал оң таңба болса орнықсыз.

Осы қорытындыға сәйкес жоғарғы ретті коэффициенттері тұрақты жүйелердің орнықтылығын зерттеу үшін ережелер келтіруге болады.

Мына төмендегі жүйені қарастырайық:

 ,  (23)

  өлшемді квадрат матрица.

 (24)

*А* матрицасының анықтауышы, сипаттаушы теңдеу.

**1–ереже:** Егер (24) сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің нақты бөліктері теріс таңбалы болса, онда (23) жүйенің барлық шешімдері жалпы асимптотикалық түрде орнықты.

Себебі, (23) жүйенің жалпы шешіміндегі  көбейткіштері да нольге ұмтылады, сондықтан 

**2–ереже:** Егер (24) сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің ең жоқ дегенде біреуінің нақты бөлігінің таңбасы оң болса, онда (23) жүйенің барлық шешімдері орнықсыз.

Себебі, (23) жүйе жалпы шешіміндегі бір көбейткіш  болғандықтан 

**3–ереже:** Егер (24) сипаттаушы теңдеу түбірлері таза жорамал не нольдерге тең болса, ал қалған түбірлері, егер олар бар болса, нақты бөліктері теріс болғанда, (23) жүйенің барлық шешімдері орнықты, бірақ асимптотикалық орнықтылық болмайды.

***Мысалдар:***

1)



Қысқаша  жүйені орнықтылыққа зерттеңдер?



Бір түбірі  болғандықтан, ереже бойынша  шешімі орнықсыз.

2)

 



Ереже бойынша  шешімі асимптотикалық түрде орнықты.

Көпмүшеліктің барлық түбірлерінің нақты бөліктерінің теріс таңбалы болатын белгілері

Өткен лекцияларда тұрақты коэффициентті сызықтық теңдеулерді орнықтылыққа зерттеу оның сипаттаушы теңдеуінің түбірлерінің нақты бөліктерінің таңбасын зерттеуге саяды.

Негізінде жоғарғы дәрежелі көпмүшеліктің барлық түбірлерін табу оңай емес. Осыған байланысты дәлелдемесіз төмендегі теоремаларды келтірейік:

**1-теорема:** Тұрақты коэффициентті көпмүшеліктің барлық түбірлерінің нақты бөліктері теріс таңбалы болу үшін, көпмүшеліктің барлық коэффициенттері бірдей таңбалы болуы қажетті.

Бұл теорема квадраттық көпмүшелік үшін қажетті ғана емес, әрі жеткілікті.

Мәселен

 (25)

алайық (немесе , мұнда )

(25) үшін  шарты қажетті және жеткілікті. Егер  және  түбірлері болса, онда

 (26)

 болғандықтан екі түбіріде нақты сандар және олардың таңбалары бірдей болады, ал қосындысы теріс сан болғандықтан (), екі түбіріде теріс таңбалы.

Ал егер түбірлері комплекстік сандар болса, яғни 



Сондықтан  болғандықтан 

Егер берілген екі теңдеуден тұратын жүйенің немесе 2 – ретті дифференциалдық теңдеудің сипаттаушы теңдеуі

 (27)

болса, онда теңдеуді коэффициенттері бойынша орнықтылыққа зерттеу былайша жүргізіледі:

1. Егер  болса, онда нольдік шешімі асимптотикалық орнықты.
2. Егер  болса, онда асимптотикалық орнықтылық болмайды.
3. Егер  болса (яғни түбірлері таза жорамал), онда нольдік шешімі орнықты, мұнда да асимптотикалық орнықтылық жоқ.

1-теорема жоғарғы дәрежелі көпмүшелік үшін қажет шарт болғанмен жеткілікті бола алмайды, оны мына мысал арқылы көрсетсек жеткілікті.

 көпмүшеліктің барлық коэффициенттері оң таңбалы, бірақ түбірлері  болғандықтан, кейінгі екеуінің нақты бөліктері оң таңбалы. Сондықтан кез келген дәрежедегі көпмүшеліктің түбірлерінің нақты бөлігінің таңбалары теріс болуының шарттарын көрсетейік. Ол үшін

 (28)

алайық.

**Гурвиц теоремасы:** Нақты коэффициентті (28) көпмүшеліктің түбірлерінің нақты бөліктерінің теріс таңбалы болуы үшін Гурвиц матрицасының барлық бас диагоналдық минорларының оң таңбалы болуы қажетті және жеткілікті.

Гурвиц матрицасын алайық.

 (29)

Бас диагоналдық минорлары:

Сонымен негізгі шарт

 болуы қажетті және жеткілікті.

 болатынын еске алсақ, ең соңғы минорды  мен ауыстыруға болады.

Гурвиц теоремасының шарттарын 2, 3, 4 – дәрежелі көпмүшеліктерге коэффициенттері арқылы қолданылатынын көрсетейік.

а) 



б) 



в) 



(28) – де  болса, басқа барлық коэффициенттерді Гурвиц шарты бойынша оң таңбалы болатынын еске алайық.

***Мысал:***

1)

Теңдеудің барлық шешулері орнықсыз, себебі сипаттаушы теңдеу коэффициенттерінің біреуі теріс таңбалы.

2) 

Барлық шешулері асимптотикалық орнықты, себебі



Жүйені бірінші жуықтауы бойынша орнықтылыққа зерттеу

Мына төмендегі жүйенің нольдік шешімін орнықтылыққа зерттеу керек болсын:

 (30)

Мұнда  болатыны белгілі,  функцияларының бәрі барлық  айнымалылары бойынша кез келген  болғанда бас нүктенің аймағында дифференциалданатын функциялар. Сол себептен де

 (31)

Мұнда  бас нүкте аймағында реті бірден жоғары шексіз аз шамалар  деп алсақ,

 (32)

Жүйенің нольдік шешуі арқылы барлық дербес туындылар  тұрақты шамалар болуы мүмкін, яғни



Бұдан әрі былайша пайымдаймыз. Бас нүкте аймағында  аз шама болғанда (32) жүйенің басты мүшелер сызықтық мүшелері болып есептеледі.

Сондықтан көпшілік жағдайда  сызықтық емес мүшелері жүйенің орнықтылығына әсер ете қоймайды деп есептелініп, ол мүшелерді еске алмай (32) жүйені төмендегі жүйемен ауыстыруға болады.

 (33)

Бұл жүйе (32) жүйенің бірінші жуықтауы деп аталады.

Алғаш рет бұл мәселелерді қарастырған А.М. Ляпунов, ол (32) жүйені қандай жағдайда бірінші жуықтауы бойынша зерттеуге болатынын толық көрсетті.

Практикада зерттеу жұмыстарында көбірек қолданылатын тұрақты коэффициентті стационар жүйені қарастырайық

 (34)

Жоғарғы айтылғандарға байланысты

 (35)

жүйені аламыз.

Ережелерді қолдансақ:

1) Жүйенің бірінші жуықтауы бойынша алынған сипаттаушы теңдеу түбірлерінің барлығының нақты бөлігі теріс таңбасы болса, нольдік шешуі асимтотикалық түрде орнықты.

2) Жүйенің бірінші жуықтауы бойынша алынған сипаттаушы теңдеу түбірлерінің ең жоқ дегенде біреуінің нақты бөлігі оң таңбалы болса, нольдік шешуі орнықсыз.

***Мысалдар:*** 10  шешімінің орнықтығын зертте?



 бірінші жуықтауын аламыз.



 шешімі орнықсыз

20 

орындарына қойып, бірінші жуықтауын аламыз. Зерттегенде  шешімі орнықсыз.

Егер (35) жүйенің сипаттаушы теңдеулерінің түбірлері нольдер, таза жорамал сандар немесе аралас болып келген жағдайда жүйені бірінші жуықтауы бойынша зерттеуге болмайтынын алғаш рет Ляпунов егжей-тегжей зерттеп, оны критикалық жағдай деп атаған.

Өткен лекцияларда дифференциалдық теңдеуге жүйенің орнықтылығын зерттегенде олардың шешімін тауып және сипаттаушы теңдеу түбірлерінің нақты бөліктерінің таңбасын білу қажет болған. Мұндай әдістер Ляпуновтың тура әдісіне (1-әдісіне) жатады.

Орнықтылық теориясында бұдан басқа 2-әдіс қолданылады, оның идеясы мынада:

Берілген жүйенің шешімін таппай-ақ, оның орнықтылығы оған сәйкес Ляпунов функциясы деп аталатын тұлға арқылы зерттеледі, бұл әдісті ең алғаш рет Ляпунов ұсынған.

***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
2. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
3. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

№15 лекция

**1 - ретті дербес туындылы теңдеулер жөнінде түсінік. Бірінші ретті дербес туындылы ДТ. Коши есебі. Екі тәуелсіз айнымалы жағдайындағы Коши есебі шешімінің бар және жалғыз болуы туралы теорема. Интегралдау.**

**Жоспар.**

1. 1-ретті дербес туындылы сызықты теңдеулер.
2. Жүйенің алғашқы интегралы.
3. Сызықты емес дифференциалдық теңдеулер жүйесі.
4. Бірінші ретті дербес туындылы теңдеу үшін қойылған Коши есебінің интегралдануы.

Лекция мазмұны.

 (1)

теңдеу берілсін, мұнда  облысында тәуелсіз айнымалылар, -үзіліссіз дифференциалданатын функция, ал Ғ өз аргументтерінің берілген функциясы. Осындай теңдеу 1-ретті дербес туындылы теңдеу деп аталады.

Бұл теңдеулерді шешу мәселесі, сипаттаушы жүйе деп аталатын жай дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешімге келтірілетінін көрсетейік. Алдымен, мұны сызықтық теңдеулер үшін қарастырайық.

1-ретті жай дифференциалдық теңдеулер үшін жалпы шешімі бір ғана кез келген тұрақты шамаға байланысты, ал жүйе үшін n кез келген тұрақтыға байланысты болатыны жоғарыда айтылған еді. Ал, дербес туындылы теңдеулер теориясында, 1-ретті теңдеудің жалпы шешімі бір ғана кез келген функцияларға, n-ретті теңдеудің жалпы шешімі п кез келген функцияларға байланысты болады. Бұл мәселелерге жалпы түрде С. Ковалевскаяның шешімнің бар болуы мен жалғыздығы жөніндегі теоремасы жауап бере алады.

*Мысалы:*

**

***Ескерту.***Дербес туындылы теңдеулер теориясында, сонымен бірге дербес туындылы теңдеулер жүйесі қарастырылады. Осы жағдайды дербес туындылы 1-ретті жүйе үшін қарастырайық.

(1) теңдеудің сызықтық болған жағдайындағы 2 түрін қарастырайық.

1) біртекті сызықтық түрі:

 (2)

мұнда облысындағы кейбір функциялар;

2) біртекті емес сызықтық түрі:

 (3)

мұнда аргумент,  - ізделінетін функция, да анықталған функциялар, мұнда тің өзгеру облысы, ал дің өзгеру облысы.

Біздің мақсатымыз, жоғарыдағы теңдеулердің  облысында  жалпы шешімін табу, егер мына төмендегі шарттар орындалатын болса:

1. функцияның өзі және оның барлық дербес туындылары үзіліссіз;
2. (1) теңдеуге қойғанда сол жағы 0-ге тепе-тең болуы қажет.  
   Мұнда бұрынғыдай интегралдық қисықтар емес, беттер болады.  
   2)-ні қарастырайық, мұнда біріншіден,  облысында  коэффициенттері өздері 1-ретті дербес туындыларымен бірге үзіліссіз, екіншіден, әрбір  нүктесінде  теңсіздігі орындалады деп жоримыз. Енді  облысында қосымша

 (4)

жай дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырайық. (4) жүйе дифференциалдық жағдайда симметриялық түрдегі сипаттаушы жүйе деп аталады да, ал n-1 теңдеуден тұрады. (4) жүйені былайша түсіну қажет: кез келген  нүктесін алайық.

2)-шарт бойынша, бұл нүктеде ең жоқ дегенде коэффициенттерінің біреуі  сондықтан,  нүктесінде үздіксіз болғандықтақ ол  аймағы болады да, онда



 аймағында (4) жүйені былай түсіну керек, алдымен оны былайша жазайық:

 (5)

(5) жүйеде лерді аргумент ретінде, ал лердің ізделетін функциясы деп қарастырамыз. Онда (5)-ті қайтадан былай жазуға болады:

 (6)

 аймағында (5) және (6) жүйелер өзара пара-пар. Енді осы жүйе үшін кез келген бір кіші тұйықталған  аймағында Пикар теоремасының орындалатынын көрсетейік.

Шындығында ешқандай лерсіз-ақ 

а)  бойынша үзіліссіз екені;

в) әрбір функция  бойынша Липшиц шартын қанағаттандыратыны орындалады.

Бұл үшін әрбір функцияның дербес туындылары   үзіліссіз және кейбір аймақта шектелген болуы жеткілікті.

Мына қатынасты алайық: 

мұнда, шарт бойынша,  коэффициенттері өздерінің дербес туындылары мен бірге үзіліссіз болғандықтан, бөлшектің алымы мен бөліміндегі шамаларда үзіліссіз функциялар болады. Сондықтан, кез келген компакты тарылу болса да,  үздіксіз болып шығар еді, демек ол Вейерштрасс теоремасы бойынша де шектелген, бұған қоса бұл аймақта  функциясының әрқайсысы Липшиц шартын қанағаттандырады. Демек,  әрбір нүкте арқылы (6) немесе (5)-тің бір ғана шешімі өтеді. Бұл аймақтардың жинағы сайып келгенде,  облысын жабатын болады.

**Анықтама.**  облысында жай дифференциалдық теңдеулердің кез келген жүйесі берілсін.

 (7)

және Пикар теоремасының шарттарын қанағаттандыратын болсын. (7) жүйенің алғашқы интегралы деп, әрбір шешім үшін түрақты мәнін сақтайтын  функциясын айтады, яғни, егер  (7) жүйенің шешімі болса, онда тандап алынған шешуге байланысты болатындай  тұрақты бар болады.

Бізге анализден көп өлшемді түріндегі айқындалмаған функция жөніндегі теорема туралы кейбір мағлұматтар қажет.

1) Айталық  кез келген  функциялар (7) жүйенің бастапқы интегралдары болсын дейік. Осы жоғарыдағы функциялар тәуелді (сызыкты түрде емес, функционалдық түрде) болады, егер



болатындай функция бар болса. Негізінде сызықтық тәуелділік  - сызықтык функция болған жағдайдың дербес түрі. Кері жағдайда функциялар тәуелсіз.

2) (7) жүйенің Пикар теоремасының шарттары орындалғанда n тәуелсіз алғашқы интегралдары болады.

3) Көп өлшемді түріндегі айқындалмаған функция жөніндегі теорема. Енді (2) теңдеудің жалпы шешімін құруға көшейік. Айталық, (4) жүйенің белгісіз (n-1) бастапқы интегралдары



болсын дейік. Бұл жағдайда, (2) теңдеу жалпы шешімінің

 (8)

(мұнда кез келген дифференциалданатын функция) формуласы арқылы берілетінін көрсетейік. Шынында, (4) жүйенің әрбір интегралдық қисығының бойымен  болар еді, өйткені әрбір интегралдық қисық бойында  алғашқы интегралдар тұрақты мәндер қабылдайтыны белгілі, демек әрбір интегралдық қисық бойында (7)-нің оң жағы да тұрақты шама болар еді. Сондықтан,





 (9)

(4) жүйенің интегралдық қисықтарында



Осыны (9)-ға қойсақ



шығады, мұнда  аламыз, өйткені (4)-те алымдары ноль болар еді.

Сонымен, (8) сияқты кез келген дифференциалданатын  функциясы (2)-ні қанағаттандыратын болып шықты, яғни (4) жүйе интегралдық қисықтарында (2) теңдеудің шешімі болады деген сөз.

Енді осындай функция барлық  облысында шешімі болатыньщ көрсету қажет.

Жоғарыда көрсетілгендей, (4) үшін шешімінің бар болуы мен жалғыздығы бойынша, кез келген  нүктесі арқылы жалғыз ғана интегралдық қисық өтеді және (4)-тің интегралдық қисықтарының жиынтығы  облысын жабатын болады. Сонымен, бірінші, бөлімі дәлелденді. Енді екінші бөліміқ яғни (8)-ден (2)-нің барлық шешімдерін алуға болатынын көрсетейік.

Айталық,  (2)-нің  облысындағы кез келген шешімі болсын дейік. Осыны (8) түріндегі формуладан алуға болатынын дәлелдейік.

Дәлелденген бірінші бөлімге сәйкес, (4) кез келген алғашқы интеграл (2)-нің шешімін береді, демек (2) үшін n шешім аламыз:



Бұлар шешім болғандықтан (2)-ні тепе-теңдікке айналдыратын болады:

 (10)

(10)-ды  айнымалылар бойынша біртекті сызықтық жүйе ретінде қарастырамыз. (2)-де  шамаларына қойылған шарттарға сәйкес әрбір нүктесінде ең жоқ дегенде коэффициенттерінің біреуі нольге тең емес, яғни кез келген  нүктесінде (10) жүйенің шешімі нольдік емес, онда алгебраның осыған сәйкес теоремасы бойынша, анықтауышы нольге тең болуы керек:

 (11)

Мұнда айқындалмаған функция жөніндегі бүрынырақ келтірілген теорема бойынша,  функцияларының өзара функционалдық байланысы болады, яғни 

 (12)

Алғашқы интегралдар  тәуелсіз болғандықтан, (11)-де ең жоқ дегенде n-1 ретті оның соңғы n-1 жазық жолында орналасқан бір минор , демек (12)  бойынша айқындалады (айқындалмаған функция жөніндегі теорема бойынша), яғни  мұнда  - кейбір дифферен-циалданатын функция. Дәлелдеу керегі де осы еді. Енді (3) біртекті емес сызықтық теңдеуді қарастырайық. Бұл жағдайда  коффициенттері ізделетін функцияларға тәуелді болады (ылғи осылай болмауы да мүмкін).

Біздің мақсатымыз - шешу әдісіне қолайлы теңдеу құру.

**Идеясы.** (2) түріндегі теңдеуді шешуге қолданылған әдіске келтіреміз, атап айтқанда жалпы шешімін

 (13)

айқындалмаған түрінде іздейміз, мұнда  облысында



Ескерту: (13) форма үшін  шарт азырақ, себебі ерекше деп аталатын  болғандағы шешімдер қарастырылмайтын болып отыр.

Дегенмен, (13)-ке қойылған аздау шарттың өзі шешулер класының көбін қамтиды. Айталық, (13)-тің шешімі бар болсын, онда  болар еді.

Осы тепе-теңдікті  бойынша дифференциалдасақ:



 шартын пайдалансақ:

 (14)

Осы жүйені (3)-ке қойып, ортақ бөлімге келтіріп, барлық мүшелерін бір жаққа шығарсақ, мынау шығады:

 (15)

(15) теңдеу сызықтық біртекті, мұнда аргументтер, ал  ізделінетін функция. Сондықтан да, мұны интегралдау (2) теңдеуге де қолданылады.

**Теорема.** Айталық, (3) теңдеудің  коэффициенттері өздерінің бірінші ретті  облысындағы дербес туындыларымен бірге үзіліссіз болсын және ең жоқ дегенде коэффициенттерінің біреуі нольден өзгеше болсын. Онда (3) тендеудің шешімі төмендегі формуламен беріледі:



мұнда кез келген дифференциалданатын функция, ал (3) сипаттаушы жүйенің тәуелсіз алғашқы интегралдары.

*Есеп.* Дәлелденген теоремалардағы қойылған шарттарды қанағаттандыратын (2) немесе (3) теңдеулер берілсін. Оған қоса кеңістікте (n = 2 немесе 3) параметрлік түрде немесе кез келген басқа бір тұрде, мәселен:



түрінде кейбір қисық берілсін. Егер n = 3 болса, онда екі жазықтықтың қиылысуы түзу сызық береді.

***I. Сызықты емес дифференциалдық теңдеулер жүйесі.***

***1. Белгісізді табу әдісі.***

Дифференциалдық теңдеулер жүйесін белгісіздерді табу жолымен бір теңдеуге (кейде әрбіреуінде бір белгісізі бар бірнеше теңдеуге) келтіруге болады.

**Мысал.** Келесі теңдеулер жүйесін шешіңіз:

,  (1)

Шешуі. Берілген теңдеуден  функциясын табамыз. Бірінші теңдеуден алатынымыз: . Екінші теңдеуге қойып, ықшамдағаннан кейін теңдеуін аламыз.

Берілген (1) теңдеулер жүйесі екінші ретті теңдеудің біріне келтірілген. Бұл теңдеу жоғарыда айтылған (ретін төмендету жолымен) әдістермен шешілуі мүмкін. Бұл теңдеуден  табылғанна кейін  теңдігін қолдана отырып  функциясын табу керек.

***2. Интегралданатын комбинацияларды іздеу әдісі.***

Белгісіздерді табу жолымен теңдеулер жүйесін шешу барысында әдетте жоғары ретті теңдеу алынады, сондықтан көп жағдайларда, жүйені интегралданатын комбинацияны іздеу жолымен шешу қолайлы.

**Мысал.** Жүйені шешу керек

. (2)

Шешуі. (2) жүйе симметриялық түрде жазылған. Алғашқы екі бөлшек интегралданатын комбинацияны құрайды.  теңдігін  -ке қысқартып, интегралдай отырып, бірінші интегралды аламыз

. (3)

Екінші интегралданатын комбинацияны алу үшін тең бөлшектердің келесі қасиетін пайдаланамыз:

егер , онда кез келген ,,..., үшін аламыз:



Бұл қасиеттерді қолдана отырып, (2) жүйеден алатынымыз:

; ; .

Сәйкесінше,

 (4)

Шындығында, алғашқы (3) интеграл мен (4) интеграл тәуелсіз. Жүйе шешілді.

Интегралданатын комбинацияны іздеудің орнына алғашқы (3) интегралдың көмегімен (2) жүйеден белгісіздердің біреуін, мысалға, -ті табуға болады. (3) теңдіктен  теңдігін аламыз. (2) жүйенің екінші теңдеуіне қойып, келесі теңдікті аламыз: . Бұдан ; . Бұл өрнекке (3) теңдіктен  тұрақтысының мәнін қою арқылы тағы да бір интегралды аламыз: .

### ***II. Бірінші ретті дербес туындылы теңдеулер.***

***Бірінші ретті дербес туындылы теңдеулерді шешу әдісі.***

, (1)

(мұндағы ,..., ,  ,..., ,айнымалыларынан тәуелді),

түріндегі дербес туындылы теңдеулерді шешуүшін келесі қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесін жазу керек:

 (2)

және осы жүйенің  тәуелсіз алғашқы интегралдарын табу керек, яғни

 (3)

(1) түрдегі жалпы теңдеудің айқындалмаған түрі келесі түрде жазылады:

 (4)

мұндағы - кез келген дифференциалданатын функция.

Дербес жағдайда, егер  (3) – түріндегі алғашқы интегралдың тек біреуіне ғана кіретін болса, мысалға, соңғысына, онда жалпы шешім келесі түрде жазылады:

, (5)

мұндағы  - кез келген дифференциалданатын функция. (5) теңдікті - ке қатысты шеше отырып, (1) теңдеудің айқындалған түрдегі жалпы шешімін аламыз.

**Мысал.**Келесі теңдеудің жалпы шешімін табу керек:



Шешуі. 1). Қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесін жазамыз:



және интегралданатын комбинацияны іздеу жолымен осы алғашқы екі интегралын табамыз.

2). Бірінші және үшінші бөлшектер келесі интегралдану комбинациясын құрайды:

(\*)

3). Екінші интегралданатын комбинацияны алу үшін тең бөлшектер қасиетін пайдаланамыз:

,

өйткені (\*) теңдігінен



Сонда



 (\*\*)

4). Алғашқы (\*), (\*\*) интегралдарын есепке алғанда, бастапқы теңдеудің жалпы шешімі айқындалмаған бетте келесі түрде жазылады.



***Бірінші ретті дербес туындылы теңдеу үшін қойылған Коши есебінің интегралдануы.***

Төмендегі

 (6)

дифференциалдық теңдеуді қанағаттандыратын және берілген

, ,  (7)

сызықтары арқылы өтетін  бетін табу үшін келесі жүйенің ең алғашқы екі тәуелсіз интегралын табу керек:

. (8)

Бұл алғашқы интегралдар

, , (9)

мұндағы , ,  айнымалыларының орнына, олардың (7) өрнекте  параметрі арқылы берілген мәндерін қойып, келесі екі теңдеуді аламыз:

, . (10)

 параметрін таба отырып,  қатынасын аламыз. Мұнда  мен  - тұрақтыларының орына (9) интегралдардың сол жағын қойып, іздеп отырған шешімді аламыз. (10) жүйедегі екі теңдеуге де  параметрі енбеген жағдайда ғана (7) сызықтар (6) жүйенің интегралдық қисықтары болып табылады және Коши есебі шексіз көп шешімге ие болады.

**Мысал.***.*

, (11)

теңдеуінің жалпы шешімін және

, . (12)

қисықтары арқылы өтетін интегралдық бетін табу керек.

Шешуі. Келесі теңдеулер жүйесін құрамыз



және оның алғашқы интегралдарын табамыз:

, . (13)

Сәйкесінше, (11) теңдеудің жалпы шешімін айқындалмаған бетте келесі түрде жазамыз



мұндағы  - кез келген функция.  (13) алғашқы интегралдың тек біреуіне кіретін болғандықтан, жалпы шешім айқындалған бетте келесі түрде жазылады:

; ,

мұндағы  - кез келген функция. (12) – ші сызықтар арқылы өтетін интегралдық бетті табу үшін бұл сызықтарды параметрлік түрде жазамыз, мысалға, параметр ретінде  - ті алайық, сонда

, , .

Бұл өрнектерді (13) – ке қойып, алатынымыз

, .

- ті тауып, келесі теңдікті аламыз:



 және  тұрақтыларының орнына алғашқы (13) интегралдарының сол жағын қойып, іздеп отырған шешімді аламыз:

***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
2. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
3. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

**№16 - лекция**

**Дифференциалдық теңдеуді дәрежелік қатар арқылы интегралдау.**

**Шешімнің бастапқы мәндер мен параметрлерден тәуелділігі.**

Жоспар.

1. Айнымалы коэффициенті бар 2-ретті сызықтық теңдеудің шешуін дәрежелік қатар арқылы табу.
2. Теңдеуді түйіндес түрге келтіру.
3. 2 – ретті теңдеудің тербелмелі шешуі.
4. Штурм және салыстыру теоремалары.

Лекция мазмұны.

**Дифференциалдық теңдеуді дәрежелік қатар арқылы интегралдау.**

 (1)

теңдеуін қарастырайық.  және функциялары  –тің бүтін оң дәрежесі бойынша қатарға жіктеледі деп алайық, яғни

 (2)

Бұл жағдайда (2) теңдеудің шешуін төмендегі дәрежелі қатар түрінде іздейміз

 (3)

мәндерін (2)-ға қойсақ, сонда:

 (4)

Дәрежелік қатарларды өзара көбейтіп, ұқсастарын жинақтап және -тің әр дәрежесіндегі коэффициенттерін нольге теңесек мынау шығады:

 (5)

Мұнда  аргументтеріне байланысты 1-ші дәрежелі көпмүшелік.

Жоғарғы теңдеулерде  және  коэффициенттерін өзіміз таңдап аламыз, ал қалған келесі теңдеулерде ізделінетін бір коэффициентке артық болып отырады.

Мәселен, 1-теңдеуде сан мәндерін беріп –ні, 2-теңдеуден –ті т.с.с. табуға болады. Теңдеудің шешуін табу үшін жоғарғы әдіспен және –ні тауып (бұл теңдеу шешулері), олар арқылы  тұрақтылардың қатысуымен сызықтық комбинация жасау қажет.

Бір теореманы дәлелсіз келтірейік:

**Теорема:** Егер 

 мәнінде жинақы қатарлар болса, онда –тің осы мәндерінде жоғарғы әдіспен құрылған дәрежелі қатарда жинақы болады, әрі ол теңдеудің шешуі болады.

***Мысалы:*** түрінде іздейміз



Жақшаларды ашып, ұқсастарын жинастырып, жоғарғы әдіс бойынша:



 деп алып, басқа коэффициенттерді табамыз.

***Мысал:***





т.с.с. -ге тең емес коэффициенттер , ал 0-ге тең  Демек 

1-шешу: 

2-шешу: 

 жалпы шешуі.

1. **2-ретті сызықтық теңдеулердің тербелмелі (құбылмалы) шешулері**

Алдымен, мына төмендегі қарапайым теңдеулерді қарастырайық:

 (6(\*))

 (6(\*\*))

Бұл екі теңдеу шешулерінің қасиеттері әртүрлі. Мәселен, (6(\*)) теңдеуінің шешуі  аралығында ең көп болғанда бір рет қана ноль болуы мүмкін, ал (6(\*\*)) теңдеу шешуінің нольдері осы аралықта толып жатқан шексіз көп болуы мүмкін. Бұл қорытынды олардың жалпы шешулерінен белгілі.

Мәселен, (6(\*))-дің шешуі

;  аралығында  болатын бірақ мәні бар, ол болғанда ғана. (6(\*\*))–нің шешуі

 немесе  деп алсақ,  болады, мұның физикалық мәні тербелмелі қозғалысты (гармоникалық тербелістер) көрсетеді, мұнда -амплитуда, -жиілігі, периоды  болғандықтан аралығында шексіз көп рет нольге тең мәндері болады, ол нольдердің өзара қашықтағы , сондықтан  үлкен интервалда бір ноль, -дан үлкенде екі ноль кездесіп отырады.

**Анықтама.** Егер берілген аралықта дифференциалдық теңдеу шешуінің бір ғана нолі болса, оны тербелмейтін шешу деп, ал шексіз көп болса тербелмелі шешу деп атайды.(кейбір әдебиеттерде біріншісі сәйкес неосцилирующее решение, екіншісі осцилирующее решение деп аталады). Бұдан әзірше мынадай қорытынды жасауға болады: егер теңдеу шешунің бір ғана нолі болса, сол аралықта ал таңбасын бірақ рет өзгертеді, ал шексіз көп болса-таңбасын көп рет өзгертеді: (15-сызбалар)

*у*

0

*х*

*+*

*-*

*х0*

15-сызба

0

*х*

*у*

*+*

*-*

*х0*

16-сызба

*х1*

*х2*

*х3*

*-*

*+*

*+*

Сонымен, егер

, (7)

мұнда  теңдеу шешуі тербелмейтін шешу болады, егер  болса, тербелетін шешу болады егер  болса. Енді (1) теңдеуді қарастырайық:

Бұл теңдеу  ауыстыруы бойынша  қарапайым түрге келтіріледі. Мұның инварианты  болатыны белгілі. Егер  тұрақты шама болса, шешуі оңай табылады. Ал егер  айнымалы шама болса мына теоремаларды қолданамыз.

**1. Салыстыру теоремасы**

 (8(\*))

 (8(\*\*))

 болатын теңдеулерді қарастырайық, онда (8(\*\*))теңдеу шешуінің кез-келген екі нолінің арасын (8(\*)) теңдеу шешуінің ең болғанда бір нолі бөліп тұрады.

Бұл теоремада керісінше жору әдісімен дәлелденеді.

**Салдар:**  теңдеуінің ешқандай шешуі  аралығында бір реттен артық ноль бола алмайды, егер  болса.

Теорема мен салдар

 (9)

 (10)

шешулерінің нольдерін салыстыруға мүмкіндік береді, басқаша айтқанда дифференциалдық теңдеу тербелмелі шешулерінің нольдерін төменгі және жоғарғы жағынан бағалауға болады.

Айталық  және болсын.

 (11)

теңдеу шешуінің қатар екі нолінің ара қашықтығы  шамасынан кіші болады.

 (12)

теңдеу шешуінің қатар екі нолінің ара қашықтығы  шамасынан үлкен.

**2. Штурм теоремасы**

(Штурм-француз математигі, бұл теореманы 1856 ж. дәлелдеген).

(1) біртекті теңдеудің сызықты тәуелсіз екі шешуінің нольдері бірін-бірі өзара бөліп тұрады. (17-сызба)

0

*у*

17-сызба

**

*х*

Айталық, (1) теңдеудің  және  сызықты тәуелсіз шешулері болсын. шешудің  екі нолі болсын дейік, яғни  аралығында  болатын жалғыз ғана нүктесі болатынын көрсетейік.

Теореманы дәлелдеу үшін керісінше жориық.  үшін  және  болсын дейік.

Осы аралықтың шеттерінде  олай болмаған жағдайда  болар еді, ал бұл  және  шешулерінің сызықтық тәуелсіз болатынына қайшы келеді.

Анық болу үшін  деп алайық

 –ден -ге дейін интегралдайық



Мұны сол жағы нольге тең, ал оң жағы оң сан, бұл мүмкін емес. Сондықтан біздің ұйғаруымыз дұрыс емес, олай болса  болатын  нүктесі бар болады.

**Шешімнің бастапқы мәндер мен параметрлерден тәуелділігі.**

Қалыпты дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін келесі есепті қарастырамыз:

   (1)

бастапқы шарттары

  (2)

мұндағы  - жүйенің оң жақ бөлігіне кіретін,  параметрлерін сипаттайтын вектор.

Шешімнің бастапқы  және  мәндерінен тәуелділігін зерттеу жүйенің оң жағында шешімнің параметрден тәуелділігін зерттеуге әкеледі. Шындығында, (1) – ге

  (3)

ауыстыруын қолданып, - жаңа белгісіз функциясы үшін келесі теңдеуді жазамыз:

 

(4)



 болғанда жаңа айнымалы  және  үшін бастапқы мәндер енді белгіленген:

 (5)

 параметрлерімен бірге  және  мәндері де параметрлер ретінде (4) –тің оң жағына кіреді. Сондықтан есеп,  функциясының ,  параметрлерінен тәуелділігін зерттеуге әкеледі. Кері тұжырым да орынды: шешімнің параметрден тәуелділігін шешімнің бастапқы мәндерінен тәуелділігінің дербес түрі ретінде қарастыруға болады. Шындығында, (1) – ші теңдеуде  параметрлері белгіленген және  мәндерін қабылдайтын болғандықтан, (2) – ші бастапқы шарттарымен берілген (1) – ші теңдеуге бастапқы шарттарымен берілген түріндегі теңдеуді қосуға болады. Сонда келесі жаңа жүйені аламыз:

    (6)

Енді  шешімнің  параметрлерінен тәуелділігі жөніндегі сұрақ (6) есеп шешімінің бастапқы мәндерінен тәуелділігін зерттеуге әкеледі.

Төменде біз шешімнің параметрлерден тәуелділігін зерттейміз.

**2. Шешімнің параметрден тәуелділігі.**

Алдымен төмендегі скалярлы теңдеуді қарастырайық

 (7)

Бұл теңдеу  скалярлы параметрімен және белгіленген

 (8)

бастапқы мәндерімен берілген. Оң жақ бөлігі 



параллелепипедінде анықталған, айнымалылардың жиынтығы бойынша  облысында үзіліссіз болсын, сонымен қатар,  облысында  бойынша төмендегі Липшиц шартын қанағаттандырсын:

 (9)

мұндағы  - барлық  үшін кесіндісінен алынған бір ғана тұрақты. Әрбір белгіленген  мәнінде, шешімнің бар болуы жөніндегі теоремаға сәйкес,   кесіндісінде алғашқы (7), (8) есептің шешімі – интегралдық қисық анықталған.  ауыстыра отырып,  және  тұрақтыларының  параметрінен тәуелсіздігінің көмегімен  кесіндісінде анықталған  интегралдық қисықтар үйірін аламыз.

 функциясының  параметрінен тәуелділігін зерттейміз. Келесі теореманың әділдігін (орындалатынын) дәлелдейміз.

***Лемма 1. (дифференциалдық теңсіздіктер жөніндегі лемма)***

 функциясы үзіліссіз және  алынған жағдайда

, мұндағы  - оң тұрақтылар, (\*)

теңсіздігін қанағаттандыратын, бөлікті үзіліссіз туындыға ие болсын (туындының үзіліс нүктелерінде (\*) теңсіздігін, оның шектік мәндері қанағаттандырады). Олай болса келесі теңдік орындалады:



мұндағы  -  сызықты дифференциалдық теңдеу үшін алғашқы есептің шешімі.

**Теорема.**  *Айталық,  функциясы*  *облысында анықталған және үзіліссіз болсын, сонымен қатар,*  *айнымалысы бойынша* *(9) Липшиц шартын қанағаттандырсын. Онда*  *кесіндісінде анықталған (7), (8) есептің  шешімі*  *кесіндісінен алынған кез келген мәнінде*  *бойынша үзіліссіз болады.*

**Дәлелдеуі**. Теорема дәлелденеді, егер кез келген  үшін  шамасы табылып,  болғанда  кесіндісінен алынған кез келген  және  үшін

 (10)

теңсіздігі орындалса. Дифференциалдық теңсіздіктер жөніндегі лемманы пайдаланамыз. Аламыз

 

 

Бір қатынастан екінші бір қатынасты шегере отырып,  айырымы үшін

 . (11)

теңдігін аламыз. ** функциясы аргументтерінің жиынтығы бойынша үзіліссіз және  болғандықтан  болғанда кез келген  үшін  орындалса, онда  теңсіздігі  аргументіне қатысты бірқалыпты болатындай  шамасы табылады. Осы фактіге және Липшиц шартына сүйене отырып

 (12)

теңсіздігін аламыз. Сондықтан лемма 1- ге және (9) формулаға сәйкес  болғанда, яғни  теңсіздігі орындалғанда,

 (13)

теңсіздігін аламыз. Теорема дәлелденді.

***Ұсынылатын әдебиеттер:***

1. Әбдіманапов С.Ә., Сматов Т.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Астана: Нұржол, 2004.
2. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Рауан, 1991.
3. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Вышейшая школа, 1974.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз. 1959.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.
8. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1973.
9. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М.: Высшая школа,1989.